

ESERCIZI SUGLI INTEGRALI IMPROPRI

a cura di Michele Scaglia

RICHIAMI TEORICI

INTEGRALI IMPROPRI NOTEVOLI

L'integrale

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx, \quad 0 < a < 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE

- per $\alpha < 1$ e per ogni β
- per $\alpha = 1$ e per $\beta > 1$

- DIVERGE

- per $\alpha > 1$ e per ogni β ,
- per $\alpha = 1$ e per $\beta \leq 1$.

L'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx, \quad a > 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE

- per $\alpha > 1$ e per ogni β
- per $\alpha = 1$ e per $\beta > 1$

- DIVERGE

- per $\alpha < 1$ e per ogni β ,
- per $\alpha = 1$ e per $\beta \leq 1$.

L'integrale

$$\int_a^1 \frac{1}{(\log x)^\beta} dx, \quad 0 < a < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE

- per $\beta < 1$

- DIVERGE

- per $\beta \geq 1$.

L'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x}} dx, \quad a > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE
 - per $\alpha > 0$ (cioè se l'esponenziale rimane a denominatore)
- DIVERGE
 - per $\alpha \leq 0$ (se l'esponenziale sparisce o finisce a numeratore)

Per studiare la convergenza/divergenza dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x} \cdot x^\beta \cdot (\log x)^\gamma} dx, \quad a > 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

per $x \rightarrow +\infty$ si tiene presente questa regola:

- Se $\alpha > 0$ (cioè se l'esponenziale rimane a denominatore), l'integrale **CONVERGE** per ogni valore di β e γ .
- Se $\alpha < 0$ (cioè l'esponenziale finisce a numeratore), l'integrale **DIVERGE** per ogni valore di β e γ .
- Se $\alpha = 0$ (cioè l'esponenziale vale costantemente 1 e quindi scompare), l'integrale si riduce al secondo caso illustrato, al quale rimandiamo le casistiche di convergenza/divergenza.

Osserviamo che, in un intorno di $x = 0$, lo studio dell'integrale improprio

$$\int_0^a \frac{1}{e^{\alpha x} \cdot x^\beta \cdot (\log x)^\gamma} dx, \quad 0 < a < 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

non coinvolge l'esponenziale, in quanto, per $x \rightarrow 0$, si ha $e^{\alpha x} \rightarrow 1$, quindi, per il criterio del confronto asintotico, lo si può omettere.

Pertanto lo studio del carattere è il medesimo del primo caso esposto in questi richiami teorici.

ESERCIZI SVOLTI

1) Si studi il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} dx.$$

Svolgimento.

Cerchiamo anzitutto di capire quale sia il dominio della funzione f integranda. Devono essere soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (e^{2x} - 1) \neq 0 \\ 1 + e^{x^3} > 0 \\ \log(1 + e^{x^3}) \neq 0 \end{cases}$$

Risolviamo

$$e^{2x} - 1 \neq 0.$$

Si ha

$$e^{2x} \neq 1,$$

ossia

$$e^{2x} \neq e^0,$$

da cui $x \neq 0$.

La disequazione

$$1 + e^{x^3} > 0$$

è invece soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$ (in quanto l'esponenziale è sempre positivo).

Infine

$$\log(1 + e^{x^3}) \neq 0$$

diviene (passando all'esponenziale a entrambi i membri)

$$1 + e^{x^3} \neq 1,$$

da cui

$$e^{x^3} \neq 0,$$

che è sempre verificata (in quanto l'esponenziale è maggiore strettamente di 0).
In definitiva, il sistema che fornisce il dominio di f è

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

la cui soluzione è ovviamente

$$x > 0.$$

Pertanto il dominio di f è

$$\text{dom} f =]0; +\infty[.$$

Osserviamo che l'integrale assegnato è definito sull'intervallo $(0; +\infty)$: tale integrale è quindi improprio in quanto, anzitutto, l'intervallo I di integrazione è illimitato; inoltre, in $x = 0$ la funzione f non è definita e presenta una singolarità che potrebbe tradursi in una illimitatezza della f stessa con eventuale divergenza dell'integrale.

Pertanto, come osservato in classe, l'integrale converge se e soltanto se converge sia in un intorno di 0, sia per $x \rightarrow +\infty$.

Dobbiamo quindi studiare due convergenze.

Possiamo infatti pensare l'integrale assegnato come

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

essendo a un qualsivoglia valore numerico intermedio tra 0 e $+\infty$. In tale valore l'integrale non presenta ovviamente problemi in quanto la funzione non è definita solo in $x = 0$.

L'integrale improprio di partenza convergerà se e soltanto se entrambi gli integrali impropri a secondo membro risultano convergenti. Risulterà invece divergente nel caso in cui almeno uno dei due diverga (positivamente, trattandosi di un'integranda positiva).

Osserviamo inoltre che la funzione integranda è sempre positiva o nulla (quindi possiamo applicare i criteri di integrabilità per funzioni positive).

Cominciamo a studiare l'integrabilità impropria in un intorno di 0, vale a dire

$$\int_0^a \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} dx.$$

Sia quindi $x \rightarrow 0$.

Vogliamo applicare il criterio del confronto asintotico.

Dobbiamo esibire una funzione $0 \leq g(x)$ più semplice di $f(x)$ che verifichi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0; +\infty).$$

Per fare ciò, come già richiamato, è necessario capire a cosa tendano (per $x \rightarrow 0$) i vari fattori che costituiscono l'integranda f .

1° fattore: $\sinh x$.

Si ha

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sinh x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \left[\frac{e^0 - e^0}{2} \right] = \left[\frac{1 - 1}{2} \right] = 0.$$

Il primo fattore è quindi infinitesimo.

Dobbiamo far intervenire o un limite notevole opportuno o gli sviluppi di Taylor. Seguiamo la seconda possibilità (in quanto a lezione non abbiamo mai dato limiti notevoli che coinvolgano le funzioni iperboliche).

Si ha

$$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4).$$

In questo caso è sufficiente arrestarsi al primo ordine in quanto il fattore consta solo del termine $\sinh x$.

Pertanto possiamo sostituire, per $x \rightarrow 0$,

$$\sinh x$$

con

$$x.$$

D'ora in poi scriveremo

$$\sinh x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Secondo fattore: $\sin^2(\sqrt{x})$.

Banale è osservare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2(\sqrt{x}) = 0.$$

Il fattore è quindi infinitesimo.
Per il ben noto limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

si ha subito, per composizione,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1.$$

Pertanto possiamo dire

$$\sin(\sqrt{x}) \sim \sqrt{x} \text{ per } x \rightarrow 0,$$

da cui

$$\sin^2(\sqrt{x}) \sim (\sqrt{x})^2 = x \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Terzo fattore: $(e^{2x} - 1)$.

Si ha anzitutto

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1) = 0.$$

Il fattore è quindi infinitesimo.

Qui è immediato concludere (grazie al limite notevole) che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1.$$

Pertanto sostituiamo $(e^{2x} - 1)$ con $2x$, cioè

$$(e^{2x} - 1) \sim 2x \text{ per } x \rightarrow \infty.$$

Quarto fattore: $\log(1 + e^{x^3})$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + e^{x^3}) = [\log(1 + e^0)] = [\log(1 + 1)] = \log 2.$$

Il quarto fattore tende quindi a una quantità finita e positiva. Possiamo quindi trascurarlo

nell'introdurre la $g(x)$.
Fatte queste premesse si

$$f(x) \sim g(x) = \frac{x \cdot x}{(2x)} = \frac{1}{2x^{-1}} \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Per il criterio del confronto asintotico, i due integrali

$$\int_0^a f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^a g(x) dx$$

hanno esattamente lo stesso carattere.
Poiché

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^a \frac{1}{2x^{-1}} dx$$

è convergente in quanto $\alpha = -1 < 1$ (non dimentichiamoci che siamo in un intorno di $x = 0$, non di $x = +\infty$), ne segue che pure

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} dx$$

è convergente.

Per ora abbiamo mostrato che la singolarità in $x = 0$ per f non provoca la divergenza dell'integrale.

Occupiamoci ora di stabilire se la illimitatezza dell'intervallo I di integrazione comporti o meno la divergenza dell'integrale stesso.

Studiamo cioè il caso $x \rightarrow +\infty$, vale a dire l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} dx.$$

Sia quindi $x \rightarrow +\infty$.

Anche in questo caso vogliamo semplificare lo studio dell'integrale.

Solo che, a differenza del caso precedente, ora non si può applicare direttamente il criterio del confronto asintotico (il quale coinvolge limiti), in quanto non esiste il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin^2(\sqrt{x}),$$

essendo la funzione \sin continuamente oscillante tra -1 e 1 e di conseguenza la funzione \sin^2 oscillante tra 0 e 1 .

Come già osservato in aula, in questi casi si cerca di utilizzare il criterio del confronto, esibendo una funzione $g(x)$ tale che

$$f(x) \leq g(x) \text{ per ogni } x \in (a; +\infty),$$

sperando che

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx$$

risulti convergente.

Poiché

$$\sin^2(\sqrt{x}) \leq 1 \quad \text{per ogni } x > 0,$$

ne segue che

$$f(x) = \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} \leq \frac{\sinh(x) \cdot 1}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} = g(x) \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Cerchiamo quindi di stabilire il carattere dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\sinh(x)}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} dx.$$

Per questo integrale improprio possiamo invece applicare il criterio del confronto asintotico in quanto tutti i fattori dell'integranda ammettono limite per $x \rightarrow +\infty$.

Consideriamo i vari fattori.

1° fattore: $\sinh x$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \left[\frac{e^{+\infty} - e^{-\infty}}{2} \right] = \left[\frac{+\infty - 0}{2} \right] = +\infty.$$

Poiché tale fattore tende a $+\infty$ lo sostituiremo, nell'introdurre la nuova funzione $f(x)$, con l'addendo di infinito maggiore.

In questo caso si tratta di e^x (abbiamo volutamente tralasciato la costante moltiplicativa, influente ai fini della convergenza).

Pertanto

$$\sinh x \sim e^x \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Secondo fattore: $(e^{2x} - 1)$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 1) = [e^{+\infty} - 1] = +\infty.$$

Poiché il fattore tende all'infinito teniamo l'addendo di infinito dominante, vale a dire e^{2x} .

Quindi

$$(e^{2x} - 1) \sim e^{2x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Osserviamo che sarebbe stato errato utilizzare in questo caso il limite notevole e sostituire $(e^{2x} - 1)$ con $2x$. Infatti, per $x \rightarrow +\infty$, i due termini e^{2x} e $2x$ non hanno affatto lo stesso comportamento. Sappiamo infatti che l'esponenziale va all'infinito molto più rapidamente delle potenze x^α , $\alpha > 0$.

Terzo fattore: $\log(1 + e^{x^3})$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1 + e^{x^3}) = [\log(1 + e^{+\infty})] = [\log(+\infty)] = +\infty.$$

Il fattore tende cioè all'infinito.

Nell'argomento del log terremo solo l'addendo di infinito maggiore, cioè e^{x^3} . Si ha quindi

$$\log(1 + e^{x^3}) \sim \log(e^{x^3}) = x^3 \cdot \log e = x^3, \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Introduciamo quindi la funzione $h(x)$ adatta al criterio del confronto asintotico con $g(x)$. Si ha

$$h(x) = \frac{e^x}{e^{2x} \cdot x^3} = \frac{1}{e^x \cdot x^3}.$$

Poiché (ricordando gli integrali notevoli)

$$\int_a^{+\infty} h(x) dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{e^x \cdot x^3} dx$$

converge (essendo l'esponenziale a denominatore), ne segue che, per confronto asintotico, converge pure l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx = \int \frac{\sinh(x)}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} dx.$$

Quindi, per il criterio del confronto, converge pure l'integrale iniziale

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} dx.$$

Pertanto si ha convergenza anche per $x \rightarrow +\infty$.

In conclusione l'integrale di partenza

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x) \cdot \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1) \cdot \log(1 + e^{x^3})} dx$$

risulta convergente (in quanto sia in 0 che in $+\infty$ c'è convergenza).

2) Si studi, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} \frac{(x - \sin x) \cdot \cos^2(x)}{x^\alpha \cdot \log^2 x \cdot \log(1+x)} dx$$

Svolgimento.

Calcoliamo il dominio di f .

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ \log^2 x \neq 0 \\ 1 + x > 0 \\ \log(1+x) \neq 0 \end{cases} .$$

L'equazione

$$\log^2 x \neq 0,$$

che equivale a

$$\log x \neq 0,$$

dà per risultato (passando all'esponenziale)

$$x \neq 1.$$

Risolvendo

$$\log(1+x) \neq 0$$

si trova

$$1+x \neq e^0,$$

da cui

$$x \neq 0.$$

Quindi il sistema è

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases},$$

che ha per soluzione

$$x > 0 \text{ con } x \neq 1.$$

Pertanto il dominio di f è

$$\text{dom} f =]0; 1[\cup]1; +\infty[.$$

Osserviamo che la funzione non è definita in $x = 0$ e in $x = 1$.
D'altra parte l'integrale sotto studio ha per intervallo

$$I = \left] 0, \frac{1}{2} \right[,$$

al quale non appartiene il punto $x = 1$.

L'integrale è quindi improprio solo a causa del punto $x = 0$ in cui, a seconda dei valori del parametro α , la funzione potrebbe diventare illimitata e rendere l'integrale divergente.

Cerchiamo quindi di capire per quali valori di α l'integrale, in un intorno di 0, risulti convergente.

Cerchiamo di applicare il criterio del confronto asintotico, esibendo un'opportuna funzione positiva $g(x)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, \infty).$$

Per introdurre tale funzione dobbiamo studiare i vari fattori dell'integranda $f(x)$.

1° fattore: $(x - \sin x)$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0.$$

Il fattore è infinitesimo ed è dato dalla sottrazione di due infinitesimi. Utilizziamo gli sviluppi di Taylor.

Si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Nel nostro caso è sufficiente fermarsi al terzo ordine (infatti la potenza di grado 3 non si cancella).

Si ha quindi

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \right) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Quindi

$$(x - \sin x) \sim \frac{1}{6}x^3 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Secondo fattore: $\cos^2 x$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1^2 = 1.$$

Quindi tale fattore lo possiamo tranquillamente trascurare.

Terzo fattore: x^α .

Tale fattore si presenta già in una forma favorevole.

Quarto fattore: $\log^2 x$.

Anche tale fattore già si presenta in forma adatta.

Quinto fattore: $\log(1+x)$.

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x) = 0.$$

Poiché si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

ne segue che

$$\log(1+x) \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Possiamo quindi introdurre la funzione $g(x)$ adatta al criterio del confronto asintotico.

Risulta

$$g(x) = \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^\alpha \cdot \log^2 x \cdot x} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-2} \cdot \log^2 x}.$$

Studiamo quindi per quali valori del parametro α si ha la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} g(x) dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^{\alpha-2} \cdot \log^2 x} dx.$$

Ricordando la tavola degli integrali impropri notevoli, si ha che il precedente integrale converge sicuramente se

$$\alpha - 2 < 1,$$

ossia se

$$\alpha < 3.$$

Se $\alpha = 3$ c'è comunque convergenza in quanto l'esponente del logaritmo è $2 > 1$.

In definitiva, l'integrale

$$\int_0^{1/2} g(x) dx$$

converge se e solo se

$$\alpha \leq 3.$$

Per il criterio del confronto asintotico segue che pure l'integrale iniziale

$$\int_0^{1/2} f(x) dx = \int_0^{1/2} \frac{(x - \sin x) \cdot \cos^2(x)}{x^\alpha \cdot \log^2 x \cdot \log(1+x)} dx$$

converge per

$$\alpha \leq 3.$$

3) Si studi, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere dell'integrale improprio

$$\int_5^{+\infty} \frac{[\sin(e^{-x})]^\alpha \cdot \log x}{x^{2/3} \cdot (e^{3x} - 1)} dx.$$

Svolgimento.

Osserviamo anzitutto che, per ogni $x > 0$, la funzione integranda è positiva.

Calcoliamo il dominio dell'integranda f .

Osserviamo che, affinché abbia senso la potenza reale

$$[\sin(e^{-x})]^\alpha$$

abbia senso, la base deve essere strettamente maggiore di 0.

Quindi, osservati anche gli altri fattori che costituiscono l'integranda, il sistema da impostare per individuare il campo di esistenza è il seguente:

$$\begin{cases} \sin(e^{-x}) > 0 \\ x > 0 \\ e^{3x} - 1 \neq 0 \end{cases} .$$

Consideriamo la prima disequazione.

Osserviamo che

$$\sin(e^{-x}) = \sin\left(\frac{1}{e^x}\right).$$

Essendo $e^x > 1$ per ogni $x > 0$ (nel nostro caso, a dire il vero, è $x > 5$), ne segue che

$$0 < \frac{1}{e^x} \leq 1, \quad \forall x > 5.$$

Pertanto, l'argomento del sin è minore o uguale di un radiante (circa 57°).

Quindi la funzione sin assume tutti valori positivi.

La disequazione è soddisfatta per ogni $x > 5$.

La condizione

$$e^{3x} - 1 \neq 0,$$

ossia

$$e^{3x} \neq e^0$$

dà per risultato

$$3x \neq 0, \quad \text{cioè } x \neq 0.$$

Inoltre, il logaritmo è definito per $x > 0$.

Il sistema da risolvere è quindi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases},$$

che risolto dà

$$x > 0.$$

Il dominio di f è quindi

$$\text{dom} f =]0; +\infty[.$$

D'altra parte, nel nostro esercizio, l'intervallo di integrazione è

$$I =]5; +\infty[,$$

e la singolarità $x = 0$ non appartiene a tale intervallo. La funzione è quindi continua su tutto I . L'integrale assegnato è quindi improprio solamente a causa della illimitatezza dell'intervallo di integrazione I .

Dovremo cercare di stabilire per quali valori del parametro α l'integrale non diverge per $x \rightarrow +\infty$.

Sia quindi $x \rightarrow +\infty$.

Consideriamo i vari fattori.

Primo fattore: $[\sin(e^{-x})]^\alpha$.

Per il momento consideriamo l'argomento della potenza, vale a dire

$$[\sin(e^{-x})].$$

Studiamone il limite: si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin(e^{-x})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{e^x}\right) \right] = \left[\sin\left(\frac{1}{+\infty}\right) \right] = [\sin(0)] = 0.$$

Il fattore è infinitesimo.

Pensando al limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

si ha, (per il teorema di sostituzione)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} = 1.$$

Quindi

$$\sin(e^{-x}) \sim e^{-x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

da cui

$$[\sin(e^{-x})]^\alpha \sim [e^{-x}]^\alpha = e^{-\alpha x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Secondo fattore: $\log x$.

Tale fattore è già in forma favorevole (pensando agli integrali noti a cui vogliamo ricondurci).

Terzo fattore: $x^{2/3}$.

Anche questo fattore è già in forma favorevole.

Quarto fattore: $(e^{3x} - 1)$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - 1) = [e^{+\infty} - 1] = +\infty.$$

Poiché il fattore tende all'infinito, dobbiamo tenere l'addendo di infinito maggiore, cioè e^{3x} (che, tra l'altro, è anche l'unico addendo che tende all'infinito nel fattore).

Quindi

$$(e^{3x} - 1) \sim e^{3x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Pertanto, la funzione $g(x)$ adatta al criterio del confronto asintotico è

$$g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x^{2/3} \cdot e^{3x}}.$$

Pertanto, i valori di α per cui converge

$$\int_5^{+\infty} g(x) dx = \int_5^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^{2/3} \cdot e^{3x}} dx,$$

sono tutti e soli i valori di α per cui converge l'integrale di partenza

$$\int_5^{+\infty} f(x) dx = \int_5^{+\infty} \frac{[\sin(e^{-x})]^\alpha \cdot \log x}{x^{2/3} \cdot (e^{3x} - 1)} dx.$$

Studiamo quindi la convergenza di

$$\int_5^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^{2/3} \cdot e^{3x}} dx.$$

Riscriviamo come

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{3x}} dx = \int_5^{+\infty} \frac{1}{e^{(\alpha+3)x} \cdot x^{2/3}} dx.$$

Sicuramente, se

$$\alpha + 3 > 0,$$

ossia se

$$\alpha > -3$$

l'integrale converge.

Se

$$\alpha < -3,$$

sicuramente diverge.

Analizziamo ora il caso $\alpha = -3$.

L'integrale diviene

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3}} dx,$$

divergente, in quanto $\alpha = \frac{2}{3} < 1$.

In definitiva, si ha convergenza se e solo se

$$\alpha > -3.$$

4) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} (x-1) \cdot e^{-x^2+2x} dx.$$

Svolgimento.

La funzione integranda è definita su tutto \mathbb{R} .

L'integrale da calcolare è improprio a causa della illimitatezza dell'intervallo I di integrazione.

Si ha infatti

$$I =]2; +\infty[.$$

Per definizione di integrale improprio si ha

$$\int_2^{+\infty} (x-1) \cdot e^{-x^2+2x} dx := \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_2^t (x-1) \cdot e^{-x^2+2x} dx \right].$$

Cominciamo a calcolare l'integrale

$$\int_2^t (x-1) \cdot e^{-x^2+2x} dx.$$

Per prima cosa procuriamoci una primitiva dell'integranda. Risolviamo cioè l'integrale indefinito

$$\int (x-1) \cdot e^{-x^2+2x} dx.$$

Trattandosi del prodotto di due funzioni, per prima cosa cerchiamo di capire se l'integranda è interpretabile come la derivata di una composta.

La presenza dell'esponenziale suggerisce che sia

$$f(x) = -x^2 + 2x, \quad g'(f) = e^f.$$

Poiché

$$f'(x) = (-x^2 + 2x)' = -2x + 2 = -2(x-1),$$

occorre moltiplicare e dividere l'integranda per il fattore -2 : si ha

$$\begin{aligned} \int (x-1) \cdot e^{-x^2+2x} dx &= -\frac{1}{2} \cdot \int (-2)(x-1) \cdot e^{-x^2+2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2+2x} + c \end{aligned}$$

avendo usato il fatto che

$$\int g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + c.$$

Detta ad esempio F la primitiva con $c = 0$ risulta

$$\int_2^t (x-1) \cdot e^{-x^2+2x} dx = F(t) - F(2) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t^2+2t} - \left(-\frac{1}{2}e^{-4+4}\right) = -\frac{1}{2}e^{-t^2+2t} + 1.$$

Calcoliamo quindi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}e^{-t^2+2t} + \frac{1}{2}.$$

Poiché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t^2 + 2t) = -\infty + \infty,$$

occorre eliminare la forma indeterminata raccogliendo il massimo infinito.

Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t^2 + 2t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot \left(-1 + \frac{2}{t}\right) = +\infty(-1 + 0) = -\infty.$$

Pertanto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}e^{-t^2+2t} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}e^{-\infty} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\int_2^{+\infty} (x-1) \cdot e^{-x^2+2x} dx = \frac{1}{2}.$$

5) [T.E. 26/01/2009]

Si calcoli l'integrale improprio seguente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx.$$

Svolgimento.

L'integrale è improprio: infatti, l'intervallo I di integrazione è illimitato.

Inoltre, la funzione integranda non è definita in $x = 0$. Tuttavia

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} = 1,$$

grazie al limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1.$$

Quindi, in un intorno di $x = 0$ la funzione integranda è limitata.

Pertanto, pur non essendo f definita in $x = 0$, l'integrale non diviene improprio.

Osserviamo infine, che l'ulteriore condizione da imporre per individuare il dominio di f è

$$x \neq -\frac{1}{7},$$

ma tale punto non è di nostro interesse in quanto non appartiene all'intervallo $I =]0; +\infty[$.

L'integrale da calcolare diviene dunque, per definizione di integrale improprio,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_0^t \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx \right].$$

Calcoliamoci quindi una primitiva F di f risolvendo

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx.$$

Operiamo una sostituzione.

Poniamo

$$\sqrt{7x} = t,$$

da cui, differenziando immediatamente, otteniamo

$$\frac{1}{2\sqrt{7x}} \cdot 7 dx = dt,$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{7x}} dx = \frac{2}{7} dt.$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx &= \int \frac{\arctan t}{(1+t^2)} \cdot \frac{2}{7} dt = \\ &= \frac{2}{7} \int \frac{\arctan t}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale si risolve immediatamente ricorrendo alla derivata di una funzione composta.

Infatti l'integrale

$$\int \frac{\arctan t}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2} \cdot \arctan t dt = \int \frac{1}{1+t^2} (\arctan t)^1 dt$$

è proprio della forma

$$\int f' \cdot g'(f) dt,$$

essendo

$$f(t) = \arctan t, \quad g'(f) = (f)^1.$$

Integrando g' si ha:

$$\frac{2}{7} \int \frac{\arctan t}{1+t^2} dt = \frac{2}{7} \cdot \frac{(\arctan t)^2}{2} = \frac{1}{7} (\arctan t)^2.$$

Tornando alla variabile x , troviamo finalmente

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx = \frac{1}{7} (\arctan \sqrt{7x})^2 + c.$$

Detta F la primitiva con ad esempio $c = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx &= F(t) - F(0) = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \left[\arctan(\sqrt{7t})^2 - (\arctan \sqrt{0})^2 \right] = \frac{1}{7} (\arctan \sqrt{7t})^2. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{7} (\arctan \sqrt{7t})^2 = \\ &= \frac{1}{7} (\arctan(+\infty))^2 = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{28}. \end{aligned}$$

6) [T.E. 29/01/2010]

Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{x/4} - 1}{(\sinh x)^\alpha x^{3/2}} dx.$$

Svolgimento.

L'integrale è da considerarsi improprio sia a causa della illimitatezza dell'intervallo I di integrazione, sia a causa del fatto che la funzione f non è definita in $x = 0$ e potrebbe presentare in tale punto, al variare di α , un'illimitatezza tale da comportare la divergenza dell'integrale medesimo in un intorno di $x = 0$.

I valori di α per i quali l'integrale converge sono quindi tutti e soli i valori di α per cui si ha convergenza sia in un intorno di $x = 0$ sia per $x \rightarrow +\infty$.

Possiamo scrivere l'integrale come

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

essendo a un qualsivoglia valore numerico intermedio tra 0 e $+\infty$. In tale valore l'integrale non presenta ovviamente problemi in quanto la funzione non è definita solo in $x = 0$.

Cominciamo a studiare il caso $x \rightarrow 0^+$, cercando di applicare il criterio del confronto asintotico.

Consideriamo quindi l'integrale improprio

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a \frac{e^{x/4} - 1}{(\sinh x)^\alpha x^{3/2}} dx.$$

Studiamo il comportamento di ciascun fattore per $x \rightarrow 0^+$.

1° fattore: $(e^{x/4} - 1)$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x/4} - 1) = [e^0 - 1] = 0.$$

Il fattore è quindi infinitesimo.

Nell'introdurre la funzione $g(x)$ sostituiremo tale fattore con la parte mancante di un opportuno limite notevole. In particolare, in questo caso, faremo ricorso al limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Effettivamente, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/4} - 1}{\frac{x}{4}} = 1.$$

Pertanto possiamo affermare che

$$e^{x/4} - 1 \sim \frac{x}{4} \sim x \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

2° fattore: $(\sinh x)^\alpha$.

Sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sinh x = 0.$$

Il fattore è quindi infinitesimo.

Ricorriamo agli sviluppi in serie di Taylor.

Si ha

$$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Poiché il fattore è infinitesimo per conto suo (e non è dato dalla somma di addendi infinitesimi), è sufficiente arrestarsi al primo ordine, in quanto non potranno esserci cancellazioni di monomi nello sviluppo.

Pertanto

$$\sinh x \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

da cui

$$(\sinh x)^\alpha \sim (x)^\alpha \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Infine, il fattore

$$x^{3/2}$$

è già in forma favorevole.

Introdotta quindi la funzione

$$g(x) = \frac{x}{x^\alpha \cdot x^{3/2}}$$

il criterio del confronto asintotico garantisce che

$$\int_0^a f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^a g(x) dx$$

abbiano lo stesso carattere.

Individuiamo quindi i valori di α per i quali converge

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^a \frac{x}{x^\alpha \cdot x^{3/2}} dx.$$

L'integrale

$$\frac{x}{x^\alpha \cdot x^{3/2}} dx = \int_0^a \frac{1}{x^{\alpha + \frac{1}{2}}} dx$$

converge (essendo l'indeterminazione in $x = 0$) quando

$$\alpha + \frac{1}{2} < 1,$$

ossia quando

$$\alpha < \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, pure l'integrale

$$\int_0^a f(x) = \int_0^a \frac{e^{x/4} - 1}{(\sinh x)^\alpha x^{3/2}} dx$$

converge per $\alpha < \frac{1}{2}$.

Individuati i valori di α che garantiscono la convergenza in un intorno di 0, preoccupiamoci ora di trovare i valori del parametro α che, invece, garantiscano la convergenza quando $x \rightarrow +\infty$.

Interessiamoci dunque all'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{x/4} - 1}{(\sinh x)^\alpha x^{3/2}} dx.$$

Analizziamo il comportamento di ciascun fattore per $x \rightarrow +\infty$.

1° fattore: $(e^{x/4} - 1)$.

Si ha ovviamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x/4} - 1) = [e^{+\infty} - 1] = +\infty.$$

Poiché il fattore tende all'infinito, dobbiamo tenere l'addendo di infinito maggiore, vale a dire

$$e^{x/4},$$

che, in realtà, è anche l'unico addendo che tende all'infinito.

Osserviamo che è essenziale tenere il 4 a denominatore.

Infatti, i termini

$$e^x \quad \text{e} \quad e^{x/4} = \sqrt[4]{e^x}$$

non hanno lo stesso ordine di infinito (il primo è maggiore).

Invece, con i polinomi il discorso sarebbe diverso. I termini

$$x \quad \text{e} \quad \frac{x}{4}$$

sono dello stesso ordine di infinito (avendo stesso grado).

Tornando all'esercizio, quando introdurremo la funzione $g(x)$ equivalente a $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$,

sostituiremo il fattore

$$e^{x/4} - 1$$

con

$$e^{x/4}.$$

2° fattore: $(\sinh x)^\alpha$.

Come detto a lezione, per studiare le funzioni iperboliche quando $x \rightarrow +\infty$ è buona cosa richiamare la definizione di tali funzioni.

Ricordiamo che

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Calcoliamone il limite.

Risulta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \right) = \left[\frac{1}{2}e^{+\infty} - \frac{1}{2}e^{-\infty} \right] = \\ &= [+ \infty - 0] = +\infty. \end{aligned}$$

Il fattore tende quindi all'infinito. Dei due addendi che lo costituiscono considereremo solamente quello che tende a $+\infty$, vale a dire

$$\frac{1}{2}e^x \sim e^x.$$

Pertanto, per $x \rightarrow +\infty$,

$$(\sinh x)^\alpha = (e^x)^\alpha = e^{\alpha x}.$$

3° fattore: $x^{3/2}$.

Tale fattore è già in forma favorevole.

Introdotta la funzione

$$g(x) = \frac{e^{x/4}}{e^{\alpha x} \cdot x^{3/2}},$$

il criterio del confronto asintotico garantisce che

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

abbiano esattamente lo stesso carattere.

Individuiamo quindi i valori di α per cui converge

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} g(x) &= \int_a^{+\infty} \frac{e^{x/4}}{e^{\alpha x} \cdot x^{3/2}} dx = \\ &= \int_a^{+\infty} \frac{1}{e^{(\alpha-1/4)x} \cdot x^{3/2}} dx.\end{aligned}$$

Ricordando quanto richiamato nelle prime pagine, si hanno i seguenti casi:

- se $\alpha - \frac{1}{4} > 0$, ossia se $\alpha > \frac{1}{4}$, l'integrale sicuramente converge (perché l'esponenziale rimane al denominatore);
- se $\alpha - \frac{1}{4} = 0$, ossia se $\alpha = \frac{1}{4}$ l'integrale diviene

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx,$$

convergente, in quanto l'esponente di x è maggiore di 1 (non dimentichiamoci che siamo in un intorno di $+\infty$).

- se $\alpha - \frac{1}{4} < 0$, ossia se $\alpha < \frac{1}{4}$, l'integrale sicuramente diverge (in quanto l'esponenziale finisce a numeratore causando la illimitatezza della funzione).

Pertanto, l'integrale

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx$$

converge se e solo se

$$\alpha \geq \frac{1}{4}.$$

Stesso discorso per

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Affinché l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{x/4} - 1}{(\sinh x)^\alpha x^{3/2}} dx$$

converga, si deve avere

$$\begin{cases} \alpha < \frac{1}{2} \\ \alpha \geq \frac{1}{4} \end{cases},$$

da cui

$$\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2}.$$

7) [T.E. 11/02/2011]

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

e quindi utilizzare la primitiva trovata per calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

Svolgimento.

Calcoliamo l'integrale

$$\int 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2} dx = 3 \cdot \int \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

Riscriviamo l'integrale come

$$3 \cdot \int (\arctan x) \cdot x^{-2} dx.$$

L'integranda è data dal prodotto di due funzioni di specie diverse non legate l'una all'altra da derivate di composte.

Utilizziamo quindi la regola di integrazione per parti.

Deriviamo $\arctan x$ e integriamo x^{-2} .

derivo		integro
$\arctan x$		x^{-2}
↓		↓
	↙	
$\frac{1}{1+x^2}$	← ∫ ·	$-\frac{1}{x}$

L'integrale diviene

$$3 \cdot \int (\arctan x) \cdot x^{-2} dx = 3 \cdot \left[\frac{-\arctan x}{x} + \int \frac{1}{(1+x^2)x} dx \right].$$

Risolviamo

$$\int \frac{1}{(1+x^2)x} dx.$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta in cui il denominatore ha grado maggiore del numeratore.

Utilizziamo la regola dei fratti.

Cerchiamo tre numeri $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

Si ha

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A + Ax^2 + Bx^2 + Cx}{x(1+x^2)} = \frac{x^2(A+B) + Cx + A}{x(1+x^2)}.$$

Affinché la frazione ottenuta coincida con

$$\frac{1}{x(1+x^2)}$$

si deve avere

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}.$$

Pertanto risulta

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} = \log|x| - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ &= \log|x| - \frac{1}{2} \log|1+x^2| + c = \log \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + c. \end{aligned}$$

In definitiva, tornando all'integrale originario, si ha

$$3 \cdot \int (\arctan x) \cdot x^{-2} dx = 3 \cdot \left[\frac{-\arctan x}{x} + \log \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + c \right].$$

Passiamo alla seconda parte dell'esercizio, il calcolo dell'integrale improprio.

Osserviamo che la funzione integranda,

$$\frac{\arctan x}{x^2}$$

è definita e continua per ogni $x \neq 0$.

L'integrale

$$\int_1^{+\infty} 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

è improprio solo a causa della illimitatezza dell'intervallo di integrazione $I =]1, +\infty[$. Si tratta dell'integrale improprio di una funzione limitata su un intervallo illimitato.

Il valore dell'integrale lo si ottiene nel seguente modo:

$$\int_1^{+\infty} 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

Poiché abbiamo già calcolato la primitiva generica di $f(x)$, si ha facilmente

$$\begin{aligned} \int_1^t 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2} dx &= \left[3 \cdot \left(\frac{-\arctan x}{x} + \log \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right]_1^t = \\ &= 3 \cdot \left\{ \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right] - \left[\frac{-\arctan 1}{1} + \log \frac{|1|}{\sqrt{1+1}} \right] \right\} = \\ &= 3 \cdot \left\{ \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right] + \frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Dobbiamo ora calcolare il limite

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} &= 3 \cdot \left\{ \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right] + \frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \\ &= 3 \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right] + 3 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right]. \end{aligned}$$

Consideriamo l'addendo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right].$$

Poiché

$$|t| = \sqrt{t^2},$$

si ha

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} \right] &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\arctan t}{t} + \log \sqrt{\frac{t^2}{t^2}} \right] = \left[\frac{-\arctan(+\infty)}{+\infty} + \log \sqrt{1} \right] = \\ &= \left[\frac{-\frac{\pi}{2}}{+\infty} + 0 \right] = 0. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\int_1^{+\infty} 3 \cdot \frac{\arctan x}{x^2} dx = 3 \cdot 0 + 3 \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = 3 \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right].$$