ESERCIZI SUI PUNTI DI DISCONTINUITÀ TRATTI DA TEMI D'ESAME

a cura di Michele Scaglia

FUNZIONI CONTINUE

Sia $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \mathrm{dom} f$.
Diciamo che f è **continua in x_0** se

(1) $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Deve cioè succedere che le ordinate dei punti sempre più vicini ad x_0, sia da sinistra sia da destra, tendano al medesimo valore, coincidente con il valore della funzione f nel punto x_0, vale a dire $f(x_0)$.

Diciamo che f è **discontinua** in x_0 se non è continua in x_0, vale a dire se risulta negata la condizione (1).
A seconda del tipo di negazione della (1) si definiscono 4 tipologie di punti di discontinuità per una funzione f.

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Sia $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathrm{dom} f$ (il che significa che esiste $f(x_0) \in \mathbb{R}$).
Classifichiamo i possibili tipi di discontinuità.

- Diciamo che x_0 è un **punto di salto** se esistono finiti limite sinistro e limite destro di f in x_0 ma sono divesrsi. In formule:
$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \ell \neq m.$$
In tale caso chiamiamo **salto** il numero reale positivo
$$|\ell - m|.$$
- Diciamo che x_0 è un **punto di discontinuità eliminabile** se esistono finiti e coincidenti limite sinistro e limite destro di f in x_0 ma sono diversi da $f(x_0)$. In formule:
$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{ma } \ell \neq f(x_0).$$
- Diciamo che x_0 è un **punto di infinito** se esistono sia limite sinistro sia limite destro di f in x_0 e almeno uno dei due vale ∞. In formule:
$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{e}$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty.$$

- Diciamo che x_0 è un **punto di discontinuità di seconda specie** se almeno uno tra limite sinistro e limite destro f in x_0 non esiste. In formule:

$$\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{oppure} \quad \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

ESERCIZI SVOLTI

1) **[T.E. 26/01/2009]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2\,(e^{x-1} - 1)} & \text{se } x \neq 1, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = 1$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità.

Svolgimento.

Affinché la funzione f risulti continua in $x = 1$ si deve avere

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1).$$

Anzitutto, per definizione di f, si ha immediatamente

$$f(1) = \alpha - 1.$$

Per quanto riguarda i due limiti (destro e sinistro in $x = 1$), essi vanno calcolati entrambi sulla funzione

$$\frac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2\,(e^{x-1} - 1)}.$$

Calcoliamo ad esempio

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2\,(e^{x-1} - 1)}.$$

Tale limite può essere riscritto, grazie al teorema di sostituzione. Infatti, posto

$$t = x - 1,$$

risulta ovviamente

$$t \to 0^-.$$

Pertanto il limite diviene

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{2\sin t + t^2}{2(e^t - 1)} = \lim_{t \to 0^-} \frac{2\sin t}{2(e^t - 1)} + \lim_{t \to 0^-} \frac{t^2}{2(e^t - 1)}.$$

Per i ben noti limiti notevoli otteniamo (moltiplicando e dividendo opportunamente per i fattori mancanti):

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{2t \cdot \sin t}{t \cdot t \cdot 2\frac{(e^t-1)}{t}} + \lim_{t\to 0^-} \frac{t^2}{t \cdot 2\frac{(e^t-1)}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{2t}{2t} + \lim_{t\to 0^-} t = 1 + 0 = 1.$$

Allo stesso modo, si trova che anche

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2\left(e^{x-1}-1\right)} = 1.$$

Pertanto f è continua in $x = 1$ se e solo se

$$\alpha - 1 = 1,$$

ossia, se e solo se

$$\alpha = 2.$$

Nel caso in cui $\alpha \neq 2$, la funzione f presenta in $x = 1$ un punto di discontinuità eliminabile (in quanto i due limiti sinistro e destro coincidono ma sono diversi dalla $f(1)$).

2) **[T.E. 09/01/2007]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \dfrac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2} & \text{se } x \neq 7 \text{ e } x \neq 8, \\ e^{-1} & \text{se } x = 7 \text{ o } x = 8. \end{cases}$$

Discutere la continuità di f nel suo dominio.

Svolgimento.

In questo esercizio dobbiamo indagare sulla natura di due eventuali punti discontinuità, $x = 7$ e $x = 8$. Infatti, al di fuori di tali punti, la funzione f è definita ed è continua in quanto somma, quoziente e composizione di funzioni continue.
Il dubbio resta solo attorno ai punti $x = 7$ e $x = 8$ nei quali, osserviamo, la funzione è definita; potrebbe però succedere che i limiti destro e sinistro attorno a tali punti siano tali da non rendere complessivamente continua la funzione f.

Cominciamo con $x = 7$.
Anzitutto osserviamo che, in base alla definizione di f, risulta

$$f(7) = e^{-1}.$$

Calcoliamo ora il

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}\left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}\right].$$

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t} = 1$$

(dimostrabile a partire dal limite notevole $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\tan y}{y} = 1$ effettuando il cambiamento di variabile $t = \tan y$), si ha

$$\lim_{x\to 7}\left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}\right] = \lim_{x\to 7}\left[\frac{1}{\frac{\arctan(x-7)}{(x-7)}} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}\right] =$$

$$= 1 + \frac{e^{-1}-1}{1} = e^{-1} = f(7).$$

Pertanto f è continua in $x = 7$.

Consideriamo ora il punto $x = 8$.

Anzitutto

$$f(8) = e^{-1}.$$

Valutiamo il limite

$$\lim_{x\to 8}\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}.$$

Risulta, ricordando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1,$$

$$\lim_{x\to 8}\left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}\right] = \left[\frac{1}{\arctan 1}\right] + \lim_{x\to 8}\frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{4}} + \lim_{x\to 8}\frac{e^{x-8}-1}{(x-8)(x-8)} = \frac{4}{\pi} + \lim_{x\to 8}\frac{1}{(x-8)},$$

da cui

$$\lim_{x\to 8^-}\left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)} + \frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}\right] = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{8^- - 8} = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

e
$$\lim_{x\to 8^+}\left[\frac{(x-7)}{\arctan(x-7)}+\frac{e^{x-8}-1}{(x-8)^2}\right]=\frac{4}{\pi}+\frac{1}{8^+-8}=\frac{4}{\pi}+\frac{1}{0^+}=+\infty.$$

Pertanto in $x=8$ la funzione f non è continua e presenta un punto di infinito.

3) **[T.E. 29/03/2010]**

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\left(x\cdot\log(2|x|)\right)+\dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|} & \text{se } x\neq 0 \text{ e } x\neq 1,\\ 1 & \text{se } x=0 \text{ o } x=1.\end{cases}$$

Discutere la continuità di f e classificare le eventuali discontinuità.

Svolgimento.

In questo esercizio cerchiamo di riscrivere la funzione $f(x)$ liberandoci dei valori assoluti.

Si ha
$$|x|=\begin{cases}-x & \text{se } x<0\\ x & \text{se } x>0\end{cases},\qquad |x-1|=\begin{cases}-(x-1) & \text{se } x<1\\ x-1 & \text{se } x>1\end{cases}.$$

Pertanto la funzione diviene

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\left(x\cdot\log(-2x)\right)+\dfrac{\sin(x-1)}{-(x-1)} & \text{se } x<0\\ 1 & \text{se } x=0\\ \arctan\left(x\cdot\log(2x)\right)+\dfrac{\sin(x-1)}{-(x-1)} & \text{se } 0<x<1\\ 1 & \text{se } x=1\\ \arctan\left(x\cdot\log(2x)\right)+\dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)} & \text{se } x>1\end{cases}.$$

Fuori da $x=0$ e $x=1$ la funzione è sicuramente continua.
Dobbiamo capire se risulti continua pure in $x=0$ e in $x=1$.

Cominciamo con $x=0$.
Ricordando il limite notevole

$$\lim_{y\to 0^+} y^{\alpha}\cdot(\log y)^{\beta}=0$$

(applicabile alla nostra questione in quanto, essendo $x\to 0^-$, risulta $y=(-2x)\to 0^+$), risulta, per il teorema di sostituzione,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left[\arctan\left(x\cdot\log(-2x)\right)+\frac{\sin(x-1)}{-(x-1)}\right]=\arctan(0)+\frac{\sin(-1)}{1}=\sin(-1).$$

Allo stesso modo,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\arctan\left(x\cdot\log(2x)\right) + \frac{\sin(x-1)}{-(x-1)}\right] = \arctan(0) + \frac{\sin(-1)}{1} = \sin(-1).$$

D'altra parte

$$f(0) = 0,$$

quindi $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

Consideriamo ora $x = 1$.
Per il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

combinato col teorema di sostituzione, si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \arctan\left(x\cdot\log(2x)\right) + \frac{\sin(x-1)}{-(x-1)} = \arctan(\log 2) - 1.$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left[\arctan\left(x\cdot\log(2x)\right) + \frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\right] = \arctan(\log 2) + 1.$$

Pertanto $x = 1$ è un punto di salto con salto

$$S = |\arctan(\log 2) - 1 - \arctan(\log 2) - 1| = 2.$$

4) **[T.E. 07/01/2003]**
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x-1} + \dfrac{7\arctan(x-2)}{(x-2)^2} & \text{se } x \neq 1 \text{ e } x \neq 2, \\ 7 & \text{se } x = 1 \text{ o } x = 2. \end{cases}$$

Discutere la continuità di f e classificare le eventuali discontinuità.

Svolgimento.

Nei punti $x \neq 1, 2$ la funzione f è sicuramente continua.
Bisogna soltanto stabilire se risulti continua pure nei punti $x = 1$ e $x = 2$.

Cominciamo a studiare il punto $x = 1$.

Partiamo ad esempio dal limite sinistro.

Risulta

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[\sin\frac{\pi}{x-1} + \frac{7\arctan(x-2)}{(x-2)^2}\right] = \sin\frac{\pi}{1^- - 1} + 7\arctan(-1^-) =$$

$$= \sin(-\infty) - 7\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Poiché non esiste il

$$\lim_{x\to -\infty} \sin x,$$

ne segue che il limite in questione non esiste (in quanto alla quantità limitata -ma non definibile- $\sin(-\infty)$ è addizionata una quantità finita, vale a dire $-\frac{7\pi}{4}$).
In maniera analoga si ottiene che pure il limite

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

non esiste.
Il punto $x = 1$ è pertanto un punto di discontinuità di seconda specie per f.

Analizziamo ora il punto $x = 2$.

Si ha, per definizione di f,

$$f(2) = 7.$$

Per quanto riguarda il limite di f, si ha, ricordando il già menzionato limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t} = 1,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left[\sin\frac{\pi}{x-1} + \frac{7\arctan(x-2)}{(x-2)^2}\right] = [\sin\pi] + 7\lim_{x\to 2^-}\frac{\arctan(x-2)}{(x-2)(x-2)} =$$

$$= 0 + 7\cdot\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} = 7\cdot\frac{1}{0^-} = -\infty.$$

In maniera analoga si prova che

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty.$$

Pertanto la funzione f presenta, in $x = 2$, un punto di infinito.

5) Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2[(x-2)\pi] + \alpha & \text{se } x \leq 3 \\ \dfrac{\sin(3-x)}{\log(x-2)} + e^{-\frac{1}{x-3}} & \text{se } x > 3 \end{cases}.$$

risulta continua in $\mathbb{R}$.

Svolgimento.

Cominciamo col calcolare il limite destro di f per $x \to 3$.

Si ha

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \left[\frac{\sin(3-x)}{\log(x-2)} + e^{-\frac{1}{x-3}}\right] = \left[\frac{\sin(0^-)}{\log(1^+)} + e^{-\frac{1}{0^+}}\right] =$$

$$= \left[\frac{0^-}{0^+} + e^{-\infty}\right] = \left[\frac{0}{0} + 0\right].$$

Il limite presenta la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$, che cercheremo di risolvere applicando i limiti notevoli.

Per quanto riguarda il sin, faremo riferimento al limite notevole

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

combinato col teorema di sostituzione.

Quanto invece al termine $\log(x-2)$ si ha che esso tende a $\log(1)$ quando x tende a 3.

Come già detto più volte a lezione, questo fatto ci suggerisce di far riferimento al limite notevole

$$\lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

Cerchiamo quindi di scrivere l'argomento del log nella forma

$$1 + y,$$

con $y \to 0$.

Si ha

$$\log(x-2) = \log(x-2-1+1) = \log\left[1 + (x-3)\right],$$

essendo $y = x - 3 \to 0$ quando $x \to 3$.
Pertanto moltiplicheremo e divideremo per $(x-3)$.

Si giunge a

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left\{ \frac{(3-x)\cdot \sin(3-x)}{(3-x)\cdot(x-3)\cdot \dfrac{\log[1+(x-3)]}{(x-3)}} + e^{-\frac{1}{x-3}} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \left[\frac{3-x}{x-3} + e^{-\frac{1}{x-3}} \right] = \lim_{x\to 3^+} \left[-1 + e^{-\frac{1}{x-3}} \right] = -1 + e^{-\infty} = -1.$$

D'altra parte si ha

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \left\{ \cos^2[(x-2)\pi] + \alpha \right\} = \cos^2\pi + \alpha = (-1)^2 + \alpha = 1 + \alpha.$$

Affinché f risulti continua in $x = 3$ si deve avere

$$-1 = 1 + \alpha,$$

da cui

$$\alpha = -2.$$

Se invece $\alpha \neq -2$, in $x = 3$ si ha un punto di salto, in quanto i due limiti sono entrambi finiti ma di valore diverso.
In particolare, fissato $\alpha \neq -2$, il salto di f in $x_0 = 3$ vale

$$S = |-1-(1+\alpha)| = |-2-\alpha| = |2+\alpha|.$$

6) **[T.E. 26/11/2007]**
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-6)}{(x-6)} + \dfrac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7} & \text{se } x \neq 7, \quad x \neq 6, \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 7 \text{ o } x = 6. \end{cases}$$

Determinare e classificare eventuali punti di discontinuità per f.

Svolgimento.

Cominciamo col punto $x = 6$.
Si ha, in base alla definizione di f,

$$f(6) = \frac{1}{2}.$$

Dobbiamo ora valutare i limiti destro e sinistro di f in $x = 6$.
In realtà, tali limiti risultano coincidenti.
Si ha, ricordando il limite notevole

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

$$\lim_{x \to 6} f(x) = \lim_{x \to 6} \left\{ \frac{\sin(x-6)}{(x-6)} + \frac{\left[1 + (x-7)^2\right]^{1/(x-7)^2}}{x-7} \right\} = \left[1 + \frac{(1 + (-1)^2)^{1/(-1)^2}}{-1} \right] =$$

$$= [1 - 2] = -1.$$

Pertanto, in $x = 6$ la funzione f presenta un punto di discontinuità eliminabile (in quanto limite destro e sinistro coincidono e sono finiti ma sono diversi dal valore che f assume in $x = 6$).

Consideriamo ora il punto $x = 7$.

Anche in questo caso risulta

$$f(7) = \frac{1}{2}.$$

Valutiamo quindi il limite

$$\lim_{x \to 7} \left[\frac{\sin(x-6)}{(x-6)} + \frac{\left[1 + (x-7)^2\right]^{1/(x-7)^2}}{x-7} \right].$$

Si ha banalmente

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sin(x-6)}{(x-6)} = \sin 1.$$

Calcoliamo il limite del secondo addendo:

$$\lim_{x \to 7} \frac{\left[1 + (x-7)^2\right]^{1/(x-7)^2}}{x-7}.$$

Passando al limite, ci accorgiamo di ottenere la forma

$$\frac{(1)^{+\infty}}{0}.$$

Sappiamo già che la forma indeterminata 1^∞ suggerisce di far riferimento al limite notevole

$$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Effettivamente, nel nostro caso, il limite è proprio della forma precedente, essendo

$$y = (x-7)^2 \to 0.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 7} \left[1+(x-7)^2\right]^{1/(x-7)^2} = e.$$

Di conseguenza si trova immediatamente

$$\lim_{x\to 7^-} \frac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7} = \left[\frac{e}{0^-}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 7^+} \frac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7} = \left[\frac{e}{0^-}\right] = +\infty.$$

Quindi, per il teorema sul limite di una somma di funzioni, si ha

$$\lim_{x\to 7^-} \left[\frac{\sin(x-6)}{(x-6)} + \frac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7}\right] = [\sin(1) - \infty] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 7^+} \left[\frac{\sin(x-6)}{(x-6)} + \frac{[1+(x-7)^2]^{1/(x-7)^2}}{x-7}\right] = [\sin(1) + \infty] = +\infty$$

Pertanto, la funzione f è discontinua in $x = 7$ e $x = 7$ è un punto di infinito (infatti, entrambi i limiti esistono e almeno uno di essi è infinito.).

7) **[T.E. 29/06/2009]**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|^\gamma \left[\sin \dfrac{1}{x-1} + 2\right] & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Studiare al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ la continuità della funzione f in tutto $\mathbb{R}$, classificando eventuali punti di discontinuità.

Svolgimento.

Osserviamo che la funzione f è definita su tutto l'asse reale: infatti, l'unico problema per la funzione che compare nella prima riga è $x = 1$ (in cui non è definita); la funzione assegnata, tuttavia, è definita pure in $x = 1$ e in tale punto assume il valore 0.
La nostra discussione ruoterà attorno al punto $x = 1$: dobbiamo stabilire per quali valori del parametro reale γ (se ce ne sono) la funzione f è continua in $x = 1$ e, per i rimanenti valori di γ, calssificare eventuali discontinuità.

Fuori da $x = 1$, invece, la funzione è sicuramente continua perché composizione, somma, quoziente e prodotto di funzioni ivi continue.
Calcoliamo quindi il limite

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} |x-1|^\gamma \left[\sin\frac{1}{x-1} + 2\right].$$

Osserviamo che, sia per $x \to 1^-$, sia per $x \to 1^+$, risulta

$$|x-1|^\gamma \to (0^+)^\gamma.$$

Per quanto riguarda il fattore in parentesi quadra, esso non ammette limite. Infatti risulta

$$\lim_{x\to 1} \left[\sin\frac{1}{x-1} + 2\right] = [\sin(\infty) + 2],$$

valore indeterminabile, in quanto, come è ben noto, la funzione sin è oscillante e assume valori compresi tra -1 e 1 ma non siamo in grado di stabilire a che angolo corrisponda ∞.
La parentesi quadra non ammette quindi limite, ma possiamo affermare con certezza che tenda ad una quantità limitata, in particolare una quantità appartenente all'intervallo

$$[1, 3],$$

visto che il valore minimo che può assumere la funzione sin è -1, mentre il valore massimo è 1.
A questo punto bisogna stabilire, al variare di γ, il risultato globale del limite. Abbiamo già osservato che compare la potenza $\gamma-$ esima di (0^+).
Come già visto a lezione, analizziamo dapprima il caso in cui la potenza ha esponente nullo (ancor prima di pasare al limite).
Per $\gamma = 0$, poiché $x \neq 1$, quindi $(x-1) \neq 0$, si ha

$$|x-1|^\gamma = |x-1|^0 = 1;$$

pertanto la funzione f diviene

$$f(x) = \begin{cases} \left[\sin\frac{1}{x-1} + 2\right] & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Di conseguenza, calcolando

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left[\sin\frac{1}{x-1} + 2\right],$$

constatiamo, grazie all'osservazione precedente, che tale limite non esiste.
Pertanto, per $\gamma = 0$, la funzione f presenta in $x = 1$ una discontinuità di seconda specie.

Sia ora $\gamma \neq 0$: la funzione f assume la forma originaria

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|^{\gamma} \left[\sin \dfrac{1}{x-1} + 2\right] & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}.$$

Poiché, nel calcolo del limite per x tendente a 1 troviamo, come primo fattore

$$0^{\gamma},$$

dobbiamo decidere, al variare di γ, il valore di tale potenza.

È noto che

- se $\gamma > 0$, $(0^+)^{\gamma} \to 0^+$;
- se $\gamma < 0$, $(0^+)^{\gamma} \to +\infty$.

Pertanto:

- se $\gamma > 0$, risulta

  $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} |x-1|^{\gamma} \left[\sin \frac{1}{x-1} + 2\right] = 0,$$

  in quanto il prodotto tra una quantità infinitesima e una quantità limitata (la parentesi quadra) tende a 0.
  Pertanto, essendo i due limiti coincidenti e uguali al valore di f in $x = 1$, la funzione risulta continua in $x = 1$ per $\gamma > 0$;

- se $\gamma < 0$, risulta

  $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} |x-1|^{\gamma} \left[\sin \frac{1}{x-1} + 2\right] = +\infty,$$

  in quanto si ha il prodotto tra $+\infty$ e una quantità limitata il cui segno è sicuramente positivo (ricordiamo infatti che la quadra non ammette limite ma tende a una quantità limitata tra 1 e 3).
  Pertanto, per $\gamma < 0$, la funzione possiede in $x = 1$ un punto di infinito.

Riepilogando si hanno i seguenti casi:

- se $\gamma < 0$, $x = 1$ è un punto di infinito per f;
- se $\gamma = 0$, $x = 1$ è un punto di discontinuità di seconda specie per f;
- se $\gamma > 0$, f è continua in $x = 1$.

8) **[T.E. 29/01/2010]**

Siano $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin|x-1|)^\alpha}{7\log x} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Discutere la continuità di f in $x = 1$ al variare di α e classificare eventuali discontinuità.

Svolgimento.

La funzione f è definita per $x > 0$; non viene chiesto di studiare la continuità di f in un intorno destro di 0; infatti, la funzione non è definita in $x = 0$.

La funzione f è invece definita in $x = 1$. Ha quindi senso interrogarci circa la sua continuità/discontinuità.
Si ha, in base alla definizione di f,

$$f(1) = 0.$$

Per rendere il calcolo dei due limiti il più agile possibile, liberiamoci del valore assoluto.
Studiando il segno del valore assoluto si ha immediatamente

$$|x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < 1 \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Quindi la funzione f si può riscrivere come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin(1-x))^\alpha}{7\log x} & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{(\sin(x-1))^\alpha}{7\log x} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Cominciamo a calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sin(1-x))^\alpha}{7\log x}.$$

Il numeratore tende a

$$(0^+)^\alpha = 0,$$

in quanto $\alpha > 0$ (come indicato nella consegna dell'esercizio).

Il denominatore tende a

$$\log(1) = 0.$$

Il limite si presenta quindi nella forma indeterminata

$$\frac{0}{0},$$

che cercheremo di risolvere applicando i limiti notevoli.
Per quanto riguarda il numeratore, nel quale compare la funzione sin il cui argomento tende a 0, utilizzeremo il limite notevole

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

moltiplicando e dividendo la frazione per la quantità $y = (1 - x) \to 0$.

Il fattore $\log x$, invece, avendo argomento tendente a 1 andrà ricondotto al limite notevole

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1,$$

come già osservato più volte.
Cerchiamo quindi di scrivere l'argomento della funzione log come

$$1 + t,$$

con $t \to 0$ quando $x \to 1$.
Si ha

$$\log x = \log(x + 1 - 1) = \log[1 + (x - 1)].$$

La quantità $t = (x - 1)$ tende effettivamente a zero.
Moltiplicheremo e divideremo quindi per il fattore $(x - 1)$.

Fatte queste osservazioni, abbiamo

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{(\sin(1 - x))^\alpha}{7 \log x} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(\sin(1 - x))^\alpha}{7 \log[1 + (x - 1)]} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(\sin(1 - x))^\alpha \cdot (1 - x)^\alpha}{(1 - x)^\alpha \cdot 7 \cdot \dfrac{\log[1 + (x - 1)]}{(x - 1)} \cdot (x - 1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x)^\alpha}{7(x - 1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x)^\alpha}{-7(1 - x)}.$$

Dobbiamo quindi stabilire, al variare di $\alpha > 0$, il valore del limite

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{-7(1-x)}.$$

Si tratta nuovamente di una forma del tipo

$$\frac{0}{0},$$

ma, in questo caso, facilmente risolubile in quanto sia il numeratore sia il denominatore sono dei polinomi. Sarà quindi sufficiente confrontare le potenze.

- Se $\alpha = 1$, ancor prima di passare al limite si ha

$$\frac{(1-x)^\alpha}{-7(1-x)} = \frac{(1-x)^1}{-7(1-x)} = -\frac{1}{7},$$

  quindi

$$\lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{7} = -\frac{1}{7}.$$

- Se $\alpha > 1$ (ossia lo zero a numeratore ha maggior grado dello zero a denominatore), il limite risulta 0.
- Se $\alpha < 1$, invece, il limite tende a

$$-\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{0^+} = -\infty.$$

Riepilogando, si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ -\dfrac{1}{7} & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Studiamo ora il limite

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sin(x-1))^\alpha}{7\log x}.$$

Seguendo gli stessi ragionamenti del caso precedente abbiamo

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(\sin(x-1))^\alpha}{7\log x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sin(x-1))^\alpha}{7\log[1+(x-1)]} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sin(x-1))^\alpha \cdot (x-1)^\alpha}{(x-1)^\alpha \cdot 7 \cdot \dfrac{\log[1+(x-1)]}{(x-1)} \cdot (x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^\alpha}{7(x-1)}.$$

Discutendo come prima si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{7} & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} .$$

In definitiva, confrontando limite destro e sinistro di f in $x = 1$ e il valore $f(1)$, si hanno i seguenti casi:

- se $0 < \alpha < 1$, la funzione presenta in $x = 1$ un punto di infinito;
- se $\alpha = 1$ la funzione ha in $x = 1$ una discontinuità di tipo salto: infatti il limite sinistro vale $-\dfrac{1}{7}$ mentre il limite destro vale $+\dfrac{1}{7}$. Il salto è

$$S = \left| \frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{7} \right) \right| = \frac{2}{7};$$

- se $\alpha > 1$, la funzione è continua in $x = 1$. Infatti

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 = f(1).$$