

# ESERCIZI SUI PUNTI DI NON DERIVABILITÀ TRATTI DA TEMI D'ESAME

a cura di Michele Scaglia

## FUNZIONI DERIVABILI

Sia  $f : \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $x_0 \in \text{dom} f$  non isolato.

Chiamiamo **derivata prima di  $f$  in  $x_0$**  il valore (finito o infinito) del limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o, equivalentemente, effettuando il cambiamento di variabile  $x - x_0 = h$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Il valore del precedente limite viene denotato con uno dei simboli

$$f'(x_0) \quad , \quad y'(x_0), \quad Df(x_0).$$

La funzione  $f$  si dice **derivabile in  $x_0$**  se il precedente **limite esiste finito**.

Ciò significa che devono esistere finiti entrambi i limiti

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e coincidere.

Ricordiamo che i precedenti limiti vengono detti rispettivamente **derivata sinistra** e **derivata destra** di  $f$  in  $x_0$  e indicati con i simboli

$$f'_-(x_0), \quad f'_+(x_0).$$

Quindi, riepilogando, diciamo che  $f$  è derivabile in  $x_0$  se e solo se

$$(1) \quad \exists f'_-(x_0) \neq \infty, \quad \exists f'_+(x_0) \neq \infty \quad \text{e} \quad f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Una funzione  $f : \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$  per cui in  $x_0 \in \text{dom} f$  non valga la condizione (1) si dice **non derivabile in  $x_0$**  e il punto  $x_0$  si dice **punto di non derivabilità** per  $f$ .

A seconda del tipo di negazione della (1) si hanno tre tipi di punti di non derivabilità.

## PUNTO ANGOLOSO

Diciamo che  $x_0$  è un **punto angoloso** per  $f$  se esistono e sono diverse derivata destra e derivata sinistra di  $f$  in  $x_0$  e almeno una delle due è finita.

## PUNTO DI CUSPIDE

Diciamo che  $x_0$  è un punto di **cuspid**e per  $f$  se derivata destra e derivata sinistra di  $f$  in  $x_0$  valgono  $\infty$  e sono di segno discorde.

Cioè

$$f'_-(x_0) = +\infty \text{ e } f'_+(x_0) = -\infty, \quad \text{oppure} \quad f'_-(x_0) = -\infty \text{ e } f'_+(x_0) = +\infty.$$

## PUNTO A TANGENTE VERTICALE

Diciamo che  $x_0$  è un punto **a tangente verticale** per  $f$  se la derivata destra e la derivata sinistra di  $f$  in  $x_0$  valgono entrambe  $\infty$  e sono di segno concorde.

Cioè

$$f'_-(x_0) = +\infty \text{ e } f'_+(x_0) = +\infty, \quad \text{oppure} \quad f'_-(x_0) = -\infty \text{ e } f'_+(x_0) = -\infty.$$

Ricordiamo anche l'importante teorema che collega continuità e derivabilità di una funzione  $f$  in un punto  $x_0$ .

## TEOREMA

Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

In formule:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \implies f \text{ continua in } x_0.$$

Non vale il viceversa.

Cioè, una funzione continua in un punto  $x_0$  non è detto che sia derivabile in  $x_0$ .

In formule

$$f \text{ continua in } x_0 \not\implies f \text{ derivabile in } x_0$$

Si pensi ad esempio ai punti di non derivabilità appena classificati. Un punto angoloso per  $f$  è un punto in cui la funzione è continua ma non è derivabile (essendo diverse derivata destra e sinistra).

In base alla definizione data, per verificare se una funzione è derivabile in un punto  $x_0$ , è

necessario calcolarsi  $f'_-(x_0)$  e  $f'_+(x_0)$ , vale a dire calcolarsi due limiti.

In realtà, in molti contesti, si può evitare di procedere con il calcolo dei due limiti del rapporto incrementale.

Vale infatti il seguente teorema:

### TEOREMA (del limite della derivata)

Sia  $f : \text{dom}f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita e continua in  $I(x_0)$  e derivabile in  $I(x_0)$  tranne eventualmente in  $x_0$ .

Se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

allora esiste anche la derivata sinistra  $f'_-(x_0)$  di  $f$  in  $x_0$  e si ha

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x).$$

Analogamente, se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

allora esiste anche la derivata destra  $f'_+(x_0)$  di  $f$  in  $x_0$  e si ha

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x).$$

Questo teorema di consente di ricondurre il calcolo della derivata sinistra e destra al calcolo del limite della derivata prima di  $f$  (calcolata con le usuali regole di derivazione) per  $x \rightarrow x_0^-$  o  $x_0^+$ , a patto che tali limiti esistano.

Nel caso in cui, ad esempio, non esista

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x),$$

non si può concludere nulla circa il valore della derivata destra di  $f$  in  $x_0$ : per il suo calcolo bisogna procedere utilizzando la definizione (vale a dire, facendo il limite destro del rapporto incrementale).

Stesso discorso per la derivata sinistra.

## ESERCIZI SVOLTI

1) [T.E. 03/04/2007]

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{8x} & \text{se } x < 0, \\ (\beta - 1)\sqrt{x} + \cos x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di  $\alpha$  e  $\beta$  la funzione  $f$  è continua e derivabile in  $x = 0$ . Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità e di non derivabilità in  $x = 0$ .

**Svolgimento.**

Cominciamo a studiare la continuità di  $f$  in  $x = 0$  (condizione necessaria per poter sperare nella derivabilità).

La funzione  $f$  è continua in  $x = 0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Cominciamo a calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Supposto per il momento  $\alpha \neq 0$ , ricordando il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\alpha x)}{8x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha x)}{8 \cdot \alpha \cdot x} = \frac{\alpha}{8}.$$

Se invece  $\alpha = 0$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(0x)}{8x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

Consideriamo ora il limite destro (che, vista la definizione di  $f$ , coincide con  $f(0)$ ). Si ha

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\beta - 1)\sqrt{x} + \cos x = (\beta - 1)\sqrt{0^+} + \cos 0 = 1.$$

Quindi, nel caso in cui  $\alpha = 0$  la funzione è discontinua in  $x = 0$  in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Pertanto, per  $\alpha = 0$   $f$  presenta in  $x = 0$  un punto di salto con

$$S = |0 - 1| = 1.$$

Quindi, per  $\alpha = 0$ ,  $f$  non può essere derivabile in  $x = 0$ , qualunque sia  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Se  $\alpha \neq 0$ , la funzione  $f$  è continua in  $x = 0$  se e solo se

$$\frac{\alpha}{8} = 1,$$

da cui

$$\alpha = 8.$$

Pertanto, per  $\alpha = 8$  la funzione  $f$  è continua in  $x = 0$  per ogni  $\beta \in \mathbb{R}$  (infatti, il parametro  $\beta$  non è mai intervenuto nello studio della continuità di  $f$ ).

Tale funzione potrebbe essere derivabile in  $x = 0$ , come potrebbe non esserlo. Sappiamo infatti che la continuità in un punto non è sufficiente a garantire la derivabilità in quel punto.

Calcoliamo quindi la derivata prima della funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(8x)}{8x} & \text{se } x < 0, \\ (\beta - 1)\sqrt{x} + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

utilizzando le usuali regole di derivazione.

Calcoliamo separatamente i vari contributi.

Partiamo dalla derivata di

$$\frac{\sin(8x)}{8x} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin(8x)}{x}.$$

Risulta

$$\left( \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin(8x)}{x} \right)' = \frac{1}{8} \cdot \frac{\cos(8x) \cdot 8 \cdot x - \sin(8x) \cdot 1}{x^2} = \frac{8x \cos(8x) - \sin 8x}{8x^2}.$$

Per quanto riguarda

$$(\beta - 1)\sqrt{x} + \cos x,$$

si ha

$$((\beta - 1)\sqrt{x} + \cos x)' = (\beta - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x.$$

Pertanto risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{8x \cos(8x) - \sin(8x)}{8x^2} & \text{se } x < 0 \\ (\beta - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Come già richiamato precedentemente, possiamo dire (grazie al teorema del limite della derivata) che  $f$  è derivabile in  $x = 0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \neq \infty$$

(a patto che tali limiti esistano. Nel caso in cui non esistessero, bisognerebbe procedere, come da definizione, con il calcolo dei limiti sinistro e destro del rapporto incrementale).

Dobbiamo quindi fare in modo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8x \cos(8x) - \sin(8x)}{8x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ (\beta - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x \right\}.$$

Studiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8x \cos(8x) - \sin(8x)}{8x^2}.$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ . Cerchiamo di risolverlo con la regola di De L'Hopital.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8x \cos(8x) - \sin(8x)}{8x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8 \cdot \cos(8x) - 8x \sin(8x) \cdot 8 - \cos(8x) \cdot 8}{16x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-64x \sin(8x)}{2 \cdot 8x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -32x = 0$$

(si è usato il limite notevole  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ , combinato col teorema di sostituzione).

Esistendo il limite sinistro della derivata prima, esiste anche la derivata sinistra, in particolare si ha

$$f'_-(0) = 0.$$

Calcoliamo ora il limite destro, vale a dire

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ (\beta - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x \right\}.$$

Cominciamo con l'osservare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0.$$

Pertanto, se

$$\beta - 1 = 0,$$

ossia se

$$\beta = 1,$$

scompare l'addendo che tende all'infinito, pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'_+(0) = 0,$$

e di conseguenza la funzione  $f$  è derivabile in  $x = 0$  (in quanto derivata sinistra e destra di  $f$  in 0 coincidono e sono entrambe finite).

Se invece  $\beta \neq 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \pm\infty - 0 = \pm\infty,$$

dove il segno dell'infinito è  $+$  se  $\beta > 1$  e  $-$  se  $\beta < 1$ .

In ogni caso, se  $\beta \neq 1$ , nel punto  $x = 0$  si ha un punto angoloso, in quanto

$$f'_-(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'_+(0) = \infty.$$

Riepilogando

- se  $\alpha \neq 8$ ,  $f$  non è continua in  $x = 0$  per ogni  $\beta \in \mathbb{R}$ ; quindi non può essere derivabile in  $x = 0$ ;
- se  $\alpha = 8$  e  $\beta = 1$ ,  $f$  è continua e derivabile in  $x = 0$ ;
- se  $\alpha = 8$  e  $\beta \neq 1$ ,  $f$  è continua in  $x = 0$  ma non è derivabile in  $x = 0$  e presenta un punto angoloso.

2) [T.E. 10/09/2007]

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x \sqrt[3]{(\log |x|)^2} & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  sia continua e derivabile in  $x = 0$ . Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità e di non derivabilità in  $x = 0$ .

**Svolgimento.**

Cominciamo a studiare la continuità di  $f$  in  $x = 0$ .

$f$  è continua in  $x = 0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = f(0).$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x \sqrt[3]{(\log |x|)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x (\log |x|)^{2/3} = 0,$$

trattandosi di un caso particolare del limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\log x)^\beta = 0, \quad \text{per ogni } \alpha, \beta > 0.$$

Inoltre

$$f(0) = \alpha - 1.$$

Quindi,  $f$  è continua in  $x = 0$  se e solo se

$$\alpha - 1 = 0,$$

ossia se e solo se

$$\alpha = 1.$$

Se  $\alpha \neq 1$ , la funzione  $f$  presenta in  $x = 0$  una discontinuità eliminabile (in quanto limite sinistro e destro valgono entrambi 0, a differenza della  $f(0)$ , che vale invece  $(\alpha - 1) \neq 0$ ).

Perché abbia senso studiare la derivabilità in  $x = 0$ , è anzitutto necessario riscrivere la funzione  $f$  con  $\alpha = 1$ , ossia riscrivere continua la funzione  $f$ :

$$f(x) = \begin{cases} x \sqrt[3]{(\log |x|)^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Diamo due possibili modi di svolgimento dell'esercizio (il primo metodo ricorre al teorema del

limite della derivata; il secondo, invece, utilizza la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale).

**Primo modo.**

Controlliamo se  $f$  è derivabile o meno in  $x = 0$  utilizzando il teorema del limite della derivata.

Dovendo calcolare la derivata possiamo liberarci del valore assoluto, studiandone il segno dell'argomento.

Poiché

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

possiamo riscrivere la funzione  $f$  come

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\log(-x))^2} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \\ x\sqrt[3]{(\log(x))^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Calcoliamone la derivata prima utilizzando le usuali regole.

Consideriamo ad esempio

$$x\sqrt[3]{(\log(-x))^2} = x \cdot (\log(-x))^{2/3}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \left(x \cdot (\log(-x))^{2/3}\right)' &= 1 \cdot (\log(-x))^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} (\log(-x))^{-1/3} \cdot \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \\ &= (\log(-x))^{2/3} + \frac{2x}{3x \cdot (\log(-x))^{1/3}} = (\log(-x))^{2/3} + \frac{2}{3 \cdot (\log(-x))^{1/3}} = \\ &= \sqrt[3]{(\log(-x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(-x)}}. \end{aligned}$$

In maniera analoga, si trova

$$\left(x \cdot (\log(x))^{2/3}\right)' = \sqrt[3]{(\log(x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(x)}}.$$

Pertanto si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(\log(-x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(-x)}} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt[3]{(\log(x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(x)}} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Calcoliamo, se esistono, limite sinistro e destro della derivata prima.

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left\{ \sqrt[3]{(\log(-x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(-x)}} \right\} = \\ &= \left[ \sqrt[3]{(\log(0^+))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(0^+)}} \right] = \left[ \sqrt[3]{(-\infty)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{-\infty}} \right] = +\infty - 0 = +\infty. \end{aligned}$$

Pertanto, esistendo il limite sinistro della derivata, esiste anche la derivata sinistra e si ha

$$f'_-(0) = +\infty.$$

Calcoliamo ora il limite destro.

Risulta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \sqrt[3]{(\log(x))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(x)}} \right\} = \\ &= \left[ \sqrt[3]{(\log(0^+))^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{\log(0^+)}} \right] = \left[ \sqrt[3]{(-\infty)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{-\infty}} \right] = +\infty - 0 = +\infty. \end{aligned}$$

Pertanto

$$f'_+(0) = +\infty.$$

Poiché

$$f'_-(0) = +\infty = f'_+(0),$$

ne segue che in  $x = 0$  la funzione  $f$  non è derivabile e presenta un punto a tangente verticale.

In definitiva:

- se  $\alpha \neq 1$ ,  $f$  non è continua né derivabile in  $x = 0$ ; in particolare in  $x = 0$  vi è una discontinuità eliminabile.
- se  $\alpha = 1$ ,  $f$  è continua in  $x = 0$  ma non è derivabile e presenta un punto a tangente verticale.

**Secondo modo.**

Considerata per  $\alpha = 1$  la funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{(\log|x|)^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

studiamone la derivabilità in  $x = 0$  applicando la definizione (vale a dire, calcolando il limite del rapporto incrementale per  $h \rightarrow 0^-$  e per  $h \rightarrow 0^+$ ).

Cominciamo a calcolare la derivata sinistra.

Si ha

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Risulta (ricordando che  $h \neq 0$ )

$$f(h) = h\sqrt[3]{(\log|h|)^2}$$

e, in base alla definizione di  $f$ ,

$$f(0) = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h\sqrt[3]{(\log|h|)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h\sqrt[3]{(\log|h|)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{(\log|h|)^2} = \\ &= \left[ \sqrt[3]{(\log|0^-|)^2} \right] = \left[ \sqrt[3]{(\log(0^+))^2} \right] = \left[ \sqrt[3]{(-\infty)^2} \right] = \left[ \sqrt[3]{+\infty} \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Cioè

$$f'_-(0) = +\infty.$$

Analogamente,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{(\log|h|)^2} = +\infty.$$

Poiché

$$f'_-(0) = +\infty = f'_+(0),$$

si ha che, per  $\alpha = 1$ , la funzione  $f$  non è derivabile in  $x = 0$  e presenta un punto a tangente

verticale.

Abbiamo ottenuto, con molti meno calcoli, lo stesso risultato a cui siamo giunti utilizzando il teorema del limite della derivata.

Questo esercizio vuole sottolineare come sia importante valutare se il calcolo delle derivate destra e sinistra non risulti più comodo attraverso la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale piuttosto che attraverso il teorema del limite della derivata.

### 3) [T.E. 06/09/2010]

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+7x)}{x} + x^{4/5} & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  è continua in  $x = 0$ . Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità. Nel caso in cui  $f$  sia continua, dire se è derivabile o meno in  $x = 0$  e, in caso negativo, classificare il tipo di non derivabilità.

#### *Svolgimento.*

Cominciamo con lo studio della continuità.

Studiamo il

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Ricordando il limite notevole  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(1+7x)}{x} + x^{4/5} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{7 \cdot \log(1+7x)}{7 \cdot x} + x^{4/5} \right\} = 7 \cdot 1 + 0 = 7.$$

Quindi, essendo

$$f(0) = \alpha,$$

si ha che  $f$  è continua in  $x = 0$  se e solo se

$$\alpha = 7.$$

Se  $\alpha \neq 7$ , la funzione  $f$  presenta, in  $x = 0$ , una discontinuità eliminabile.

Poniamo ora  $\alpha = 7$ , dando luogo alla funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+7x)}{x} + x^{4/5} & \text{se } x \neq 0, \\ 7 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Studiamone la derivabilità.

Calcoliamo la derivata prima. Si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{\log(1+7x)}{x} + x^{4/5} \right)' &= \frac{\frac{1}{1+7x} \cdot 7 \cdot x - \log(1+7x) \cdot 1}{x^2} + \frac{4}{5} x^{-1/5} = \\ &= \frac{\frac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}. \end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left\{ \frac{\frac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} \right\}.$$

Sappiamo, dalla teoria, che il limite della somma di due funzioni è pari alla somma dei limiti delle due funzioni, a patto che non si generino forme indeterminate.

Cominciamo quindi col calcolare il limite, per  $x \rightarrow 0^-$ , del primo addendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2},$$

che si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ .

Applichiamo il teorema di De L'Hopital.

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{7(1+7x) - 49x}{(1+7x)^2} - \frac{7}{(1+7x)}}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{7}{(1+7x)^2} - \frac{7}{(1+7x)}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-49x}{(1+7x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-49}{2(1+7x)^2} = \frac{-49}{2}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo addendo, invece, si ha direttamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} = \left[ \frac{4}{5\sqrt[5]{0^-}} \right] = \left[ \frac{4}{0^-} \right] = -\infty.$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} = -\frac{49}{2} - \infty = -\infty.$$

In maniera analoga si trova

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{7x}{1+7x} - \log(1+7x)}{x^2} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} = -\frac{49}{2} + \infty = +\infty.$$

Quindi

$$f'_-(0) = -\infty, \quad f'_+(0) = +\infty.$$

Ne segue che la funzione  $f$  non è derivabile in  $x = 0$  e presenta un punto di cuspidè.

Riepilogando:

- se  $\alpha \neq 7$  la funzione  $f$  non è continua, quindi neanche derivabile in  $x = 0$ . In particolare in  $x = 0$  presenta una discontinuità eliminabile.
- se  $\alpha = 7$ , la funzione  $f$  è continua in  $x = 7$  ma non è derivabile e presenta un punto di cuspidè.

4) [T.E. 18/03/2008]

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la seguente funzione:

$$g(x) = \begin{cases} 3|x| + 1 + x \log |x| & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $g$  è continua in  $x = 0$  ed altrimenti classificarne il tipo di discontinuità. Determinare per quali valori di  $\alpha$  la funzione  $g$  è derivabile o meno in  $x = 0$  ed altrimenti classificarne il tipo di non derivabilità.

**Svolgimento.**

Per studiare la continuità di  $f$  in  $x = 0$ , dobbiamo considerare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \{3|x| + 1 + x \log |x|\}.$$

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\log x)^\beta = 0, \quad \text{per ogni } \alpha, \beta > 0,$$

si ha facilmente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{3|x| + 1 + x \log |x|\} = 1.$$

Quindi,  $f$  è continua in  $x = 0$  se e solo se

$$\alpha = 1.$$

Se  $\alpha \neq 1$ , la funzione  $f$  presenta in  $x = 0$  una discontinuità eliminabile.

Posto  $\alpha = 1$ , studiamo la derivabilità della funzione continua

$$g(x) = \begin{cases} 3|x| + 1 + x \log |x| & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Per il calcolo della derivata, in questo caso, procediamo tenendo il valore assoluto (potremmo, indifferentemente, procedere come nell'esercizio 2 liberandoci del valore assoluto. Decidiamo invece di tenere il valore assoluto per mostrare un altro modo di soluzione).

Ricordando che

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|},$$

si ha, nel nostro caso,

$$g'(x) = 3 \frac{x}{|x|} + 0 + 1 \cdot \log(|x|) + x \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|} = 3 \frac{x}{|x|} + \log(|x|) + \frac{x^2}{|x|^2} =$$

$$= 3 \frac{x}{|x|} + \log(|x|) + \frac{x^2}{x^2} = 3 \frac{x}{|x|} + \log(|x|) + 1 \quad \text{se } x \neq 0.$$

Pertanto

$$g'(x) = \begin{cases} -3 + \log(-x) + 1 & \text{se } x < 0 \\ 3 + \log(x) + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

cioè

$$g'(x) = \begin{cases} -2 + \log(-x) & \text{se } x < 0 \\ 4 + \log(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Studiamo a questo punto il limite sinistro e destro di  $f'(x)$  in  $x = 0$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \{-2 + \log(-x)\} = [-2 + \log(0^+)] = [-2 - \infty] = -\infty.$$

Quindi

$$g'_-(0) = -\infty.$$

Analogamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{4 + \log(x)\} = [4 + \log(0^+)] = [4 - \infty] = -\infty,$$

da cui

$$g'_+(0) = -\infty.$$

Pertanto, poiché

$$g'_-(0) = -\infty = g'_+(0),$$

ne segue che in  $x = 0$  la funzione  $g$  non è derivabile e presenta un punto a tangente verticale.

Riepilogando

- se  $\alpha \neq 1$ ,  $g$  non è continua, quindi neanche derivabile, in  $x = 0$ . In particolare,  $g$  presenta in  $x = 0$  una discontinuità eliminabile;
- se  $\alpha = 1$ ,  $g$  è continua in  $x = 0$  ma non è derivabile e presenta un punto a tangente verticale.

5) Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0, \\ \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Si discutano, al variare di  $\alpha$  e  $\beta$ , la continuità e la derivabilità di  $f$ .

**Svolgimento.**

Cominciamo con l'osservare che, fuori da  $x = 0$ , la funzione è continua e derivabile. Si tratta ora di studiare la continuità e la derivabilità in  $x = 0$ .

Per quanto riguarda la continuità, sappiamo che  $f$  risulta continua in  $x = 0$  se e solo se si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Anzitutto

$$f(0) = \alpha \cdot 0 + \beta = \beta$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x + \beta) = \beta.$$

Calcoliamo ora il limite destro di  $f$  in 0, vale a dire

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \left[0^+ \cdot e^{\frac{-1}{0^+}}\right] = \left[0^+ \cdot e^{-\infty}\right] = \left[0^+ \cdot 0^+\right] = 0.$$

Pertanto  $f$  risulta continua in  $x = 0$  se e solo se

$$\beta = 0.$$

Nel caso in cui  $\beta \neq 0$ ,  $f$  presenta in  $x = 0$  un punto di salto con salto

$$S = |\beta - 0| = |\beta|.$$

In tal caso  $f$  non può essere ovviamente derivabile in  $x = 0$  (in quanto non continua).

Per studiare l'eventuale derivabilità in  $x = 0$ , riscriviamo  $f$  continua, il che significa riscrivere  $f$  sostituendo a  $\beta$  il valore 0:

$$f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0, \\ \alpha x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Per studiare la derivabilità di  $f$  in  $x = 0$  calcoliamo, con le solite regole di derivazione, la derivata della funzione  $f$  (con l'intento di voler poi applicare il teorema del limite della derivata).

Cominciamo da

$$\alpha x.$$

Ovviamente si ha

$$(\alpha x)' = \alpha.$$

Consideriamo ora

$$x \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

Osservato che la derivata di  $-\frac{1}{x} = -x^{-1}$  è

$$(-x^{-1})' = - \cdot (-1)x^{-2} = \frac{1}{x^2},$$

risulta

$$\begin{aligned} \left(x \cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)' &= 1 \cdot e^{-\frac{1}{x}} + x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \\ &= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{x}{x^2}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Pertanto la derivata di  $f$  è

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \alpha & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Ricordiamo che  $f$  è derivabile in  $x = 0$  se e solo se

$$f'_-(0) = f'_+(0) \neq \infty.$$

Calcoliamo limite sinistro e destro della derivata.

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \alpha = \alpha.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left[ e^{-\frac{1}{0^+}} \cdot \left(1 + \frac{1}{0^+}\right) \right] = \\ &= [e^{-\infty} \cdot (1 + \infty)] = [0^+ \cdot (+\infty)],\end{aligned}$$

che è una forma indeterminata.

Cerchiamo di riscrivere il limite in altro modo, affinché compaia una forma indeterminata adatta per l'applicazione del teorema di De L'Hopital (ricordiamo, le forme indeterminate adatte al teorema di De L'Hopital sono  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$ ).

Possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} = \left[ \frac{+\infty}{e^{+\infty}} \right] = \left[ \frac{+\infty}{+\infty} \right].$$

Possiamo quindi applicare il teorema di De L'Hopital per risolvere il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \\ &= \left[ \frac{1}{e^{0^+}} \right] = \left[ \frac{1}{e^{+\infty}} \right] = \left[ \frac{1}{+\infty} \right] = 0.\end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$f'_-(0) = \alpha, \quad f'_+(0) = 0.$$

Ne segue che  $f$  è derivabile in  $x = 0$  se e solo se

$$\alpha = 0.$$

Se invece  $\alpha \neq 0$ , il punto  $x = 0$  è un punto angoloso per  $f$ .

6) Si studi la derivabilità in  $x = 0$  della funzione definita per  $x \in \mathbb{R}$  da

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

**Svolgimento.**

Studiamo la derivabilità di  $f$  in 0 utilizzando la definizione (cioè il limite del rapporto incrementale): pertanto, non è necessario controllare se la funzione è continua o meno in  $x = 0$  (tale verifica è necessaria quando si vuole applicare il teorema del limite della derivata).

Ricordiamo che  $f$  è derivabile in  $x = 0$  se e solo se

$$f'_-(0) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =: f'_+(0)$$

e il valore comune di tali limiti è finito.

Cominciamo a calcolare la derivata sinistra.

Osserviamo che

$$f(0+h) = f(h) = (\sin h)^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right), \quad f(0) = 0.$$

Si ha quindi

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(\sin h)^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(\sin h)^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}.$$

Calcoliamo quindi il limite. Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(\sin h)^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \left[ \frac{(0^-)^2 \sin(-\infty)}{0^-} \right]$$

Cerchiamo di gestire le forme indeterminate.

Anzitutto, ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

e cerchiamo di applicarlo nel nostro esercizio, moltiplicando e dividendo la frazione per il fattore infinitesimo  $h$ . Risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h \cdot \sin h \cdot \sin h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

La funzione  $\sin$  non ammette limite quando il suo argomento tende all'infinito; in particolare,

non esiste il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Tuttavia, la funzione

$$\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

è limitata tra  $-1$  e  $1$ .

Ne segue, per un corollario al teorema del confronto, che

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

in quanto si ha il prodotto di un fattore infinitesimo,  $h$ , e di un fattore limitato, vale a dire  $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ .

Quindi

$$f'_-(0) = 0.$$

In maniera analoga si trova immediatamente che

$$f'_+(0) = 0.$$

Pertanto la funzione  $f$  è derivabile in  $x = 0$  (quindi è anche continua in tale punto) e  $f'(0) = 0$ .