ESERCIZI SUL CALCOLO DI INTEGRALI INDEFINITI E DEFINITI

a cura di Michele Scaglia

RICHIAMI TEORICI

INTEGRALE DEFINITO

Nelle lezioni di teoria è stato ampiamente trattato l'argomento riguardante l'integrazione definita secondo Riemann di funzioni reali limitate su intervalli limitati.
Se ne sono altresì osservati il significato geometrico e le applicazioni concrete.

In questi richiami essenziali, ricordiamo solamente che l'integrale definito di una funzione f su un intervallo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ è indicato con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

e ci limitiamo a ricordare che nel caso in cui la funzione f sia positiva, tale espressione sta a indicare il valore dell'area del trapezoide delimitato dal grafico di f, dall'asse x e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$.
Non spendiamo parole sulle interpretazioni geometriche nel caso in cui f sia negativa o di segno non costante.

Ma come calcolare il valore numerico di tale quantità?
Di notevole importanza, come si è visto, è il teorema Fondamentale del Calcolo Integrale che, tra i suoi corollari, ci indica una strada percorribile per il calcolo effettivo di un integrale definito.
Prima, però, ricordiamo cosa si intende per primitiva di una assegnata funzione f.

Data $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chiamiamo **primitiva di f in I** ogni funzione F derivabile in I e tale che

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Chiamiamo cioè primitiva di f ogni funzione la cui derivata prima sia uguale alla funzione $f(x)$.

Si dimostra che tutte le primitive di una assegnata funzione f differiscono per una costante additiva.
Ciò significa che, detta F una particolare primitiva di f, ogni funzione

$$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

è ancora una primitiva di f.

A questo punto richiamiamo l'enunciato del

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua.
Sia x_0 fissato in I e sia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

una sua funzione integrale.

Allora F è derivabile $\forall x \in I$ e si ha

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I,$$

ovvero ogni funzione integrale di f è una primitiva di f.

Attraverso questo teorema si dimostra un risultato di estrema importanza che viene utilizzato, come già anticipato, nel calcolo degli integrali definiti.

COROLLARIO
Sia f continua su $[a, b]$ e sia G una primitiva di f su $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

Il precedente corollario ci dice quindi come calcolare un integrale definito di una assegnata funzione f: è sufficiente procurarsi una qualunque primitiva G di f, valutarla agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ e calcolare lo scarto $G(b) - G(a)$.

In forza del teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (che afferma che una funzione integrale F per f è una primitiva per f), d'ora in poi indicheremo con F una generica primitiva di f.

Il vero problema dell'integrazione definita è rappresentato quindi dalla individuazione di una particolare primitiva F per la funzione f.

INTEGRALE INDEFINITO

Vista la questione iniziale che ha aperto la problematica del calcolo delle primitive di una assegnata funzione f, chiameremo **integrale indefinito** di f l'insieme di tutte le primitive di f, e lo indicheremo col simbolo

$$\int f(x)\, dx.$$

In formule

$$\int f(x)\, dx := \Big\{ F + c, \quad c \in \mathbb{R} : \quad F \text{ è una primitiva di } f \Big\}.$$

REGOLE DI INTEGRAZIONE

LINEARITÀ

Per ogni f, g integrabili e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, risulta

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

Cioè: l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare degli integrali delle singole funzioni.
In particolare, l'integrale di una somma è la somma degli integrali e le costanti moltiplicative possono essere portate fuori dal segno di integrale.

Osserviamo inoltre che l'integrale del prodotto di due o più funzioni **non** è il prodotto degli integrali delle singole funzioni.

INTEGRAZIONI IMMEDIATE

Per riuscire a calcolare un integrale indefinito è necessario individuare nell'integranda lo sviluppo della derivata di un'opportuna funzione F, da determinare, per l'appunto.

Una prima tecnica piuttosto rapida fa riferimento alla derivata delle funzioni composte.

Ricordiamo che la derivata prima della funzione composta

$$y = g(f(x))$$

è la funzione

$$y' = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Se pertanto si presentasse un integrale della forma

$$\int f'(x) g'(f(x))\, dx,$$

saremmo immediatamente in grado di calcolarlo, in quanto la primitiva di $f'(x) \cdot g'(f(x))$ è proprio la funzione $g(f(x))$. Sarà sufficiente integrare la funzione g'.
Pertanto

$$\int f'(x) \cdot g'(f(x))\, dx = g(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nella maggior parte dei casi non ci si trova immediatamente di fronte ad un'integranda già nella forma esatta

$$f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Risulta necessario, dopo avere individuato f, g', fare in modo che compaia anche il fattore f'.

Mostriamo un esempio.
Si calcoli

$$\int e^{-2x} \cdot \sqrt{e^{-2x}+3}\, dx.$$

L'integranda è data dal prodotto di due fattori.

Si potrebbe sperare che tale prodotto sia effettivamente lo sviluppo della derivata di una funzione composta $g(f(x))$.
Cerchiamo di individuare nell'integranda una funzione f "imprigionata" da una certa funzione g' e la derivata prima di f, vale a dire f': in tal modo, per quanto già osservato, saremmo immediatamente in grado di procurarci la primitiva integrando g'.
Riscriviamo l'integrale nel seguente modo:

$$\int e^{-2x} \cdot \left(e^{-2x}+3\right)^{1/2}\, dx.$$

La funzione f "imprigionata" è

$$f(x) = e^{-2x}+3$$

e la funzione g' che la "imprigiona" è

$$g'(f) = (f)^{1/2}.$$

Per poter procedere con l'integrazione dobbiamo controllare che nell'integranda compaia il fattore $f'(x)$.
Nel nostro caso si ha

$$f'(x) = \left(e^{-2x}+3\right)' = -2e^{-2x}.$$

Nell'integranda non compare esattamente tale fattore, bensì compare il fattore e^{-2x}. Per rendere l'integranda adatta all'integrazione immediata, è quindi necessario moltiplicare e dividere per il fattore -2 mancante e sfruttare la linearità dell'integrale:

$$\int e^{-2x} \cdot \left(e^{-2x}+3\right)^{1/2}\, dx = \int -\frac{1}{2} \cdot (-2)e^{-2x} \cdot \left(e^{-2x}+3\right)^{1/2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (-2)e^{-2x}\left(e^{-2x}+3\right)^{1/2}\, dx.$$

Ora abbiamo tutti gli ingredienti necessari:

$$f'(x) = -2e^{-2x}, \quad g'(f(x)) = \left(e^{-2x}+3\right)^{1/2}.$$

Possiamo quindi integrare la funzione $g'(f) = f^{1/2}$ ottenendo:

$$-\frac{1}{2}\int(-2)e^{-2x}\left(e^{-2x}+3\right)^{1/2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{(e^{-2x}+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(e^{-2x}+3\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Un altro esempio.

Si calcoli

$$\int x^2 \cdot \sin(x^3-1)\,dx.$$

In questo caso si ha

$$f(x) = x^3 - 1, \qquad g'(f) = \sin f.$$

La funzione "imprigionata" è quindi $x^3 - 1$, la funzione g' che la imprigiona è il sin.
Poiché

$$f'(x) = (x^3-1)' = 3x^2,$$

è necessario moltiplicare e dividere per 3 l'integranda e sfruttare la linearità.
Risulta

$$\int x^2 \cdot \sin(x^3-1)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int 3x^2\cdot\sin(x^3-1)\,dx.$$

Possiamo a questo punto integrare la funzione g' che imprigiona la funzione f (della quale abbiamo ormai la derivata):

$$\int x^2\cdot\sin(x^3-1)\,dx = \frac{1}{3}\cdot(-\cos(x^3-1)) + c = -\frac{1}{3}\cos(x^3-1) + c.$$

Questi due esempi possono essere considerati come dei casi particolari di situazioni più generali affrontabili pensando sempre alla derivata di una funzione composta.

In particolare, per i discorsi appena fatti, è facile convincersi della validità delle formule che seguono:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c, \qquad \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \arctan[f(x)] + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin[f(x)] + c, \qquad \int f'(x)\cdot[f(x)]^\alpha\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int f'(x)\sin[f(x)]'\,dx = -\cos[f(x)] + c \qquad \int f'(x)\cos[f(x)]\,dx = \sin[f(x)] + c,$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c, \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\,dx = \tan[f(x)] + c, \ldots$$

Esempio.

Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{e^{4x}}{1+e^{4x}}\,dx.$$

Osserviamo che la funzione è data dal quoziente di due termini. In questi casi si deve prendere subito in considerazione l'eventualità che l'integranda sia proprio lo sviluppo della derivata del log di una certa funzione f.
Detta quindi

$$f(x) = 1 + e^{4x},$$

controlliamo se a numeratore compare la sua derivata prima, vale a dire

$$f'(x) = (1+e^{4x})' = 4\cdot e^{4x}.$$

È necessario moltiplicare e dividere per la costante moltiplicativa 4. Risulta

$$\int \frac{e^{4x}}{1+e^{4x}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4\cdot e^{4x}}{1+e^{4x}}\,dx = \frac{1}{4}\log|1+e^{4x}| + c$$

in quanto, grazie alla moltiplicazione per 4, abbiamo reso l'integrale della forma

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

Un altro esempio.

Si calcoli

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx.$$

Anche in questo caso, per prima cosa, cerchiamo di capire se l'iintegrale possa essere scritto nella forma

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx.$$

Detta

$$f(x) = 1 + e^{4x},$$

risulta

$$f'(x) = 4 \cdot e^{4x}.$$

In questo caso non si riesce ad ottenere al numeratore la derivata del denominatore f, in quanto non si può modificare l'argomento dell'esponenziale.
D'altra parte, come abbiamo osservato a lezione, quando si è in presenza di un'integranda frazionaria, è possibile cercare di ricondursi alla derivata dell'arctan di un'opportuna $f(x)$, cercare di scrivere cioè l'integrale nella forma

$$\int \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}\, dx.$$

In effetti, in questo esercizio, ciò è possibile. Innanzitutto riscriviamo

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}}\, dx = \int \frac{e^{2x}}{1 + (e^{2x})^2}\, dx.$$

Il denominatore è proprio del tipo

$$1 + f^2(x),$$

essendo

$$f(x) = e^{2x}.$$

Poiché

$$f'(x) = (e^{2x})' = 2 \cdot e^{2x},$$

è sufficiente in questo caso moltiplicare e dividere il numeratore per la costante 2.
Si ha quindi

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + (e^{2x})^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot e^{2x}}{1 + (e^{2x})^2}\, dx.$$

Finalmente l'integrale è stato scritto nella forma

$$\int \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}\, dx.$$

Pertanto

$$\int \frac{e^{2x}}{1+(e^{2x})^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot e^{2x}}{1+(e^{2x})^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(e^{2x}) + c.$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Siano f e g due funzioni derivabili su I. Se $f'(x)g(x)$ è integrabile su I, allora lo è anche $f(x)g'(x)$ e

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Tale formula di integrazione la si usa solitamente quando l'integranda è data o da un'unica funzione non integrabile immediatamente o dal prodotto di due funzioni (spesso di specie diversa).

L'idea che sta alla base della regola è la seguente: individuare nel prodotto una funzione semplice da integrare ($f'(x)$) e una funzione da derivare $g(x)$, a patto di non ottenere a secondo membro della formula un integrale più intrattabile di quello di partenza.
Si può schematizzare la formula precedente con lo schema seguente:

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
g(x) & & f'(x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
g'(x) & \overset{\longleftarrow}{-\int\cdot} & f(x)
\end{array}$$

dal quale

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Esempio.

Si calcoli

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx.$$

L'integranda è data dal prodotto di due funzioni, x ed e^{2x}, ma tale prodotto non è interpretabile come la derivata di una funzione composta.

Le due funzioni, inoltre, sono di specie diverse.

Seguiamo la tecnica di integrazione per parti.
Dobbiamo capire chi siano $f'(x)$ (vale a dire la funzione da integrare) e $g(x)$ (vale a dire la funzione da derivare), avendo come obiettivo principale quello di ottenere a secondo membro un integrale più semplice.
Poiché siamo in grado di integrare e^{2x}, ci conviene integrare tale fattore e derivare x (abbassando così la difficoltà del nuovo integrale).

Nel nostro caso si ha quindi

$$f'(x) = e^{2x}, \qquad g(x) = x.$$

Calcoliamoci da parte

$$f(x) = \int e^{2x}\, dx.$$

Si tratta di un integrale immediato del tipo

$$\int h'(x) e^{h(x)}\, dx.$$

Si ha

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int 2 \cdot e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Siamo pronti per completare lo schema:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ x & & e^{2x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ 1 & \overleftarrow{-\int \cdot} & \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}$$

Si ha quindi

$$\int x \cdot e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \frac{1}{4}e^{2x} + c.$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Sia $\varphi(x)$, $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to J \subseteq \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I. Sia $f(y)$, $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su J e sia $F(y)$ una sua primitiva.
Allora la funzione $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ è integrabile su I e si ha

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c.$$

Utilizzeremo spesso questo tipo di integrazione, in particolare in quei casi in cui l'integranda non è facilmente riconducibile allo sviluppo della derivata di una funzione composta.
L'idea è di chiamare y (noi useremo la lettera t) un'opportuna funzione $\varphi(x)$ dell'integranda e, utlizzando la notazione di Leibniz per la derivata, ricavare dalla sostituzione

$$\varphi(x) = t,$$
$$\varphi'(x)\,dx = dt.$$

A questo punto, grazie alla formula, riscriveremo l'integrale originario come

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt.$$

Esempio.

Si calcoli

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\,dx.$$

L'integrale non è risolvibile in maniera immediata.

Conviene operare una sostituzione. In accordo con le notazioni del teorema, scegliamo

$$\varphi(x) = e^x.$$

Poniamo quindi

$$e^x = t.$$

Derivando alla Leibniz (spesso diremo, "differenziando") otteniamo

$$e^x\,dx = dt.$$

Possiamo riscrivere l'integrale nella nuova variabile t. Si ha

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{t}{t + 1}\,dt.$$

Si tratta ora di calcolare l'integrale

$$\int \frac{t}{t+1}\,dt.$$

Si ha facilmente (senza ricorrere alla divisione di polinomi, tecnica comunque sempre praticabile)

$$\int \frac{t}{t+1}\,dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\,dt = t - \log|t+1|.$$

Pertanto, tornando alla variabile x, otteniamo

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = e^x - \log|e^x+1| + c$$

L'integrazione per sostituzione può essere anche utilizzata per risolvere integrali immediati.

Ad esempio, l'integrale già risolto (con l'integrazione immediata)

$$\int e^{-2x} \cdot \sqrt{e^{-2x}+3}\,dx,$$

lo possiamo risolvere operando la sostituzione

$$\varphi(x) = e^{-2x} + 3 = t.$$

Differenziamo e otteniamo

$$-2e^{-2x}\,dx = dt,$$

da cui

$$e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\,dt.$$

Pertanto, per il teorema di sostituzione, possiamo scrivere

$$\int e^{-2x} \cdot \sqrt{e^{-2x}+3}\,dx = \int \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\,dt\right) = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int t^{1/2}\,dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{3} t^{3/2}.$$

Tornando a x troviamo

$$\int e^{-2x} \cdot \sqrt{e^{-2x}+3}\,dx = -\frac{1}{3}(e^{-2x}+3)^{3/2} + c,$$

lo stesso risultato ottenuto con l'integrazione immediata.

CONSIDERAZIONI SU SIMMETRIA DI f E DELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

Nel calcolo degli integrali definiti può essere comodo sfruttare alcuni risultati riguardanti l'integrazione di funzioni pari o dispari su intervalli simmetrici rispetto allo 0, vale a dire intervalli del tipo $[-a, a],\ a > 0$.
I risultati che esporremo sono facilmente dimostrabili sfruttando opportunamente il teorema di sostituzione e le proprietà dell'integrale definito.

FUNZIONI PARI

Sia $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione **pari**, vale a dire una funzione tale che

$$f(-x) = f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathrm{dom} f.$$

Allora, per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $[-a, a] \subseteq \mathrm{dom} f$, si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

Cioè, l'integrale di una funzione pari (vale a dire con grafico simmetrico rispetto all'asse y) su un intervallo simmetrico è pari al doppio dell'integrale della medesima f su una delle due metà dell'intervallo (ad esempio, la parte positiva $[0, a]$).
Ciò risulta vantaggioso: infatti, nel calcolo del valore nuemrico dell'integrale, la possibilità di valutare nell'estremo $x = 0$ può ridurre notevolmente i calcoli.

FUNZIONI DISPARI

Se, invece, $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ è **dispari**, cioè

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathrm{dom} f,$$

allora, per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $[-a, a] \subseteq \mathrm{dom} f$, risulta

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Senza dimostrare rigorosamente l'affermazione, ce ne si può comunque convincere facilmente ricordando che il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento. Pertanto, pensando al significato geometrico di integrale definito, si verrebbero a creare due aree uguali ma di segno opposto, quindi un integrale complessivamente nullo.

Esempio.

Si calcol l'integrale

$$\int_{-3}^{3} \big(|x| \log(x+4) + x^9 \arctan(x^2+3)\big)\ dx.$$

La simmetria dell'intervallo di integrazione, $[-3, 3]$, fa sperare in qualche semplificazione dei calcoli.

Anzitutto, sfruttando la linearità dell'integrale definito, si ha

$$\int_{-3}^{3} \big(|x| \log(x+4)\, dx + x^9 \arctan(x^2+3)\big)\ dx = \int_{-3}^{3} |x| \log(x+4)\, dx + \int_{-3}^{3} x^9 \arctan(x^2+3)\, dx.$$

Poiché la funzione

$$g(x) = x^9 \arctan(x^2+3)$$

è dispari, in quanto

$$g(-x) = (-x)^9 \arctan((-x)^2+3) = -x^9 \arctan(x^2+3) = -g(x),$$

ne segue, per i risultati esposti, che

$$\int_{-3}^{3} x^9 \arctan(x^2+3)\, dx = 0.$$

Pertanto non dobbiamo calcolare tale contributo per l'integrale finale.

L'integrale di partenza diviene

$$\int_{-3}^{3} \big(|x| \log(x+4) + x^9 \arctan(x^2+3)\big)\ dx = \int_{-3}^{3} |x| \log(x+4)\, dx.$$

Quest'ultimo integrale, invece, va calcolato.
Infatti, la funzione

$$|x| \log(x+4)$$

non presenta particolari simmetrie (essendo definita per $x > -4$).
Per calcolare il valore dell'integrale è anzitutto opportuno liberarsi del valore assoluto.
Poiché

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

si ha

$$f(x) = \begin{cases} -x\log(x+4) & \text{se } -3 \le x < 0 \\ x\log(x+4) & \text{se } 0 \le x \le 3 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\int_{-3}^{3} |x|\log(x+4)\,dx = \int_{-3}^{0} -x\log(x+4)\,dx + \int_{0}^{3} x\log(x+4)\,dx =$$

$$= -\int_{-3}^{0} x\log(x+4)\,dx + \int_{0}^{3} x\log(x+4)\,dx.$$

Dobbiamo anzitutto procurarci una primitiva di $x\log(x+4)$.
Calcoliamo quindi

$$\int x\log(x+4)\,dx.$$

Tale integrale indefinito lo risolviamo applicando la formula di integrazione per parti.
Deriviamo $\log(x+4)$ e integriamo x.
Si ha

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ \log(x+4) & & x \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ \dfrac{1}{x+4} & \overleftarrow{-\int\cdot} & \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

Per la formula d'integrazione per parti, l'integrale diviene

$$\int x\log(x+4)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x+4) - \int \frac{1}{x+4}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log(x+4) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+4}\,dx.$$

Risolviamo l'integrale in rosso. Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta in cui il numeratore ha maggior grado del denominatore. Eseguiamo anzitutto la divisione di polinomi tra numeratore e denominatore.
Risulta

$$
\begin{array}{ccc|cc}
x^2 & & & x & +4 \\
\hline
-x^2 & -4x & & x & -4 \\
 & -4x & & & \\
 & 4x & +16 & & \\
 & & +16 & &
\end{array}
$$

L'integrale indefinito diviene

$$\int \left(x - 4 + \frac{16}{x+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 16 \log|x+4| + c.$$

Quindi

$$\int x \log(x+4)\, dx = \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 16 \log(x+4) \right) + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{4} x^2 + 2x - 8 \log(x+4) + c.$$

Tornando all'integrale definito, abbiamo

$$\int_{-3}^{3} f(x)\, dx = -\left[\frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{4} x^2 + 2x - 8 \log(x+4) \right]_{-3}^{0} +$$

$$+ \left[\frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{4} x^2 + 2x - 8 \log(x+4) \right]_{0}^{3} =$$

$$= -\left(-8 \log 4 - \left(\frac{9}{2} \log(1) - \frac{9}{4} - 6 - 8 \log 1 \right) \right) + \frac{9}{2} \log 7 - \frac{9}{4} + 6 - 8 \log 7 - (-8 \log 4) =$$

$$= 16 \log 4 - \frac{9}{2} - \frac{7}{2} \log 7.$$

ESERCIZI SVOLTI DI VARIO TIPO

1) Si calcoli l'integrale

$$\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\,\sin(2x)\,dx.$$

Svolgimento.

Ricordiamo la formula di duplicazione

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x.$$

Riscriviamo quindi l'integrale come

$$\int \sqrt{1+5\cos^2 x} \cdot (2\sin x \cdot \cos x)\,dx = 2\int \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{1+5\cos^2 x}\,dx.$$

Conviene procedere con una sostituzione.
Poniamo

$$\cos x = t.$$

Senza esplicitare x in funzione di t, differenziamo immediatamente la precedente uguaglianza.
Si ha

$$(\cos x)'\,dx = (t)'\,dt,$$

cioè

$$-\sin x\,dx = dt,$$

da cui

$$\sin x\,dx = -dt.$$

Pertanto l'integrale nella nuova variabile t diviene

$$2\int \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{1+5\cos^2 x}\,dx = 2\int t\sqrt{1+5t^2}(-dt) =$$

$$= -2\int t\sqrt{1+5t^2}\,dt.$$

L'ultimo è un integrale immediato, risolvibile ricordando lo sviluppo della derivata della funzione composta.
Poiché data

$$y = g(f(t))$$

risulta

$$y' = g'(f(t)) \cdot f'(t),$$

cerchiamo di individuare un prodotto di questo tipo nell'integrando precedente.

Si ha

$$f(t) = 1 + 5t^2, \quad g'(f) = \sqrt{f}.$$

Poiché

$$f'(t) = 10t,$$

occorre moltiplicare e dividere per 10 l'integrando. Si ha

$$-2 \int t\sqrt{1+5t^2}\, dt = -2 \int \frac{1}{10} \cdot 10t\sqrt{1+5t^2}\, dt = -\frac{2}{10} \int 10t \cdot \left(1+5t^2\right)^{1/2}\, dt.$$

Possiamo quindi integrare la funzione g' ottenendo:

$$-2 \int t\sqrt{1+5t^2}\, dt = -\frac{1}{5} \frac{(1+5t^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{2}{15}(1+5t^2)^{3/2} = -\frac{2}{15}\sqrt{(1+5t^2)^3}.$$

Tornando alla variabile x si trova

$$\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\,\sin(2x)\, dx = -\frac{2}{15}\sqrt{(1+5\cos^2 x)^3} + c.$$

2) Si calcoli l'integrale

$$\int x \cdot (\arctan x)^2\, dx.$$

Svolgimento.

L'integranda è il prodotto di due funzioni di specie diversa non riconducibile in maniera ovvia allo sviluppo della derivata di una composta.

Conviene quindi procedere tramite un'integrazione per parti.

Deriviamo la funzione $(\arctan x)^2$ e integriamo la funzione x.
Otteniamo lo schema

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
(\arctan x)^2 & & x \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
2(\arctan x)\cdot\dfrac{1}{1+x^2} & -\overleftarrow{\int}\cdot & \dfrac{x^2}{2}
\end{array}
$$

L'integrale diviene quindi

$$\int x\cdot(\arctan x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx.$$

Risolviamo ora l'integrale in rosso applicando nuovamente la formula di integrazione per parti: deriviamo $\arctan x$ e integriamo $\dfrac{x^2}{x^2+1}$.
Si ha

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = (x-\arctan x).$$

Osserviamo che avremmo ottenuto lo stesso risultato effettuando la divisione di polinomi tra numeratore e denominatore della frazione. Pertanto, tornando all'integrale in rosso, si ha lo schema:

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
\arctan x & & \dfrac{x^2}{x^2+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
\dfrac{1}{1+x^2} & -\overleftarrow{\int}\cdot & (x-\arctan x)
\end{array}
$$

Pertanto

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx = (x-\arctan x)\arctan x - \int (x-\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2} =$$

$$= (x-\arctan x)\arctan x - \int\left(\frac{x}{1+x^2}-\arctan x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= (x - \arctan x) \arctan x - \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} - (\arctan x)^1 \cdot \frac{1}{1+x^2} \right) =$$

$$= (x - \arctan x) \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \frac{(\arctan x)^2}{2}.$$

Tornando all'integrale iniziale si ha

$$\int x \cdot (\arctan x)^2 \; dx = \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \left[(x - \arctan x) \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \frac{(\arctan x)^2}{2} \right] + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - (x - \arctan x) \arctan x + \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \frac{(\arctan x)^2}{2} + c$$

3) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_1^2 x \arctan \sqrt{x^2-1} \, dx.$$

Svolgimento.

Per calcolare il valore dell'integrale definito dobbiamo calcolare una qualunque primitiva F dell'integranda e valutare la quantità

$$F(2) - F(1).$$

Il problema principale consiste pertanto nella determinazione della primitiva, vale a dire nel calcolo dell'integrale indefinito

$$\int x \arctan \sqrt{x^2-1} \, dx.$$

Procediamo dapprima con una sostituzione.
Poniamo

$$\sqrt{x^2-1} = t.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$x^2 - 1 = t^2,$$

da cui
$$x^2 = t^2 + 1.$$

Senza esplicitare x rispetto a t, differenziamo la precedente uguaglianza:
$$(x^2)'\,dx = (t^2+1)'\,dt,$$

cioè
$$2x\,dx = 2t\,dt,$$

ossia
$$x\,dx = t\,dt.$$

Riscriviamo quindi l'integrale nella nuova variabile.
Risulta
$$\int x \arctan\sqrt{x^2-1}\,dx = \int t \arctan t\,dt.$$

Dobbiamo quindi calcolare
$$\int t \arctan t\,dt.$$

Procediamo integrando per parti. Si ha
$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ \arctan t & & t \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ \dfrac{1}{1+t^2} & \overleftarrow{-\int\cdot} & \dfrac{t^2}{2} \end{array}$$

da cui
$$\int t \arctan t\,dt = \frac{t^2}{2}\arctan t - \int \frac{t^2}{2(1+t^2)}\,dt = \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(1+t^2)}\,dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)}\,dt = \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\arctan t.$$

Tornando a x si ottiene (ricordando che $t = \sqrt{x^2 - 1}$)

$$\int x \arctan \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{x^2-1}{2} \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt{x^2-1} + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c.$$

Quindi una particolare primitiva è ad esempio (scegliendo $c = 0$)

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}.$$

Tornando ora all'integrale definito abbiamo

$$\int_1^2 x \arctan \sqrt{x^2-1}\, dx = F(2) - F(1) =$$

$$= \frac{4}{2} \arctan \sqrt{4-1} - \frac{1}{2}\sqrt{4-1} - \left(\frac{1}{2} \arctan \sqrt{1-1} - \frac{1}{2}\sqrt{1-1} \right) =$$

$$= 2 \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2} \arctan 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 + 0 = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4) Si trovi la primitiva F della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$$

tale che $F(1) = \log(3 - 2\sqrt{2})$.

Svolgimento.

Cominciamo col calcolare la generica primitiva di f, lasciando la costante additiva c di integrazione. Successivamente, imponendo la condizione dettata dal testo dell'esercizio, individueremo la primitiva cercata.

Calcoliamo quindi

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\, dt.$$

Procediamo con una sostituzione (dato che non ci si può ricondurre alla derivata di una composta).
Poniamo

$$t = \sqrt{x+1}.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$x + 1 = t^2,$$

da cui

$$x = t^2 - 1.$$

Differenziamo:

$$(x)'\,dx = (t^2 - 1)'\,dt,$$

cioè

$$dx = 2t\,dt.$$

Pertanto l'integrale diviene

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{1}{(t^2-1)\cdot t} \cdot 2t\,dt = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt.$$

Dobbiamo quindi calcolare

$$\int \frac{2}{t^2-1}\,dt.$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta il cui numeratore ha grado più basso del denominatore.
A numeratore non compare la derivata del denominatore, cioè $2t$, quindi procediamo con il metodo dei fratti semplici.

Scomponiamo in fattori il denominatore. Si ha

$$t^2 - 1 = (t-1)(t+1).$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}.$$

Si ottiene

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{At+A+Bt-B}{(t-1)(t+1)} =$$

$$= \frac{t(A+B)+A-B}{(t-1)(t+1)}.$$

Affinché la decomposizione della frazione nella somma di quelle due frazioni sia corretta deve necessariamente essere (per il principio di identità dei polinomi)

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A=-B \\ -2B=2 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Pertanto risulta

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}.$$

Quindi

$$\int \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \log|t-1| - \log|t+1|.$$

Ritornando a x e tenuto conto che $t = \sqrt{x+1}$, otteniamo la generica primitiva

$$F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = \log\left|\sqrt{x+1}-1\right| - \log\left|\sqrt{x+1}+1\right| + c = \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c.$$

Imponiamo ora la condizione:

$$F(1) = \log(3-2\sqrt{2}).$$

Si ha

$$\log\left|\frac{\sqrt{1+1}-1}{\sqrt{1+1}+1}\right| + c = \log(3-2\sqrt{2}),$$

ossia

$$\log\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|+c=\log(3-2\sqrt{2}).$$

Razionalizzando l'argomento del logaritmo otteniamo

$$\log\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right|+c=\log(3-2\sqrt{2}),$$

da cui

$$\log\left|\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}\right|+c=\log(3-2\sqrt{2}),$$

ossia

$$\log(3-2\sqrt{2})+c=\log(3-2\sqrt{2}),$$

che fornisce

$$c=0.$$

Pertanto la primitiva cercata è quella che corrisponde alla scelta di $c=0$, cioè

$$F(x)=\log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|.$$

5) Si calcoli

$$\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx.$$

Svolgimento.

Cominciamo col calcolare una particolare primitiva F mediante l'integrale indefinito

$$\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx.$$

Procediamo con una sostituzione. Poniamo

$$\tan x=t.$$

Ricaviamo (invertendo la funzione tan)

$$x=\arctan t.$$

Differenziando otteniamo

$$(x)'\,dx = (\arctan t)'\,dt,$$

cioè

$$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

L'integrale diviene

$$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx = \int \frac{1-t}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Dobbiamo quindi calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1-t}{(t+1)(t^2+1)}\,dt.$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore.

Decomponiamo attraverso la regola dei fratti semplici.
Il denominatore è già scomposto (e non si può ulteriormente scomporre in quanto la seconda tonda è la somma di due quadrati).

Bisogna trovare $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{-t+1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Si ha

$$\frac{-t+1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{At^2+A+Bt^2+Bt+Ct+C}{(t+1)(t^2+1)} =$$

$$= \frac{t^2(A+B)+t(B+C)+A+C}{(t+1)(t^2+1)}.$$

Si ha l'uguaglianza sperata se e solo se

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=-1 \\ A+C=1 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} A = -B \\ C = -B - 1 \\ -B - B - 1 = 1 \end{cases} ,$$

da cui

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases} .$$

Pertanto

$$\frac{-t+1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{t+1} + \frac{-t}{t^2+1}.$$

Ne segue che

$$\int \frac{-t+1}{(t+1)(t^2+1)}\, dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= \log|t+1| - \int \frac{t}{t^2+1}\, dt = \log|t+1| - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} =$$

$$= \log|t+1| - \frac{1}{2} \log|t^2+1| + c.$$

Risostituendo t con $\tan x$ otteniamo

$$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\, dx = \log|\tan x + 1| - \frac{1}{2} \log(\tan^2 x + 1) + c =$$

$$= \log|\tan x + 1| - \log(\tan^2 x + 1)^{1/2} + c = \log\left| \frac{\tan x + 1}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} \right| + c.$$

Scegliamo come primitiva particolare quella che corrisponde alla scelta $c = 0$:

$$F(x) = \log\left| \frac{\tan x + 1}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} \right|.$$

Quindi

$$\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\, dx = F\left(\frac{4}{3}\pi\right) - F(\pi) =$$

$$= \log\left| \frac{\tan\left(\frac{4}{3}\pi\right) + 1}{\sqrt{\tan^2\left(\frac{4}{3}\pi\right) + 1}} \right| - \log\left| \frac{\tan \pi + 1}{\sqrt{\tan^2 \pi + 1}} \right| =$$

$$= \log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right| - \log\left|\frac{0+1}{\sqrt{0}+1}\right| = \log\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \log 1 = \log\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

6) Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+1}\,dx.$$

Svolgimento.

La struttura dell'integranda suggerisce di operare una sostituzione
Poniamo

$$\sqrt[4]{x} = t.$$

Ricaviamo x in funzione di t e differenziamo.
Si ha

$$x = t^4,$$

da cui

$$dx = 4t^3\,dt.$$

Osservato che

$$\sqrt{x} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^2,$$

possiamo riscrivere l'integrale come segue:

$$\int \frac{4t^3}{2t^2-5t+2}\,dt.$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta, in cui il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore.
Effettuiamo quindi la divisione di polinomi.

$$\begin{array}{cccc|ccc}
4t^3 & & & & 2t^2 & -5t & +2 \\
\hline
-4t^3 & +10t^2 & -4t & & 2t & +5 & \\
 & +10t^2 & -4t & & & & \\
 & -10t^2 & +25t & -10 & & & \\
 & & +21t & -10 & & &
\end{array}$$

Ne segue che
$$\frac{4t^3}{2t^2-5t+2} = 2t+5+\frac{21t-10}{2t^2-5t+2}.$$

Pertanto possiamo scrivere
$$\int \frac{4t^3}{2t^2-5t+2}\,dt = \int \left(2t+5+\frac{21t-10}{2t^2-5t+2}\right)\,dt = t^2+5t+\int \frac{21t-10}{2t^2-5t+2}\,dt.$$

Risolviamo quindi
$$\int \frac{21t-10}{2t^2-5t+2}\,dt.$$

Si tratta di un integrale di una funzione razionale fratta in cui il numeratore ha grado minore del denominatore.
Controlliamo se il numeratore sia la derivata del denominatore (o facilmente riconducibile ad essa).
La derivata del denominatore è
$$4t-5,$$

non individuabile a numeratore.
Controlliamo se il denominatore è scomponibile in fattori: in tal caso potremmo applicare il metodo dei fratti
Proviamo a scomporre il polinomio di secondo grado che compare a denominatore.
Ricordiamo che, dato il polinomio
$$ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c\in\mathbb{R},$$

dette x_1 e x_2 le radici reali dell'equazione associata
$$ax^2+bx+c=0,$$

il polinomio si scompone in
$$a(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

Nel nostro caso, risolviamo
$$2t^2-5t+2=0.$$

Si ha
$$t_{1/2} = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} = \frac{5\pm 3}{4},$$

da cui
$$t_1=2, \quad t_2=\frac{1}{2}.$$

Pertanto, osservato che $a = 2$, risulta

$$2t^2 - 5t + 2 = 2 \cdot (t-2) \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) = (t-2) \cdot (2t-1).$$

Perciò

$$\frac{21t - 10}{2t^2 - 5t + 2} = \frac{21t - 10}{(t-2)(2t-1)}.$$

Cerchiamo quindi due numeri $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{21t - 10}{(t-2)(2t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{2t-1}.$$

Facendo i calcoli a secondo membro otteniamo

$$\frac{A(2t-1) + B(t-2)}{(t-2)(2t-1)} = \frac{2At - A + Bt - 2B}{(t-2)(2t-1)} = \frac{t(2A+B) - A - 2B}{(t-2)(2t-1)}.$$

Affinché l'ultima frazione coincida con

$$\frac{21t - 10}{(t-2)(2t-1)},$$

si deve avere (osservato che il denominatore già coincide), per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} 2A + B = 21 \\ -A - 2B = -10. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$B = 21 - 2A,$$

sostituendo nella seconda troviamo

$$-A - 42 + 4A = -10,$$

da cui

$$A = \frac{32}{3}.$$

Infine, tornando nella prima equazione,

$$B = 21 - \frac{64}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Quindi

$$\frac{21t - 10}{(t-2)(2t-1)} = \frac{\frac{32}{3}}{t-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{2t-1}.$$

Ne segue che

$$\int \frac{21t-10}{(t-2)(2t-1)}\,dt = \int \frac{\frac{32}{3}}{t-2}\,dt + \int \frac{-\frac{1}{3}}{2t-1}\,dt =$$

$$= \frac{32}{3}\int \frac{1}{t-2}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{2t-1}\,dt = \frac{32}{3}\log|t-2| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2}{2t-1}\,dt =$$

$$= \frac{32}{3}\log|t-2| - \frac{1}{6}\log|2t-1| + c.$$

Tornando all'integrale esteso, abbiamo

$$\int \frac{4t^3}{2t^2-5t+2}\,dt = \int \left(2t+5+\frac{21t-10}{2t^2-5t+2}\right)dt = t^2+5t+\frac{32}{3}\log|t-2| - \frac{1}{6}\log|2t-1| + c$$

Per concludere, torniamo alla variabile indipendente x ottenendo

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+1}\,dx = \sqrt{x}+5\sqrt[4]{x}+\frac{32}{3}\log\left|\sqrt[4]{x}-2\right| - \frac{1}{6}\log\left|2\sqrt[4]{x}-1\right| + c.$$

7) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^3-x)e^{|1-x^2|}\,dx.$$

Svolgimento.

Per prima cosa eliminiamo il valore assoluto studiando il segno del suo argomento.
Si ha

$$\text{argomento } \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-x^2 \geq 0,$$

da cui

$$x^2-1 \leq 0.$$

Risolvendo l'equazione associata si trovano le radici

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Pertanto l'argomento è positivo per

$$-1 \leq x \leq 1.$$

La funzione da integrare è pertanto

$$f(x) = \begin{cases} (x^3 - x)e^{1-x^2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ (x^3 - x)e^{x^2-1} & \text{se } x < -1 \quad \text{o} \quad x > 1 \end{cases}.$$

In particolare, pensando all'integrale definito da studiare, osservando che $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, si ha

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^3 - x)e^{|1-x^2|}\, dx = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} (x^3 - x)e^{(1-x^2)}\, dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} (x^3 - x)e^{(x^2-1)}\, dx.$$

Chiamiamo

$$I_1 := \int_{1/\sqrt{2}}^{1} (x^3 - x)e^{(1-x^2)}\, dx \quad \text{e} \quad I_2 := \int_{1}^{\sqrt{2}} (x^3 - x)e^{(x^2-1)}\, dx.$$

Per il calcolo di entrambi gli integrali, dobbiamo procurarci una primitiva di f.
Comiciamo a calcolare

$$\int (x^3 - x)e^{(1-x^2)}\, dx.$$

Ci conviene riscriverlo come

$$\int (x^3 - x)e^{(1-x^2)}\, dx = \int x(x^2 - 1)e^{1-x^2}\, dx = -\int x(1 - x^2)e^{1-x^2}\, dx.$$

Cominciamo a fare una sostituzione: poniamo

$$1 - x^2 = t,$$

da cui

$$-x^2 = t - 1,$$

ossia

$$x^2 = -t + 1.$$

Non esplicitiamo la x in funzione di t (anche se verrebbe spontaneo farlo guardando l'integranda, un cui fattore è proprio x). Differenziamo:

$$(x^2)'\, dx = (-t + 1)'\, dt,$$

che diviene

$$2x\, dx = -\, dt,$$

da cui

$$-x\, dx = \frac{1}{2}\, dt.$$

Riscriviamo l'integrale nella nuova variabile t. Otteniamo

$$-\int x(1-x^2)e^{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int te^t\,dt.$$

Quest'ultimo integrale lo risolviamo per parti.

Si ha

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ t & & e^t \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ 1 & \overleftarrow{-\int\cdot} & e^t \end{array},$$

da cui

$$\frac{1}{2}\int te^t\,dt = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t\,dt\right) = \frac{1}{2}e^t(t-1).$$

Quindi

$$\int (x^3-x)e^{(1-x^2)}\,dx = \frac{1}{2}e^{1-x^2}(1-x^2-1) = -\frac{1}{2}x^2e^{1-x^2} = F_1(x).$$

(abbiamo scelto $c=0$).
Quindi

$$I_1 = \int_{1/\sqrt{2}}^{1}(x^3-x)e^{(1-x^2)}\,dx = F_1(1) - F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}1e^{1-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{1/2}.$$

Calcoliamo ora I_2, partendo dal calcolo di una primitiva

$$\int (x^3-x)e^{(x^2-1)}\,dx = \int x(x^2-1)e^{x^2-1}\,dx.$$

Posto, come prima,

$$x^2-1=t,$$

si ha, differenziando,

$$2x\,dx = dt,$$

da cui

$$x\,dx = \frac{1}{2}\,dt.$$

L'integrale diviene

$$\int x(x^2-1)e^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int te^t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}e^t(t-1) = \frac{1}{2}e^{x^2-1}(x^2-1-1) = \frac{1}{2}e^{x^2-1}(x^2-2) + c.$$

Detta

$$F_2(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-1}(x^2-2),$$

si ha

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}}(x^3-x)e^{(x^2-1)}\,dx = F_2(\sqrt{2}) - F_2(1) = \frac{1}{2}e^{2-1}(2-2) - \frac{1}{2}e^{1-1}(1-2) = +\frac{1}{2}.$$

In definitiva l'integrale iniziale vale

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^3-x)e^{|1-x^2|}\,dx = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{1/2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}e^{1/2}.$$

8) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{\log^2 x \sin(\pi \log x)}{x\cos^3(\pi \log x)}\,dx.$$

Svolgimento.

Cominciamo col calcolo di

$$\int \frac{\log^2 x \sin(\pi \log x)}{x\cos^3(\pi \log x)}\,dx.$$

Poniamo

$$\log x = t,$$

da cui, differenziando,

$$(\log x)'\,dx = (t)'\,dt,$$

cioè

$$\frac{1}{x}\,dx = dt$$

(osserviamo che il fattore $\frac{1}{x}\,dx$ compare proprio nell'integranda).

Si ha quindi

$$\int \frac{\log^2 x \sin(\pi \log x)}{x \cos^3(\pi \log x)}\,dx = \int \frac{t^2 \sin(\pi t)}{\cos^3(\pi t)}\,dt.$$

Calcoliamo quindi

$$\int \frac{t^2 \sin(\pi t)}{\cos^3(\pi t)}\,dt.$$

Tale integrale lo risolviamo applicando la formula di integrazione per parti: deriviamo il fattore t^2 e integriamo il fattore $\frac{\sin(\pi t)}{\cos^3(\pi t)} = \sin(\pi t)(\cos(\pi t))^{-3}$, facilmente integrabile (ricorrendo alla derivata della funzione composta).

Calcoliamo quindi

$$\int \sin(\pi t)(\cos(\pi t))^{-3}\,dt.$$

L'integrale è della forma

$$\int f'(t)g'(f(t))\,dt.$$

Nel nostro caso

$$f(t) = \cos(\pi t), \qquad g'(f) = f^{-3}.$$

Poiché

$$f'(t) = (\cos(\pi t))' = -\pi \sin(\pi t),$$

occorre moltiplicare e dividere l'integranda per $-\pi$.
Pertanto

$$\int \sin(\pi t)(\cos(\pi t))^{-3}\,dt = -\frac{1}{\pi}\int (-\pi)\sin(\pi t)(\cos(\pi t))^{-3}\,dt =$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{(\cos(\pi t))^{-3+1}}{-3+1} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi t)}.$$

Possiamo ora completare lo schema dell'integrazione per parti ottenendo:

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
t^2 & & \dfrac{\sin(\pi t)}{\cos^3(\pi t)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \nwarrow & \\
2t & \overleftarrow{-\int\cdot} & \dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{\cos^2(\pi t)}
\end{array}
$$

L'integrale diviene quindi:

$$\int \frac{t^2\sin(\pi t)}{\cos^3(\pi t)}\,dt = \frac{t^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi t)} - \int 2t\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi t)} =$$

$$= \frac{t^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi t)} - \frac{1}{\pi}\int t\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi t)}.$$

Quest'ultimo integrale lo risolviamo nuovamente per parti, derivando t e integrando $\dfrac{1}{\cos^2(\pi t)}$. Si ha anzitutto

$$\int \frac{1}{\cos^2(\pi t)} = \frac{1}{\pi}\cdot\int \pi\frac{1}{\cos^2(\pi t)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\tan(\pi t).$$

(essendo l'integrale nella forma

$$\int f'(t)g'(f(t))\,dt,$$

con

$$f(t) = \pi t, \quad g'(f) = \frac{1}{\cos^2 f}.)$$

Lo schema dell'integrazione per parti è dunque

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
t & & \dfrac{1}{\cos^2(\pi t)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \nwarrow & \\
1 & \overleftarrow{-\int\cdot} & \dfrac{1}{\pi}\cdot\tan(\pi t)
\end{array}
$$

Ne segue che

$$\int t \cdot \frac{1}{\cos^2(\pi t)} = \frac{t}{\pi}\tan(\pi t) - \int \frac{1}{\pi}\tan(\pi t)\,dt =$$

$$= \frac{t}{\pi}\tan(\pi t) - \frac{1}{\pi}\int \frac{\sin(\pi t)}{\cos(\pi t)}\,dt = \frac{t}{\pi}\tan(\pi t) - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{\pi}\int \frac{-\pi\sin(\pi t)}{\cos(\pi t)}\,dt =$$

$$= \frac{t}{\pi}\tan(\pi t) + \frac{1}{\pi^2}\log|\cos(\pi t)|.$$

Pertanto

$$\int \frac{t^2\sin(\pi t)}{\cos^3(\pi t)}\,dt = \frac{t^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi t)} - \frac{1}{\pi}\int t\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi t)} =$$

$$= \frac{t^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi t)} - \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{t}{\pi}\tan(\pi t) + \frac{1}{\pi^2}\log|\cos(\pi t)|\right) =$$

$$= \frac{t^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi t)} - \frac{t}{\pi^2}\tan(\pi t) - \frac{1}{\pi^3}\log|\cos(\pi t)|.$$

Tornando a x, troviamo finalmente

$$\int \frac{\log^2 x\sin(\pi\log x)}{x\cos^3(\pi\log x)}\,dx =$$

$$= \frac{(\log x)^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2(\pi\log x)} - \frac{\log x}{\pi^2}\tan(\pi\log x) - \frac{1}{\pi^3}\log|\cos(\pi\log x)| + c.$$

Detta $F(x)$ la particolare primitiva con $c = 0$ e osservato che

$$\log\left(\sqrt[4]{e}\right) = \log\left(e^{1/4}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \log 1 = 0,$$

si ha

$$\int_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{\log^2 x\sin(\pi\log x)}{x\cos^3(\pi\log x)}\,dx = F\left(\sqrt[4]{e}\right) - F(1) =$$

$$= \frac{\frac{1}{16}}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\frac{1}{4}}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}\log\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| - \left(0 - 0 - \frac{1}{\pi^3}\log|\cos(0)|\right) =$$

$$= \frac{1}{32\pi}\cdot 2 - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}\log\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\pi^3}\log(1) = \frac{1}{16\pi} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}\log\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{8e^{-x} + 1}\, dx.$$

Svolgimento.

Calcoliamo dapprima

$$\int \frac{\sqrt{e^x - 1}}{8e^{-x} + 1}\, dx.$$

Conviene riscrivere come segue:

$$\frac{\sqrt{e^x - 1}}{8e^{-x} + 1} = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\dfrac{8}{e^x} + 1} = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\dfrac{8 + e^x}{e^x}} = \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{8 + e^x}.$$

Pertanto dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{8 + e^x}\, dx,$$

la cui funzione integranda suggerisce di effettuare una prima sostituzione

$$e^x = t.$$

Differenziando si trova

$$(e^x)'\, dx = (t)'\, dt,$$

cioè

$$e^x\, dx = dt.$$

Sostituendo si trova:

$$\int \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{8 + e^x}\, dx = \int \frac{\sqrt{t - 1}}{8 + t}\, dt.$$

Per risolvere l'integrale

$$\int \frac{\sqrt{t - 1}}{t + 8}\, dt$$

effettuiamo un'altra sostituzione; in particolare poniamo

$$\sqrt{t - 1} = y,$$

da cui

$$t - 1 = y^2,$$

ossia

$$t = y^2 + 1,$$

che, differenziata, dà

$$dt = 2y\, dy.$$

Si ha quindi

$$\int \frac{\sqrt{t-1}}{t+8}\, dt = \int \frac{y}{y^2+1+8} \cdot 2y\, dy = 2 \int \frac{y^2}{y^2+9}\, dy.$$

Il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore. Pertanto si dovrebbe procedere con la divisione di polinomi. Tuttavia, in questo caso, la decomposizione della frazione la si può effettuare aggiungendo e togliendo 9 al numeratore.

Risulta

$$2 \int \frac{y^2}{y^2+9}\, dy = 2 \int \frac{y^2+9-9}{y^2+9}\, dy = 2 \int \left(1 - \frac{9}{y^2+9}\right) dy = 2y - 18 \int \frac{1}{y^2+9}\, dy.$$

Calcoliamo da parte

$$\int \frac{1}{y^2+9}\, dy.$$

Osserviamo che il denominatore non è scomponibile in fattori (in quanto somma di due quantità positive di cui una è un numero).
Dobbiamo cercare quindi di ricondurci alla derivata dell'arctan f ricordando che

$$(\arctan f)' = \frac{f'}{1+f^2}.$$

Cominciamo a raccogliere 9 a denominatore per avere come primo addendo il numero 1. Si ha

$$\int \frac{1}{y^2+9}\, dy = \int \frac{1}{9 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{9}\right)}\, dy = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2}\, dy.$$

L'integrale è proprio del tipo

$$\int \frac{f'}{1+f^2},$$

essendo

$$f(y) = \frac{y}{3}.$$

Poiché

$$f'(y) = \left(\frac{y}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}\cdot y\right)' = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3},$$

dobbiamo moltiplicare e dividere l'integranda per il fattore $\frac{1}{3}$ per poter così integrare. Si ottiene

$$\int \frac{1}{y^2+9}\,dy = \frac{1}{9}\cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{y}{3}\right)^2}\,dy = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{y}{3}\right).$$

Tornando all'integrale otteniamo

$$2\int \frac{y^2}{y^2+9}\,dy = 2y - 18\int \frac{1}{y^2+9}\,dy =$$

$$= 2y - 18\cdot\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{y}{3}\right)\right) = 2y - 6\arctan\left(\frac{y}{3}\right).$$

Tornando a t e poi a x troviamo

$$\int \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{8+e^x}\,dx = 2\sqrt{e^x-1} - 6\arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{3}\right) + c.$$

Al solito, detta F la primitiva che corrisponde a $c = 0$, procediamo col calcolo di

$$F(\log 4) - F(0).$$

Si ha

$$\int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x-1}}{8e^{-x}+1}\,dx = F(\log 4) - F(0) =$$

$$= 2\sqrt{e^{\log 4}-1} - 6\arctan\left(\frac{\sqrt{e^{\log 4}-1}}{3}\right) - 2\sqrt{e^0-1} + 6\arctan\left(\frac{\sqrt{e^0-1}}{3}\right) =$$

$$= 2\sqrt{4-1} - 6\arctan\frac{\sqrt{4-1}}{3} - 0 + 6\arctan 0 =$$

$$= 2\sqrt{3} - 6\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} - 6\cdot\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} - \pi.$$

10) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_{\log\sqrt{2}}^{\log\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx.$$

Svolgimento.

Calcoliamo anzitutto l'integrale indefinito

$$\int \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx.$$

Vista la struttura dell'integranda, conviene partire con una sostituzione.
Poniamo

$$\sqrt{e^{2x}-1}=t.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$e^{2x}-1=t^2. \tag{1}$$

Differenziando otteniamo

$$2e^{2x}\,dx=2t\,dt,$$

cioè

$$e^{2x}\,dx=t\,dt.$$

Consideriamo nuovamente la (1) e ricaviamo x in funzione di t (in quanto nell'integranda c'è un fattore uguale a x).
Si ottiene

$$e^{2x}=t^2+1,$$

da cui (passando all'inversa dell'esponenziale, vale a dire il logaritmo)

$$2x=\log(t^2+1),$$

da cui

$$x=\frac{1}{2}\log(t^2+1).$$

Torniamo quindi all'integrale. Si ha

$$\int \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx=\int \frac{\frac{1}{2}\log(t^2+1)}{t}\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int \log(t^2+1)\,dt.$$

Calcoliamo pertanto l'integrale

$$\frac{1}{2}\int \log(t^2+1)\,dt.$$

Lo risolviamo utilizzando la formula d'integrazione per parti. In particolare deriviamo la funzione $\log(t^2+1)$ e integriamo la funzione 1.
Si ha

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ \log(t^2+1) & & 1 \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ & \nwarrow & \\ \dfrac{2t}{t^2+1} & \overleftarrow{-\int \cdot} & t \end{array}$$

Pertanto

$$\frac{1}{2}\int \log(t^2+1)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left(t\log(t^2+1) - \int \frac{2t}{t^2+1}\cdot t\,dt\right) = \frac{1}{2}t\log(t^2+1) - \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt.$$

Calcoliamo

$$\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt.$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta in cui il denominatore ha lo stesso grado del denominatore. In questi casi si cerca di riscrivere la frazione come somma di due contributi passando attraverso la divisione di polinomi tra numeratore e denominatore.
Si ha

$$\begin{array}{cc|cc} t^2 & & t^2 & +1 \\ \hline -t^2 & -1 & 1 & \\ & -1 & & \end{array}$$

Ne segue che

$$\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}.$$

Pertanto

$$\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = t - \arctan t.$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\int \log(t^2+1)\,dt = \frac{1}{2}t\log(t^2+1) - \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}t\log(t^2+1) - (t - \arctan t) =$$

$$= \frac{1}{2}t\log(t^2+1) - t + \arctan t.$$

Tornando alla variabile x si trova

$$\int \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x}-1}\cdot\log(e^{2x}-1+1) - \sqrt{e^{2x}-1} + \arctan\sqrt{e^{2x}-1} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x}-1}\cdot\log(e^{2x}) - \sqrt{e^{2x}-1} + \arctan\sqrt{e^{2x}-1} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x}-1}\cdot 2x - \sqrt{e^{2x}-1} + \arctan\sqrt{e^{2x}-1}.$$

Detta F una particolare primitiva (ad esempio quella corrispondente a $c = 0$) si ha

$$\int_{\log\sqrt{2}}^{\log\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = F(\log\sqrt{5}) - F(\log\sqrt{2}).$$

Osserviamo che

$$e^{2\log\sqrt{5}} = e^{\log(\sqrt{5})^2} = e^{\log 5} = 5.$$

In maniera analoga,

$$e^{2\log\sqrt{2}} = e^{\log(\sqrt{2})^2} = e^{\log 2} = 2.$$

Quindi

$$F(\log\sqrt{5}) - F(\log\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{5-1}\cdot 2\log\sqrt{5} - \sqrt{5-1} + \arctan\sqrt{5-1} -$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-1}\cdot 2\log\sqrt{2} - \sqrt{2-1} + \arctan 1\sqrt{2-1}\right) =$$

$$= 2\log\sqrt{5} - 2 + \arctan 2 - \log\sqrt{2} - 1 + \arctan 1 =$$

$$= \log\frac{5}{\sqrt{2}} - 3 + \arctan 2 + \frac{\pi}{4}.$$

11) Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

Svolgimento.

La funzione integranda è del tipo

$$f(x) = f(\cos x, \sin x).$$

Verrebbe spontanea una sostituzione di tipo trigonometrico. La più semplice che viene in mente è una delle due seguenti:

$$\cos x = t \qquad \text{oppure} \qquad \sin x = t.$$

Tuttavia una tale sostituzione complicherebbe la struttura dell'integranda.
Consideriamo ad esempio

$$\cos x = t.$$

Si ricava

$$x = \arccos t,$$

da cui

$$dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Inoltre, ricordando che la funzione cos è invertibile sull'intervallo $[0, \pi]$ (su cui la funzione sin è positiva) si ha:

$$\sin x = +\sqrt{1-\cos^2 x} = +\sqrt{1-t^2}.$$

Si ha quindi:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = -\int \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}+t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Quest'ultimo integrale in t è piuttosto complicato da trattare.
In modo analogo, la sostituzione

$$\sin x = t$$

porterebbe ad un integrale non calcolabile elementarmente.

In casi come questi (nei quali l'integranda è costituita dalla somma di termini in sin e cos di primo grado) può essere talvolta utile effettuare una sostituzione (sempre di tipo goniometrico) che faccia riferimento alle cosiddette formule parametriche razionali:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \text{essendo} \quad t = \tan\frac{x}{2}.$$

Sono formule valide per ogni $x \neq \pi + 2k\pi$ che consentono di esprimere il seno e il coseno di un angolo x tramite la tangente dell'angolo dimezzato $\frac{x}{2}$, vale a dire $\tan \frac{x}{2}$, espressa più sinteticamente con t.

L'idea è quella di applicare tali formule anche al nostro integrale, vale a dire

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}\, dx.$$

Poniamo

$$t = \tan \frac{x}{2}.$$

Invertendo la funzione tan otteniamo

$$\frac{x}{2} = \arctan t,$$

da cui

$$x = 2 \arctan t$$

che, differenziata, dà

$$dx = 2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

Già sappiamo esprimere $\sin x$ e $\cos x$ in funzione di t: si ha infatti

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Risulta quindi

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt =$$

$$= 2 \int \frac{1}{\frac{1 + t^2 + 2t + 1 - t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = 2 \int \frac{1+t^2}{2t+2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= 2 \int \frac{1}{2(t+1)}\, dt = \int \frac{1}{t+1}\, dt,$$

immediatamente risolvibile.
Infatti

$$\int \frac{1}{t+1}\, dt = \log |t+1|,$$

da cui

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\, dx = \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

12) Data la funzione $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x+1}{x(1+xe^x)},$$

se ne calcoli la primitiva F tale che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

Svolgimento.

Calcoleremo anzitutto la generica primitiva di f, vale a dire

$$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\, dx,$$

lasciando la generica costante additiva d'integrazione c.
Successivamente troveremo il paricolare valore di $c \in \mathbb{R}$ che ci fornirà la primitiva che obbedisce alla richiesta dettata dal testo.

Comiciamo quindi a calcolare l'integrale indefinito.
Conviene fare una sostituzione: poniamo

$$1 + xe^x = t. \tag{2}$$

Differenziamo. Si ha

$$(1 + xe^x)'\, dx = (t)'\, dt,$$

da cui

$$(e^x + xe^x)\, dx = dt,$$

vale a dire

$$e^x(1 + x)\, dx = dt.$$

Ci accorgiamo che il fattore $(1 + x)$ compare proprio nell'integranda. Manca però il fattore e^x: in questo caso moltiplichiamo e dividiamo l'integranda per il fattore mancante e^x (non nullo). Osserviamo che questa operazione è del tutto lecita, in quanto si sta moltiplicando e dividendo

per una quantità dipendente dalla variabile x all'interno del simbolo di integrale. Non sarebbe invece lecito moltiplicare all'interno dell'integrale e dividere all'esterno (ossia, come si è soliti dire, non è lecito portare fuori dall'integrale un fattore dipendente da x. È invece lecito farlo, grazie ai teoremi di linearità, con costanti moltiplicative, pertanto indipendenti da x).
Riscriviamo quindi l'integrale come

$$\int \frac{e^x \cdot (x+1)}{e^x \cdot x(1+xe^x)}\, dx.$$

Per poter ultimare la sostituzione è necessario sapere esprimere in funzione di t anche il nuovo fattore che compare a denominatore, vale a dire xe^x.
In realtà è possibile ricavare la sua espressione sfruttando nuovamente la (2): si ricava immediatamente

$$xe^x = t - 1.$$

Siamo pronti a riscrivere l'integrale nella nuova variabile t. Si ha

$$\int \frac{dt}{(t-1)t} = \int \frac{1}{t(t-1)}\, dt.$$

Quest'ultimo integrale lo risolviamo col metodo dei fratti (trattandosi di una razionale fratta il cui denominatore è già decomposto in fattori irriducibili).

Cerchiamo quindi $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1}.$$

Si deve avere

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{At - A + Bt}{t(t-1)} = \frac{t(A+B) - A}{t(t-1)}.$$

L'uguaglianza sussiste se e solo se

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Pertanto si ha

$$\int \frac{1}{t(t-1)}\, dt = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1} \right) dt = -\log|t| + \log|t-1| = \log\left|\frac{t-1}{t}\right|.$$

Quindi

$$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\,dx = \log\left|\frac{1+xe^x-1}{1+xe^x}\right| + c = \log\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right| + c.$$

Adesso dobbiamo individuare la particolare primitiva F tale che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

Calcoliamo quindi tale limite per la generica primitiva. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right| + c\right) = \left[\log\left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| + c\right].$$

D'altra parte sia a numeratore che a denominatore vi è lo stesso fattore che tende all'infinito, vale a dire xe^x.
Cioè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{xe^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{xe^x\cdot\left(1+\dfrac{1}{xe^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}} = 1.$$

Pertanto l'argomento del log tende a 1.
Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right| + c\right) = [\log 1 + c] = [0+c] = c.$$

Affinche valga l'uguaglianza richiesta si deve avere

$$c = 0.$$

Per ottenere la primitiva desiderata si deve quindi sostituire $c = 0$ nell'espressione della generica primitiva. Si trova

$$F(x) = \log\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right| = \log\left(\frac{xe^x}{xe^x+1}\right),$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la funzione f di cui si è cercata la primitiva è definita per $x > 0$, quindi numeratore e denominatore sono positivi.

13) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2(x+|x|)\,dx.$$

Svolgimento.

Si tratta di un integrale definito.

Per prima cosa spezziamo il valore assoluto, studiando il segno dell'argomento.

Si ha

$$\arg \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0.$$

Pertanto la funzione diviene

$$f(x) = \begin{cases} x \sin^2(x - x) & \text{se } x < 0 \\ x \sin^2(x + x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

cioè

$$f(x) = \begin{cases} x \sin^2(0) & \text{se } x < 0 \\ x \sin^2(2x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

ossia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x \sin^2(2x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Quindi, per quanto riguarda l'integrale definito di partenza, si ha

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2\left(x + |x|\right) \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0 \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2(2x) \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2(2x) \, dx.$$

Pertanto dobbiamo calcolare solo il secondo integrale.

Cominciamo a procurarci una primitiva di $x \sin^2(2x)$; calcoliamo cioè

$$\int x \sin^2(2x) \, dx.$$

Lo risolviamo applicando la formula di integrazione per parti, in quanto l'integranda è data dal prodotto di due funzioni di specie diverse e tale prodotto non è facilmente riconducibile allo sviluppo della derivata di una funzione composta.

Deriviamo x e integriamo $\sin^2(2x)$.
Calcoliamoci da parte

$$\int \sin^2(2x) \, dx.$$

Per risolvere questo integrale facciamo riferimento alle formule di bisezione della goniometria.

Ricordiamo che, per ogni angolo x, si ha

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Tali formule permettono di esprimere le funzioni goniometriche di un angolo dimezzato attraverso le funzioni goniometriche dell'angolo non dimezzato. O equivalentemente, permettono di scrivere le funzioni goniometriche di un angolo attraverso le funzioni goniometriche dell'angolo doppio.
In particolare, scriviamole per l'angolo x, pensando

$$x = \frac{2x}{2}.$$

Si ha

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}, \qquad \cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}.$$

In maniera analoga

$$\sin 2x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{2}}, \qquad \cos 2x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 4x}{2}}.$$

e così via... Sotto radice deve sempre comparire il doppio dell'angolo a primo membro dell'uguaglianza.

Tornando al nostro integrale, osserviamo che l'integranda è

$$\sin^2(2x).$$

Per le precedenti formule si ha

$$\sin^2(2x) = \left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{2}}\right)^2 = \frac{1-\cos 4x}{2}.$$

Pertanto si ha

$$\int \sin^2(2x)\,dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx.$$

Per quanto riguarda l'integrale

$$\int \cos 4x\,dx,$$

si tratta di un integrale immediato, ascrivibile alla forma

$$\int f'(x)g'(f(x))\,dx.$$

In effetti, detta

$$f(x) = 4x,$$

si ha

$$g'(f) = \cos f.$$

Manca la derivata prima di f. Poiché si ha

$$f'(x) = (4x)' = 4,$$

occorre moltiplicare e dividere per la costante moltiplicativa 4 ottenendo

$$\frac{1}{4} \cdot \int 4 \cdot \cos(4x)\,dx,$$

che è proprio un integrale della forma appena richiamata.

Risulta quindi (integrando la funzione $g' = \cos$)

$$\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin(4x).$$

Pertanto

$$\int \sin^2(2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sin(4x) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x).$$

Siamo pronti ad impostare lo schema dell'integrazione per parti per l'integrale originario

$$\int x\sin^2(2x)\,dx$$

Abbiamo

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
x & & \cos^2(2x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \nwarrow & \\
1 & -\overleftarrow{\int} \cdot & \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)
\end{array}
$$

L'integrale diviene quindi

$$\int x\sin^2(2x)\,dx = x\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)\right) - \int\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)\right)\,dx$$

$$= x\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)\right) - \frac{1}{2}\int x\,dx + \frac{1}{8}\int\sin(4x)\,dx =$$

$$= x\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)\right) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\int 4\cdot\sin(4x)\,dx =$$

$$= x\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)\right) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{32}\cos(4x) + c.$$

Detta F una particolare primitiva, ad esempio quella che corrisponde a $c = 0$, si ha

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2\left(x+|x|\right)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2(2x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) =$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}\sin(2\pi)\right) - \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{32}\cos(2\pi) - 0 + \frac{1}{32}\cos 0 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16}.$$

14) Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{e}} x^3\log\sqrt{e+x^2}\,dx.$$

Svolgimento.

Calcoliamo anzitutto la generica primitiva

$$\int x^3 \log \sqrt{e+x^2}\, dx.$$

Cominciamo con una sostituzione. Poniamo

$$\sqrt{e+x^2} = t.$$

Ricaviamo

$$e + x^2 = t^2,$$

cioè

$$x^2 = t^2 - e.$$

Differenziando otteniamo

$$(x^2)'\, dx = (t^2 - e)'\, dt,$$

da cui

$$2x\, dx = 2t\, dt,$$

cioè

$$x\, dx = t\, dt.$$

Osserviamo che l'integrale si puoò scrivere come

$$\int x^3 \log \sqrt{e+x^2}\, dx = \int x^2 \cdot x \log \sqrt{e+x^2}\, dx.$$

Pertanto possiamo procedere facilmente con la sostituzione in quanto conosciamo tutti i blocchi che costituiscono l'integranda:

$$x\, dx = t\, dt, \qquad \sqrt{e+x^2} = t, \qquad x^2 = t^2 - e.$$

Si ottiene quindi

$$\int (t^2 - e) \cdot t \log t\, dt = \int (t^3 - et) \log t\, dt.$$

Il calcolo di quest'ultimo integrale lo facciamo seguendo la regola di integrazione per parti.

Si ha

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
\log t & & (t^3 - et) \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
\dfrac{1}{t} & \overleftarrow{-\int \cdot} & \dfrac{t^4}{4} - e\dfrac{t^2}{2}
\end{array}.
$$

Risulta quindi

$$\int (t^3 - et) \log t \, dt = \log t \cdot \left(\frac{t^4}{4} - e\frac{t^2}{2} \right) - \int \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{t^4}{4} - e\frac{t^2}{2} \right) dt =$$

$$= \log t \cdot \left(\frac{t^4}{4} - e\frac{t^2}{2} \right) - \int \left(\frac{t^3}{4} - \frac{e}{2}t \right) dt = \log t \cdot \left(\frac{t^4}{4} - e\frac{t^2}{2} \right) - \frac{1}{16}t^4 + \frac{e}{4}t^2.$$

Tornando alla variabile x, otteniamo

$$\int x^3 \log \sqrt{e + x^2} \, dx = \log \sqrt{e + x^2} \cdot \left(\frac{(e + x^2)^2}{4} - e\frac{e + x^2}{2} \right) - \frac{1}{16}(e + x^2)^2 + \frac{e}{4}(e + x^2) + c$$

Come al solito, detta F la primitiva con $c = 0$, e osservato che $(\sqrt{e})^2 = e$, risulta

$$\int_0^{\sqrt{e}} x^3 \log \sqrt{e + x^2} \, dx = F\left(\sqrt{e}\right) - F(0) =$$

$$= \log \sqrt{e + e} \cdot \left(\frac{(e + e)^2}{4} - e\frac{2e}{2} \right) - \frac{1}{16}(e + e)^2 + \frac{e}{4}(e + e) -$$

$$+ \log \sqrt{e} \cdot \left(\frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{2} \right) + \frac{1}{16}e^2 - \frac{e^2}{4} =$$

$$= \log \sqrt{2e} \cdot \left(e^2 - e^2\right) - \frac{1}{4}e^2 + \frac{e^2}{2} - \log(e)^{1/2} \cdot \left(-\frac{e^2}{4} \right) - \frac{3}{16}e^2 =$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4} - \frac{3}{16}e^2 = \frac{3}{16}e^2.$$

15) **[T.E. 29/01/2010]**

Calcolare la primitiva $F(x)$ della funzione $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{e^{4x} - e^{6x}}$ tale che $F(0) = 1$.

Quindi calcolare $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

Svolgimento.

Calcoliamo la generica primitiva di f, vale a dire

$$\int \sqrt{e^{4x}-e^{6x}}\,dx.$$

Cominciamo col raccogliere il fattore e^{4x} sotto radice e trasportiamolo fuori dal simbolo di radice:

$$\int \sqrt{e^{4x}-e^{6x}}\,dx = \int \sqrt{e^{4x}\left(1-e^{2x}\right)}\,dx = \int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx.$$

L'integrale diviene pertanto

$$\int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx.$$

Tale integrale può essere risolto rapidamente riconducendoci alla derivata di una funzione composta oppure può essere risolto attraverso una sostituzione.

Proponiamo entrambi i metodi di svolgimento.

1° modo.

Cerchiamo di ricondurre l'integrale ad un integrale della forma

$$\int f'(x)g'(f(x))\,dx.$$

Nel nostro caso si ha

$$f(x)=1-e^{2x}, \qquad g'(f)=\sqrt{f}=(f)^{1/2}.$$

Poiché

$$f'(x)=(1-e^{2x})'=-2\cdot e^{2x},$$

occorre moltiplicare e dividere l'integranda per il fattore -2. Dopodiché si può integrare la funzione g'.
Si ha quindi

$$\int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int (-2)\cdot e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-e^{2x})^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-e^{2x})^{3/2}+c=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+c.$$

Secondo modo.

Risolviamo l'integrale

$$\int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$$

per sostituzione.

Poniamo

$$\sqrt{1-e^{2x}} = t.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$1-e^{2x} = t^2,$$

da cui

$$e^{2x} = -t^2+1.$$

Differenzaimo. Si ha

$$2e^{2x}\,dx = -2t\,dt,$$

cioè

$$e^{2x}\,dx = -t\,dt.$$

Riscriviamo quindi l'integrale nella nuova variabile t. Risulta

$$\int -t(t)\,dt = -\int t^2\,dt = -\frac{t^3}{3}.$$

Tornando a x si ha

$$\int e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + c,$$

stesso risultato ottenuto col metodo precedente.

A questo punto cerchiamo la primitiva F che verifica

$$F(0) = 1.$$

Imponiamo che la generica primitiva soddisfi alla precedente uguaglianza.

Si ha

$$-\frac{1}{3}\sqrt{((1-e^0)}+c=1,$$

cioè

$$-\frac{1}{3}\sqrt{1-1}+c=1,$$

da cui

$$c=1.$$

La primitiva cercata è pertanto

$$F(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+1.$$

Calcoliamo infine il limite

$$\lim_{x\to-\infty}F(x).$$

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+1=\left[-\frac{1}{3}\sqrt{1-e^{-\infty}}+1\right]=$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\sqrt{1-0}+1\right]=\left[-\frac{1}{3}+1\right]=\frac{2}{3}.$$

16) **[T.E. 11/01/2010]**
Calcolare l'integrale seguente

$$\int_{e^{-1/2}}^{1}7\frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\,dx.$$

Svolgimento.

Poiché

$$\int_{e^{-1/2}}^{1}7\frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\,dx=7\int_{e^{-1/2}}^{1}\frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\,dx,$$

calcoliamo la generica primitiva

$$\int\frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\,dx=\int\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{1/(1+\log x)}}{(1+\log x)^3}\,dx.$$

Effettuiamo una sostituzione.
Poniamo

$$1 + \log x = t.$$

Differenziamo direttamente (senza ricavare x):

$$(1 + \log x)'\, dx = (t)'\, dt,$$

da cui

$$\frac{1}{x}\, dx = dt.$$

Pertanto si ottiene

$$\int \frac{e^{1/t}}{t^3}\, dt.$$

Poniamo ora

$$\frac{1}{t} = y,$$

da cui, differenziando,

$$\left(\frac{1}{t}\right)'\, dt = (y)'\, dy,$$

cioè

$$(t^{-1})'\, dt = \, dy,$$

vale a dire

$$-\frac{1}{t^2}\, dt = dy,$$

ossia

$$\frac{1}{t^2}\, dt = -dy.$$

Osservando l'integranda ci accorgiamo che è possibile individuare il fattore

$$\frac{1}{t^2}$$

scrivendo

$$\frac{1}{t^3} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t^2}.$$

Quindi

$$\int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{1/t}\, dt = -\int y \cdot e^y\, dy.$$

L'integrale

$$-\int ye^y\, dy$$

lo risolviamo applicando la formula di integrazione per parti.

Deriviamo y e integriamo e^y.
Si ha

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
y & & e^y \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
 & \overset{\longleftarrow}{-\int\cdot} & \\
1 & & e^y
\end{array}$$

Quindi

$$-\int ye^y\, dy = -ye^y + \int e^y\, dy = e^y(1-y).$$

Tornando alla variabile t e quindi alla variabile x troviamo

$$\int \frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\, dx = e^{1/(1+\log x)} \left(1 - \frac{1}{1+\log x}\right) + c =$$

$$= e^{1/(1+\log x)} \left(\frac{\log x}{1+\log x}\right) + c.$$

Detta F la particolare primitiva con $c = 0$ si ha

$$\int_{e^{-1/2}}^{1} 7\frac{e^{1/(1+\log x)}}{x(1+\log x)^3}\, dx = 7 \cdot \left(F(1) - F\left(e^{-1/2}\right)\right) =$$

$$= 7 \cdot \left(e^{1/(1+\log 1)} \cdot \frac{\log 1}{1+\log 1} - e^{1/(1+\log(e^{-1/2}))} \cdot \frac{\log(e^{-1/2})}{1+\log(e^{-1/2})}\right) =$$

$$= 7 \cdot \left(-e^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 7 \cdot (-e^2 \cdot (-1)) = 7e^2.$$

17) **[T.E. 06/09/2010]**

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\int_0^x \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2\right)\, dt}{x^5}.$$

(Suggerimento: utilizzare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale ed il teorema di de l'Hôpital).

Svolgimento.

Ricordando che

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0,$$

si ha che, se $x \longrightarrow 0$, il numeratore della frazione tende a

$$5\int_0^0 \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2\right)\, dt = 5 \cdot 0 = 0.$$

Anche il denominatore tende a 0.
Il limita si presenta pertanto nella forma indeterminata

$$\left[\frac{0}{0}\right].$$

Quando si è in presenza di tale forma indeterminata (o si è in presenza della forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$) è possibile utilizzare il teorema di de l'Hôpital, il quale ci autorizza a calcolare al posto del limite iniziale il limite della frazione ottenuta derivando separatamente numeratore e denominatore della frazione di partenza.
Quindi dobbiamo calcolare (portando fuori dalla derivata la costante moltiplicativa 5)

$$\lim_{x\to 0} \frac{5 \cdot \left(\int_0^x \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2\right)\, dt\right)'}{(x^5)'},$$

sperando che tale limite esista.
La derivata del denominatore è subito calcolata; si ha infatti

$$(x^5)' = 5x^4.$$

Spendiamo qualche parola sulla derivata del numeratore.
Anzitutto osserviamo che il numeratore della frazione iniziale, vale a dire

$$F(x) := \int_0^x \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2\right)\, dt,$$

altro non è che una **funzione integrale** per la funzione

$$f(t) = e^{-t^2} - (\cos t)^2.$$

Ciò che dobbiamo fare (per l'applicazione del teorema di de l'Hôpital) è il calcolo della derivata prima di tale funzione integrale.

È a questo punto che interviene il primo **teorema fondamentale del calcolo integrale**.
Le ipotesi per poterlo applicare sono verificate in quanto la funzione

$$f(t) = e^{-t^2} - (\cos t)^2$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi anche in un intorno di 0 (ricordiamoci che $x \to 0$).
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata prima della funzione F nel punto x (in cui f è continua) è la funzione integranda stessa calcolata in x, vale a dire $f(x)$; in formule

$$F'(x) = f(x).$$

In particolare, nel nostro caso, si ha

$$F'(x) = \left(\int_0^x \left(e^{-t^2} - (\cos t)^2 \right) dt \right)' = \left(e^{-x^2} - (\cos x)^2 \right).$$

Quindi, per il teorema di de l'Hôpital, dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \left(e^{-x^2} - (\cos x)^2 \right)}{5x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^{-x^2} - (\cos x)^2 \right)}{x^4},$$

che si presenta ancora nella forma indeterminata $\left[\dfrac{0}{0} \right]$.
Volendo potremmo applicare nuovamente (più volte) il teorema di de l'Hôpital; decidiamo invece di utilizzare gli sviluppi in serie di Taylor in un intorno di 0.
Ricordiamo che valgono le seguenti formule:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + o\left(t^4\right), \qquad \text{per } t \to 0,$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o\left(t^5\right), \qquad \text{per } t \to 0.$$

Per composizione si ha

$$e^{-x^2} = 1 + \left(-x^2\right) + \frac{1}{2}\left(-x^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-x^2\right)^3 + \frac{1}{24}\left(-x^2\right)^4 + o\left(x^8\right) =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + o\left(x^8\right)$$

e

$$(\cos x)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right)\right)^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{-x^2} - (\cos x)^2\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + o\left(x^8\right) - \left(1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o\left(x^4\right)\right)\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^4 + o\left(x^4\right)}{x^4} = \lim_{x\to O} \frac{\frac{2}{12}x^4 + o\left(x^4\right)}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

18) Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx.$$

Svolgimento.

Possiamo risolverlo in due modi, o tramite una sostituzione o tramite l'integrazione per parti.

1° modo: per sostituzione.

Osserviamo che l'integrale

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

non è immediatamente risolubile. Non è infatti riconducibile ad un integrale del tipo

$$\int f'(x) g'(f(x))\, dx,$$

in quanto, dette

$$f(x) = 9 - x^2 \quad \text{e} \quad g'(f) = \sqrt{f} = (f)^{1/2},$$

manca, tra i fattori dell'integranda, la derivata

$$f'(x) = -2x.$$

L'integrale è un caso particolare dell'integrale più generale

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

In casi come questi è conveniente operare la sostituzione

$$x = a \sin t,$$

per poter sfruttare la relazione fondamentale della goniometria, vale a dire

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Nel nostro caso,

$$\sqrt{9 - x^2},$$

si ha

$$a^2 = 9,$$

quindi $a = 3$.
Poniamo quindi (in base a quanto suggerito)

$$x = 3 \sin t, \tag{3}$$

da cui

$$(x)'\, dx = (3 \sin t)'\, dt,$$

cioè

$$dx = 3 \cos t\, dt.$$

Riscriviamo l'integrale nella nuova variabile t: si ha

$$\int \sqrt{9 - 9\sin^2 t} \cdot 3 \cos t\, dt = 3 \int \sqrt{9(1 - \sin^2 t)} \cos t\, dt =$$

$$= 9 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt = 9 \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t\, dt = 9 \int \cos t \cdot \cos t\, dt =$$

$$= 9 \int \cos^2 t\, dt$$

(abbiamo scelto $+\cos t$ nell'estrarre la radice quadrata; lo scegliere $-\cos t$ non avrebbe comportato alcuna differenza).
Dobbiamo quindi calcolare l'integrale

$$9\int \cos^2 t\, dt.$$

Per risolvere questo integrale ricorriamo alle formule di bisezione, già richiamate in precedenza. Poiché

$$\cos t = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}},$$

ne segue

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}.$$

Quindi

$$9\int \cos^2 t\, dt = 9\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = 9\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)\, dt =$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\int \cos 2t\, dt = \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cdot\cos 2t\, dt =$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin(2t).$$

Torniamo alla variabile x.
Dobbiamo esprimere, in funzione di x, i termini

$$t, \qquad \sin(2t) = 2\sin t\cos t \quad \text{(per la formula di duplicazione del seno)}.$$

Per quanto riguarda t ricaviamo da (3)

$$\sin t = \frac{x}{3},$$

da cui, invertendo la funzione sin,

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Dalla relazione fondamentale della trigonometria si trova

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t,$$

da cui

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^3} = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \sqrt{\frac{9-x^2}{9}} =$$

$$= \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

(abbiamo tenuto nell'estrarre la radice lo stesso segno di prima, cioè il +)

Quindi

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

Pertanto si ha

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{4}\cdot 2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + c =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + c.$$

2° modo: per parti.

Vogliamo risolvere per parti l'integrale

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Vediamo l'integranda come il prodotto della funzione 1 e della funzione $\sqrt{9-x^2}$.
Cioè

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Deriviamo la funzione $\sqrt{9-x^2}$ e integriamo la funzione 1. Si ha lo schema

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\
\sqrt{9-x^2} & & 1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & \nwarrow & \\
\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}} & \overleftarrow{-\int\cdot} & x
\end{array}$$

L'integrale diviene

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\cdot x\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

A questo punto aggiungiamo e sottraiamo 9 al numeratore. Otteniamo

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{-x^2+9-9}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + 9\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\int \frac{1}{\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 3\cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Riscrivendo solamente il primo e l'ultimo membro della precedente catena di uguaglianze abbiamo

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Notiamo che sia a primo sia a secondo membro compare (con segni opposti) l'integrale che dovevamo inizialmente calcolare.
Portando l'integrale da calcolare a primo membro otteniamo

$$2\cdot \int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + c,$$

da cui

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right) + c,$$

che è lo stesso risultato a cui eravamo giunti col metodo di sostituzione.

19) **[T.E. 09/01/2009]**
Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{3\sqrt{x+1}}\, dx.$$

Svolgimento.

In aula abbiamo già risolto questo integrale ma attraverso il metodo di sostituzione.

Diamo un altro modo di svolgimento.

Risolviamolo applicando la regola di integrazione per parti.
Ci conviene però riscrivere l'integrale come segue

$$\frac{1}{3}\int \frac{\arcsin x}{(x+1)^{1/2}}\, dx = \frac{1}{3}\int \arcsin x \cdot (x+1)^{-1/2}\, dx.$$

Deriviamo la funzione $\arcsin x$ e integriamo la funzione $(x+1)^{-1/2}$.
Calcoliamo quindi

$$\int (x+1)^{-1/2}\, dx.$$

Si tratta di un integrale immediato, della forma

$$\int h'(x) \cdot (h(x))^{\alpha}\, dx.$$

Detta

$$h(x) = x + 1,$$

si ha

$$h'(x) = 1.$$

Quindi possiamo tranquillamente integrare:

$$\int (x+1)^{-1/2}\, dx = \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2(x+1)^{1/2} = 2\sqrt{x+1}.$$

Quindi:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{derivo} & & \textbf{integro} \\ \arcsin x & & (x+1)^{-1/2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \nwarrow & \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \overset{\longleftarrow}{-\int \cdot} & 2\sqrt{x+1} \end{array}$$

Si ha

$$\frac{1}{3}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{x+1}\arcsin x - \int \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

D'altra parte

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x},$$

in quanto l'integrale definito è da calcolare su $[0,1]$ e su tale intervallo entrambi i fattori $(1-x)$ e $(1+x)$ sono positivi, quindi le singole radici quadrate hanno perfettamente senso.
Otteniamo

$$\frac{1}{2}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x - \frac{2}{3}\int (1-x)^{-1/2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x + \frac{2}{3}\int (-1)\cdot(1-x)^{-1/2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x + \frac{2}{3}\cdot\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\arcsin x + \frac{4}{3}\sqrt{1-x} + c.$$

Detta $F(x)$ la primitiva corrispondente a $c = 0$, si ha

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{3\sqrt{x+1}}\,dx = F(1) - F(0) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}\arcsin 1 + \frac{4}{3}\sqrt{0} - \frac{2}{3}\sqrt{1}\arcsin 0 - \frac{4}{3}\sqrt{1} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\pi - 4\right).$$