INTEGRALI GENERALIZZATI

LUCIA GASTALDI

1. Esercizi

1. Usando la definizione, calcolare i seguenti integrali impropri:

$$a)\quad \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx, \qquad \int_0^1 \log x\,dx \qquad [1],\ [-1]$$

$$b)\quad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} + xe^{-x}\right) dx \qquad [1+\tfrac{2}{e}]$$

$$c)\quad \int_0^2 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx \qquad [2\log(1+\sqrt{2})]$$

$$d)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx \qquad [\tfrac{\pi}{9}]$$

$$e)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{3/2}}\,dx \qquad [2\pi]$$

2. Discutere la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx \qquad [\text{non conv.}]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad [\text{conv.}]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \qquad [\text{conv.}]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad [\text{conv.}]$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad [\text{conv.}]$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx \qquad [\text{conv.}]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh x}\,dx \qquad [\text{conv.}]$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\log x} \qquad [\text{non conv.}]$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^s} \qquad \text{[non conv. per } s \le 1\text{]}$$

$$\int_2^\infty \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3+x+1}}\,dx \qquad \text{[non conv.]}$$

$$\int_2^\infty \frac{x+\sin^2 x}{x^3}\,dx \qquad \text{[conv.]}$$

$$\int_1^\infty \frac{2+\arctan x}{\sqrt{x^3}}\,dx \qquad \text{[conv.]}$$

$$\int_1^\infty \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\,dx \qquad \text{[conv.]}$$

$$\int_2^3 \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\,dx \qquad \text{[conv.]}$$

$$\int_0^2 \frac{\log(1+\sqrt[4]{x^3})}{e^{\sin x}-1}\,dx \qquad \text{[non conv.]}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|^\alpha}\,dx \qquad \text{[conv. se } 1<\alpha<2\text{]}$$

$$\int_0^1 x\log\left|\frac{x}{x-1}\right|\,dx \qquad \text{[conv.]}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2-2}}\,dx \qquad \text{[conv.]}$$

$$\int_0^3 \frac{1-\cos x}{x^2\sin\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{[conv.]}$$

$$\int_0^{12} \frac{1-\cos x}{x^2\sin\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{[non conv.]}$$

3. Calcolare i seguenti integrali, se convergenti:

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\log x} \qquad \text{[non conv.]}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} \qquad [\pi]$$

$$\int_0^\infty x\sin x\,dx \qquad \text{[non conv.]}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\log x}} \qquad [2]$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$$ [non conv.]

$$\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$$ [$\frac{\pi}{2} + \log 3$]

$$\int_0^{1} \frac{3x+2}{x^{2/3}}\, dx$$ [$\frac{33}{4}$]

4. Verificare la convergenza del seguente integrale generalizzato e calcolarne il valore:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3}\, dx$$
[1/2]

5. Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ converge l'integrale generalizzato
$$I_n = \int_2^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(x^2-1)^3}\, dx.$$
Calcolarlo per il più grande di essi.
[$n \leq 1,\ \frac{7}{36}$]

6. Studiare la convergenza assoluta del seguente integrale generalizzato:
$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 - x - 1}\, dx$$
[conv.ass.]

7. Per un certo numero C reale, l'integrale
$$\int_2^{\infty} \left(\frac{Cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$$
converge. Determinare C e valutare l'integrale.
[$C = 1/2,\ \frac{1}{2}\left(-\log 2 + \frac{1}{2}\log 5\right)$]

8. Per un certo numero C reale, l'integrale
$$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2C} - \frac{C}{x+1} \right) dx$$
converge. Determinare C e valutare l'integrale.
[$C = 1/2,\ \frac{5}{4}\log 2 - \frac{1}{2}\log 3$]

9. Determinare C reale, in modo che il seguente integrale converga
$$\int_2^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} - \frac{C}{x+1} \right) dx.$$
[$1/\sqrt{2}$]

Dipartimento di Matematica, Università di Brescia, Italy
E-mail address: gastaldi@ing.unibs.it
URL: http://bsing.ing.unibs.it/~gastaldi/