

# ESERCIZI SUI LIMITI DI SUCCESSIONE E FUNZIONE TRATTI DA TEMI D'ESAME

a cura di Michele Scaglia

## LIMITI NOTEVOLI

Ricordiamo i principali limiti notevoli che utilizzeremo nello svolgimento degli esercizi che seguono:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot (\log x)^\beta = 0 \quad \text{per ogni } \alpha, \beta > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

## SUCCESSIONI NOTEVOLI

Ricordiamo anche le principali successioni che intervengono nel calcolo dei limiti:

- $(a_n) = \log n$
- $(a_n) = n^\alpha$ , con  $\alpha > 0$

- $(a_n) = q^n$  (successione geometrica)
- $(a_n) = n!$ , essendo,

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases},$$

o, alternativamente,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad \text{ponendo } 0! = 1.$$

- $(a_n) = n^n$ .

Ricordiamo pure la ben nota successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

che è una successione non negativa, strettamente crescente e limitata e il cui limite è già stato richiamato.

La **successione geometrica**, come già visto a teoria, ha il seguente comportamento:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1 \quad (-1 < q < 1) \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}.$$

Si verifica immediatamente, applicando la definizione, che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty \quad (\alpha > 0),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^n = +\infty.$$

Abbiamo dimostrato, ricorrendo al Criterio del Rapporto per le successioni, la rapidità con cui le precedenti successioni tendono all'infinito al tendere di  $n$  all'infinito. La scala degli infiniti (dal meno potente al più potente) è:

$$\log n, \quad n^\alpha \quad (\alpha > 0), \quad q^n, \quad n!, \quad n^n.$$

Risulta quindi immediato affermare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^5} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{e^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^n} = 0, \quad \dots$$

e simili. È sufficiente avere ben chiara la scala di infiniti appena scritta.

## ESERCIZI SUI LIMITI SVOLTI

1) [T.E. 22/01/2007]

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \cdot \left(n^{\frac{3}{n}} - 1\right)}{\log(n^{2n} + 2n!)}.$$

**Svolgimento.**

Consideriamo i vari fattori.

Il primo fattore,  $n^2$ , si presenta già in forma favorevole (e, ovviamente, tende all'infinito).

Per quanto riguarda il secondo fattore,

$$n^{\frac{3}{n}} - 1,$$

ci accorgiamo della presenza di un addendo in cui compare la  $n$  sia alla base che all'esponente: come già precisato in aula, conviene in questo caso tener presente la ben nota uguaglianza

$$y = e^{\log y}, \quad \text{per ogni } y > 0.$$

Applichiamola con  $y = n^{\frac{3}{n}}$ : si ha

$$n^{\frac{3}{n}} = e^{\log n^{\frac{3}{n}}} = e^{\frac{3}{n} \log n}.$$

Pertanto

$$\left(n^{\frac{3}{n}} - 1\right) = \left(e^{\frac{3}{n} \log n} - 1\right).$$

Il terzo e ultimo fattore,

$$\log(n^{2n} + 2n!)$$

tende all'infinito. Quando l'argomento di un logaritmo è la somma di più addendi che tendono all'infinito, abbiamo visto che è possibile tenere solamente l'addendo di infinito maggiore e trascurare gli altri addendi di infinito minore.

Poiché  $n^{2n}$  è un infinito di ordine superiore rispetto a  $n!$ , ne segue che possiamo riscrivere

$$\log(n^{2n}) = 2n \cdot \log n$$

in luogo di

$$\log(n^{2n} + 2n!).$$

Pertanto il limite diviene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \cdot \left( e^{\frac{3}{n} \log n} - 1 \right)}{2n \cdot \log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot \left( e^{\frac{3}{n} \log n} - 1 \right)}{2 \cdot \log n}.$$

Per quanto riguarda il fattore

$$\left( e^{\frac{3}{n} \log n} - 1 \right),$$

osserviamo anzitutto (ricordando la scala degli infiniti) che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \log n}{n} = 0,$$

pertanto il fattore

$$\left( e^{\frac{3}{n} \log n} - 1 \right)$$

è del tipo

$$e^t - 1, \quad \text{con } t \rightarrow 0.$$

(nel nostro caso è  $t = \frac{3 \log n}{n}$ ).

Risulta naturale fare riferimento al limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Per poterlo applicare nel nostro esercizio, dobbiamo moltiplicare e dividere la frazione per il fattore

$$\frac{3 \log n}{n}.$$

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot \left( e^{\frac{3}{n} \log n} - 1 \right)}{2 \cdot \log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot \left( e^{\frac{3}{n} \log n} - 1 \right) \cdot \frac{3 \log n}{n}}{2 \cdot \frac{3 \log n}{n} \cdot \log n}.$$

Per quanto osservato, si ha (grazie al teorema di sostituzione)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{3 \log n}{n}} - 1}{\frac{3 \log n}{n}} = 1,$$

quindi il limite diviene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot 3 \log n}{2n \log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

2) [T.E. 26/01/2009]

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n + 7n \log n + n \sin n}{(n+2)^n + n \log \frac{1}{n} + n \sin \frac{1}{n}}.$$

**Svolgimento.**

Consideriamo i vari fattori.

Cominciamo dal *fattore* a numeratore,

$$n^n + 7n \log n + n \sin n.$$

Stabiliamo a cosa tende ogni *addendo*:

- l'addendo  $n^n$  tende all'infinito (come è ben noto),
- l'addendo  $n \log n$  tende all'infinito,
- per quanto riguarda  $n \sin n$ , anzitutto ricordiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n$$

non esiste (infatti non sappiamo che angolo sia  $+\infty$ ; sappiamo solo che il seno è una funzione oscillante tra i valori  $-1$  e  $1$ ).

Il fattore  $n$  che moltiplica il seno tende all'infinito; pertanto non esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin n.$$

D'altra parte ciò che a noi interessa è individuare l'infinito di ordine maggiore: nel nostro caso si tratta di  $n^n$ . Infatti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n \log n}{n^n} = 0,$$

come si controlla immediatamente utilizzando il criterio del rapporto.

Inoltre, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sin n}{n^n} = 0 :$$

infatti, essendo

$$-1 \leq \sin n \leq 1,$$

ne segue

$$-\frac{n}{n^n} \leq \frac{n \sin n}{n^n} \leq \frac{n}{n^n},$$

e quindi, poiché la prima e l'ultima successione della disuguaglianza tendono a 0 per  $n \rightarrow \infty$  (pensando alla scala degli infiniti), pure la successione centrale tende a 0 (per il Teorema del Confronto).

Quindi l'addendo

$$n^n$$

è effettivamente l'infinito di ordine maggiore all'interno del primo fattore.

Quindi scriveremo

$$n^n$$

in luogo di

$$[n^n + 7n \log n + n \sin n].$$

Consideriamo ora il secondo e ultimo *fattore*, vale a dire il denominatore

$$\left[ (n+2)^n + n \log \frac{1}{n} + n \sin \frac{1}{n} \right].$$

Vediamo il comportamento di ogni addendo.

- Ovviamente  $(n+2)^n \rightarrow +\infty$ .

- L'addendo

$$n \log \frac{1}{n} = n \log(n)^{-1} = n \cdot (-1) \cdot \log n = -n \log n,$$

tende a  $-\infty$ .

- L'addendo

$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1,$$

ricordando il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Pertanto vi è la presenza di due addendi che tendono a  $\infty$  e di un addendo che tende a un numero finito.

In queste situazioni, già sappiamo che siamo interessati a tenere l'addendo di infinito maggiore, che, nel nostro caso, è

$$(n+2)^n.$$

Pertanto possiamo riscrivere il limite iniziale come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n},$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+2}{n} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n \right\}^{-1}.$$

A questo punto vogliamo utilizzare il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

essendo nel nostro caso

$$t = \frac{2}{n}.$$

Per il teorema di sostituzione, occorre avere all'esponente l'inverso di  $t$ , vale a dire l'inverso di

$$\frac{2}{n},$$

cioè

$$\frac{n}{2}.$$

Per fare ciò dividiamo e moltiplichiamo per 2 (in quanto il fattore  $n$  è già presente).  
Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \right\}^{-1 \cdot 2} = e^{-2}$$

(risultato ottenuto utilizzando il limite notevole richiamato e il teorema di sostituzione).

3) Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\tan(3x)}.$$

**Svolgimento.**

Poiché

$$e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}},$$

possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}}{\tan(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{4x} - 1}{e^{2x}}}{\tan(3x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{e^{2x} \tan(3x)}.$$

Osserviamo anzitutto che

$$e^{2x} \rightarrow 1 \quad \text{quando } x \rightarrow 0.$$

Possiamo pertanto riscrivere il limite come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\tan(3x)},$$

che si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ .

La struttura del limite suggerisce di ricorrere ai limiti notevoli

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y} = 1.$$

Nel nostro caso si ha  $t = 4x$  e  $y = 3x$ .

Pertanto dobbiamo moltiplicare e dividere rispettivamente per  $4x$  e  $3x$  per poter usare i precedenti limiti notevoli (combinati col teorema di sostituzione).

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{4x} - 1) \cdot 4x}{4x \cdot 3x \cdot \frac{\tan(3x)}{3x}},$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

#### 4) [T.E. 11/01/2010]

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!(n+1)^n \sin\left(\frac{7n}{(n+1)!}\right)}{2^n + (n+2)^n}.$$

#### ***Svolgimento.***

Consideriamo i vari fattori.

Il numeratore è dato dal prodotto di tre fattori:  $n!$  ed  $(n+1)^n$  si presentano già in forma

favorevole.

Il fattore

$$\sin\left(\frac{7n}{(n+1)!}\right)$$

è infinitesimo (cioè tende a 0) per  $n$  tendente all'infinito.

Infatti, ricordando la scala delle successioni notevoli, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n}{(n+1)!} = 0,$$

e di conseguenza, per il teorema di sostituzione,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{7n}{(n+1)!}\right) = 0.$$

Trattandosi di un fattore infinitesimo, dobbiamo ricorrere ai limiti notevoli; in particolare, il limite che fa al caso nostro è

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

essendo  $t = \frac{7n}{(n+1)!}$ , quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{7n}{(n+1)!}\right)}{\frac{7n}{(n+1)!}} = 1.$$

Moltiplicheremo e divideremo quindi la frazione per il fattore  $\frac{7n}{(n+1)!}$ .

Infine, il fattore a denominatore,

$$2^n + (n+2)^n$$

consta di due addendi che tendono entrambi a  $+\infty$ .

Tra i due, l'infinito di ordine maggiore (e che pertanto terremo) è, ovviamente,  $(n+2)^n$ .

Fatte queste premesse, possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!(n+1)^n \sin\left(\frac{7n}{(n+1)!}\right) \cdot \frac{7n}{(n+1)!}}{\frac{7n}{(n+1)!} \cdot (n+2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!(n+1)^n \cdot 7n}{(n+1)! \cdot (n+2)^n}.$$

Ricordiamo che

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!,$$

pertanto si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!(n+1)^n \cdot 7n}{(n+1) \cdot n! \cdot (n+2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^n \cdot 7n}{(n+1) \cdot (n+2)^n}.$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n}{n} = 7,$$

possiamo riscrivere il limite come

$$7 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+2)^n} = 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n.$$

Poiché

$$\frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

siamo in presenza di una forma indeterminata del tipo  $1^\infty$ , che ci suggerisce di far riferimento a uno dei due limiti notevoli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t = e \quad \text{oppure} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Consideriamo ad esempio il secondo.

Dobbiamo quindi cercare di riscrivere

$$\left( \frac{n+1}{n+2} \right)$$

nella forma

$$(1+t)$$

con  $t \rightarrow 0$ .

Per fare ciò, cerchiamo di fare comparire a numeratore la stessa espressione che c'è a denominatore, vale a dire  $n+2$ . Procediamo aggiungendo e togliendo 2 nel seguente modo:

$$\left( \frac{n+1}{n+2} \right) = \left( \frac{n+2-2+1}{n+2} \right) = \left( \frac{n+2-1}{n+2} \right) = \left( \frac{n+2}{n+2} + \frac{-1}{n+2} \right) = \left( 1 + \frac{-1}{n+2} \right),$$

ottenendo quanto desiderato.

Pertanto si ha

$$\left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n = \left( 1 + \frac{-1}{n+2} \right)^n.$$

La struttura è proprio quella del limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}},$$

essendo nel nostro caso  $t = \frac{-1}{n+2}$ .

In forza del teorema di sostituzione, occorre dunque moltiplicare (e dividere) l'esponente della tonda per il reciproco di  $t$ , cioè

$$-\frac{n+2}{1} = -(n+2).$$

Si perviene dunque al limite

$$7 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left( 1 + \frac{-1}{n+2} \right)^{-(n+2)} \right\}^{-\frac{1}{n+2} \cdot n} = 7 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left( 1 + \frac{-1}{n+2} \right)^{-(n+2)} \right\}^{-\frac{n}{n+2}} = 7 \cdot e^{-1},$$

per il teorema di sostituzione ed essendo inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n} = -1.$$

5) [T.E. 29/01/2010]

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n} \left[ \cos \left( \frac{1}{n^2} \right) - 1 \right]}{\sqrt{\log \left( 1 + \frac{7}{n^3} \right) + n - \sqrt{n}}}.$$

**Svolgimento.**

La successione è composta da tre fattori.

Il fattore

$$\sqrt[4]{n} = n^{1/4} \rightarrow +\infty,$$

trattandosi di una potenza del tipo  $n^\alpha$  con  $\alpha > 0$ .

Osservando il secondo fattore

$$\cos \left( \frac{1}{n^2} \right) - 1,$$

ci si accorge immediatamente che, poiché  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , conviene far riferimento al limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

Dobbiamo anzitutto raccogliere un segno meno e moltiplicare e dividere la frazione per  $t^2$ , vale

a dire

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{1}{n^4}.$$

Il fattore

$$\sqrt{\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right) + n - \sqrt{n}},$$

è dato dalla sottrazione di due radici quadrate con radicandi equivalenti all'infinito. Infatti, il primo radicando è dato dalla somma di due addendi,

$$\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right) \rightarrow \log(1 + 0) = \log 1 = 0,$$

e

$$n \rightarrow +\infty,$$

e quindi la prima radice può essere vista come  $\sqrt{n}$ . D'altra parte pure l'altra radice vale  $\sqrt{n}$ .

Pertanto volendo tenere solamente gli infiniti dominanti si giungerebbe ad una cancellazione delle due radici, bloccando così la risoluzione dell'esercizio.

In questi casi, la strada da seguire è quella della razionalizzazione.

Dopo queste prime osservazioni possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt[4]{n} \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{n^4}\right) \cdot \left[\sqrt{\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right) + n + \sqrt{n}}\right]}{\left(\frac{1}{n^4}\right) \cdot \left[\sqrt{\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right) + n - \sqrt{n}}\right] \cdot \left[\sqrt{\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right) + n + \sqrt{n}}\right]}$$

che, applicando il limite notevole e razionalizzando opportunamente, diviene

$$-\frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n} \cdot \left(\frac{1}{n^4}\right) \cdot \left[\sqrt{\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right) + n + \sqrt{n}}\right]}{\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right)}.$$

Per il fattore a denominatore

$$\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right),$$

utilizziamo il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

moltiplicando e dividendo per  $t = \frac{7}{n^3}$ .

Infine, per quanto riguarda il fattore

$$\sqrt{\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right) + n + \sqrt{n}},$$

a questo punto, trattandosi della somma di due radici con radicandi equivalenti all'infinito, possiamo trascurare l'addendo infinitesimo

$$\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right)$$

del primo radicando e scrivere

$$\sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n},$$

anziché

$$\sqrt{\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right) + n + \sqrt{n}}.$$

Il limite diviene

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} \cdot \left(\frac{1}{n^4}\right) \cdot 2\sqrt{n}}{\left(\frac{7}{n^3}\right) \frac{\log\left(1 + \frac{7}{n^3}\right)}{\left(\frac{7}{n^3}\right)}} = \\ & = -\frac{1}{7} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} \cdot \sqrt{n}}{n} = 0, \end{aligned}$$

in quanto il numeratore

$$\sqrt[4]{n} \cdot \sqrt{n} = n^{1/4} \cdot n^{1/2} = n^{3/4}$$

ha grado inferiore a quello del denominatore  $n$ .

6) [T.E. 03/09/2009]

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right) \cdot [n - \sqrt{n^2 + 7}]}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

**Svolgimento.**

Cominciamo con l'osservare che la successione

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

non ammette limite per  $n \rightarrow \infty$ . Tuttavia è limitata tra  $-1$  e  $1$ .

Cerchiamo quindi di stabilire il limite del resto della successione sotto studio: a seconda del risultato di tale limite potremo trarre delle conclusioni circa il risultato del limite originario.

Studiamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right) \cdot [n - \sqrt{n^2 + 7}]}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

procedendo come negli esercizi precedenti.

Per quanto riguarda il fattore

$$\sin\left(\frac{3}{n}\right),$$

moltiplichiamo e dividiamo per

$$\frac{3}{n},$$

in forza del limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Stesso discorso per il fattore

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) :$$

moltiplichiamo e dividiamo per

$$\frac{1}{n},$$

pensando al limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1.$$

Infine, per quanto riguarda il fattore

$$n - \sqrt{n^2 + 7},$$

ripercorrendo le considerazioni dell'esercizio precedente, procediamo con la razionalizzazione.

Otteniamo quindi il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{3}{n}\right) \cdot [n - \sqrt{n^2 + 7}] \cdot [n + \sqrt{n^2 + 7}]}{\left(\frac{3}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot [n + \sqrt{n^2 + 7}]} =$$

$$3 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7}{n + \sqrt{n^2 + 7}} = 0.$$

Pertanto, per il corollario al Teorema del Confronto, il limite iniziale vale 0 (trattandosi del prodotto di un fattore limitato (ossia  $(-1)^n$ ) e di un fattore infinitesimo).

7) Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{\log(2 - \cos x)}{\sin x}}.$$

**Svolgimento.**

La presenza dell'incognita  $x$  sia alla base sia all'esponente ci suggerisce di ricorrere alla ben nota uguaglianza

$$y = e^{\log y}, \quad \text{per ogni } y > 0.$$

Riscriviamo quindi il limite come

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log x \frac{\log(2 - \cos x)}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\log(2 - \cos x)}{\sin x} \cdot \log x} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(2 - \cos x)}{\sin x} \cdot \log x},$$

dove l'ultima uguaglianza è lecita grazie al teorema di sostituzione.

Preoccupiamoci quindi di calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(2 - \cos x)}{\sin x} \cdot \log x.$$

Il fattore  $\sin x$ , tendente a 0, lo tratteremo col solito limite notevole.  
Considerando invece il fattore

$$\log(2 - \cos x),$$

ci accorgiamo che, al tendere di  $x$  a 0, il fattore tende a  $\log(1) = 0$ .  
Come osservato a lezione, in questi casi si cerca di ricondursi al limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

nel quale osserviamo che l'argomento del logaritmo tende a 1 come nel nostro esercizio.

Cerchiamo quindi di scrivere

$$\log(2 - \cos x)$$

nella forma

$$\log(1+t),$$

con  $t \rightarrow 0$ .

Si ha

$$\log(2 - \cos x) = \log(1 + 1 - \cos x) = \log[1 + (1 - \cos x)].$$

Pertanto dividiamo la funzione per il fattore  $t = (1 - \cos x) \rightarrow 0$ .

Si giunge a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log[1 + (1 - \cos x)] \cdot (1 - \cos x)}{(1 - \cos x) \cdot x \cdot \frac{\sin x}{x}} \cdot \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x) \cdot \log x}{x}.$$

A questo punto, per il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2},$$

otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x) \cdot x^2 \cdot \log x}{x^2 \cdot x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cdot \log x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = 0,$$

per il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot (\log x)^\beta = 0, \quad \text{per ogni } \alpha, \beta > 0.$$

Pertanto il limite iniziale risulta

$$e^0 = 1.$$

8) Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} - x \right).$$

**Svolgimento.**

Se considerassimo solamente l'infinito maggiore sotto radice cubica, ossia  $x^3$ , otterremmo una cancellazione tra  $\sqrt[3]{x^3} = x$  ed  $x$ .

Pertanto bisogna procedere in altro modo, cercando di far scomparire la radice cubica.

Per fare ciò, la tipica razionalizzazione che coinvolge la differenza di due quadrati non è efficace, in quanto la radice terza rimane elevando al quadrato.

Bisogna quindi cercare di rifarsi alla differenza di due cubi.

Ricordiamo che per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  risulta

$$(a - b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3.$$

Cerchiamo di applicarla al nostro esercizio, essendo

$$a = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}, \quad b = x.$$

Moltiplichiamo sia numeratore sia denominatore per il fattore mancante della scomposizione: si ha

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} - x \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left( \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} - x \right) \cdot \left( \left( \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} \right)^2 + x^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} \right)}{\left( \left( \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} \right)^2 + x^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} \right)}. \end{aligned}$$

Per la scomposizione richiamata poco fa, si ottiene

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^3 - 2x^2 + 1 - x^3)}{\left( \left( \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} \right)^2 + x^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} \right)} = \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-2x^2 + 1)}{\left( \left( \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} \right)^2 + x^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} \right)}, \end{aligned}$$

che si presenta nella forma indeterminata  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Dobbiamo quindi raccogliere, sia a numeratore sia a denominatore, gli infiniti di ordine maggiore.

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(-2 + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}\right)^2 + x^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}} &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(-2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + x^2 + x^2 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}} &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(-2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left[\left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + 1 + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}\right]} &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}\right)^2 + 1 + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}} &= \frac{-2}{1 + 1 + 1} = -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

dato che

$$\frac{1}{x^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^3} \rightarrow 0, \quad \frac{2}{x} \rightarrow 0, \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

9) Si discuta, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il valore del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + \arctan n}{n^\alpha [(n-2)!] \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)}.$$

**Svolgimento.**

Consideriamo i vari fattori.

Il primo fattore, vale a dire il numeratore, consta di due addendi:  $n!$  e  $\arctan n$ .

Poiché  $n! \rightarrow \infty$  e  $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , teniamo l'addendo di infinito dominante, vale a dire  $n!$ .

I primi due fattori del denominatore,  $n^\alpha$  ed  $(n-2)!$ , si presentano già in forma favorevole.

Il fattore  $(1 - \cos \frac{1}{n})$ , invece, lo trattiamo col solito limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2},$$

moltiplicando numeratore e denominatore della frazione per il fattore  $\frac{1}{n^2}$ .

Risulta quindi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^\alpha [(n-2)!] \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}} &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot n^2}{n^\alpha (n-2)!} = \\ &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)! \cdot n^2}{n^\alpha (n-2)!} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3(n-1)}{n^\alpha} = \\ &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - n^3}{n^\alpha} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

Pertanto si presentano le seguenti eventualità:

- se  $\alpha = 4$ , il limite vale 2;
- se  $\alpha < 4$ , il limite vale  $+\infty$ ;
- se  $\alpha > 4$ , il limite vale 0.

#### 10) [T.E. 23/03/2004]

Sia  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Si discuta, al variare del parametro  $\beta$ , il valore del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n+\beta \log n} + 3}{e^{n+7} + n^3} \sin \frac{2}{n^2}.$$

#### **Svolgimento.**

Applicando la proprietà delle potenze riscriviamo il limite come

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n \cdot e^{\beta \log n} + 3}{e^n \cdot e^7 + n^3} \sin \frac{2}{n^2}.$$

Ricordando la proprietà dei logaritmi

$$m \log x = \log x^m, \quad \text{per ogni } x > 0 \text{ e per ogni } m \in \mathbb{R},$$

e che

$$e^{\log x} = x \quad \text{per ogni } x > 0,$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n \cdot e^{\log n^\beta} + 3}{e^n \cdot e^7 + n^3} \sin \frac{2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n \cdot n^\beta + 3}{e^n \cdot e^7 + n^3} \sin \frac{2}{n^2}.$$

Cerchiamo di stabilire il comportamento di ogni fattore.

Cominciamo col considerare il fattore

$$e^n \cdot n^\beta + 3.$$

È ben noto che, per  $n \rightarrow +\infty$ ,

- $n^\beta \rightarrow +\infty$  quando  $\beta > 0$
- $n^\beta = 1$  quando  $\beta = 0$
- $n^\beta \rightarrow 0$  quando  $\beta < 0$ .

Tuttavia, indipendentemente da questa casistica, si ha

$$e^n \cdot n^\beta \rightarrow +\infty, \quad \text{per ogni } \beta \in \mathbb{R}.$$

Infatti si ha:

$$\text{se } \beta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot n^\beta = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$\text{se } \beta < 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot n^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^{-\beta}} \rightarrow +\infty,$$

(osserviamo che, essendo  $\beta < 0$ , si ha  $-\beta > 0$ , quindi  $n^{-\beta} \rightarrow +\infty$ .)

Ricordando la scala degli infiniti, si ha che il limite tende a  $+\infty$ .)

$$\text{se } \beta = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot n^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n \cdot 1 \rightarrow +\infty.$$

Quindi, nel primo fattore

$$e^n \cdot n^\beta + 3$$

teniamo solo il primo addendo, ossia

$$e^n \cdot n^\beta,$$

che tende all'infinito (il secondo addendo, 3, è una quantità finita).

Considerando invece il fattore

$$e^n \cdot e^7 + n^3,$$

somma di due infiniti, come sempre, teniamo l'addendo di infinito maggiore, cioè  $e^n \cdot e^7$ .

Infine, il terzo fattore

$$\sin \frac{2}{n^2},$$

lo trattiamo col limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

moltiplicando e dividendo la successione per il fattore infinitesimo  $\frac{2}{n^2}$ .

Quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n \cdot n^\beta}{e^n \cdot e^7} \cdot \frac{2}{n^2} \cdot \frac{\sin \frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n \cdot n^\beta}{e^n \cdot e^7} \cdot \frac{2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e^7} \cdot \frac{n^\beta}{n^2}.$$

Procediamo con la discussione:

- se  $\beta = 2$  il limite risulta  $\frac{2}{e^7}$ ;
- se  $\beta > 2$  il limite risulta  $+\infty$ ;
- se  $\beta < 2$  il limite risulta 0.

11) [T.E. 01/09/2011]

Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! \left( e^{\frac{1}{3(n-1)!}} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{n^6}{4} + 7n^4 + \log^2(n+1)}}.$$

**Svolgimento.**

Analizziamo i vari fattori che compaiono.

Il fattore

$$(n + 2)!$$

tende ovviamente all'infinito. Dovremo, nel corso dell'esercizio, riscriverlo opportunamente a seconda del tipo di altri fattoriali che compariranno.

Poiché

$$(n - 1)! \rightarrow +\infty,$$

è chiaro che

$$\frac{1}{3(n - 1)!} \rightarrow 0,$$

pertanto il fattore

$$\left( e^{\frac{1}{3(n-1)!}} - 1 \right)$$

è del tipo

$$e^t - 1 \quad \text{con } t \rightarrow 0.$$

Interverremo su tale fattore cercando di applicare il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

moltiplicando e dividendo per il fattore infinitesimo

$$t = \frac{1}{3(n - 1)!}.$$

Infine, l'ultimo fattore,

$$\sqrt{\frac{n^6}{4} + 7n^4 + \log^2(n + 1)},$$

è dato da un'unica radice quadrata sotto la quale compaiono 3 addendi, ciascuno dei quali tende a  $+\infty$ .

In casi come questi, siamo interessati a considerare solamente l'addendo di infinito maggiore, vale a dire

$$\frac{n^6}{4},$$

ricordando la scala di infiniti di successioni notevoli.  
Pertanto possiamo riscrivere il limite come

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! \left( e^{\frac{1}{3(n-1)!}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{3(n-1)!}}{\frac{1}{3(n-1)!} \sqrt{\frac{n^6}{4}}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! \cdot 1 \cdot \frac{1}{3(n-1)!}}{\frac{n^3}{2}}. \end{aligned}$$

Riscriviamo  $(n+2)!$  come

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)n(n-1)!$$

e otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)! \cdot \frac{1}{3(n-1)!}}{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+1)n \cdot \frac{1}{3}}{\frac{n^3}{2}},$$

che, per i soliti discorsi, diviene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3}{3}}{\frac{n^3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

12) [T.E. 11/02/2011]

Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[(n+3)! - n!] e^{\sin(2/n)}}{(e^{1/n} + 1)(n^3 - 1)(n! - \log n)}.$$

**Svolgimento.**

Come sempre, consideriamo ciascun fattore cercando di stabilire a cosa tenda.  
Il primo fattore,

$$[(n+3)! - n!]$$

è dato dalla sottrazione di due fattoriali. In casi come questo dobbiamo sviluppare opportunamente facendo comparire il fattoriale di argomento più piccolo.

Si ha

$$[(n+3)! - n!] = [(n+3)(n+2)(n+1)n! - n!] = n! [(n+3)(n+2)(n+1) - 1].$$

La parentesi quadra è data da un opportuno polinomio di grado 3 ottenuto moltiplicando i primi tre binomi e sommandogli l'addendo 1. Per i soliti discorsi, poiché  $n \rightarrow +\infty$ , possiamo tenere solamente l'addendo di grado maggiore di tale polinomio (con relativo coefficiente). Il primo fattore del limite, quindi, lo riscriveremo come

$$n!(n^3).$$

Consideriamo ora il fattore

$$e^{\sin(2/n)}.$$

Poiché

$$\frac{2}{n} \rightarrow 0,$$

si ha

$$\sin \frac{2}{n} \rightarrow 0,$$

da cui

$$e^{\sin(2/n)} \rightarrow e^0 = 1.$$

Pertanto il secondo fattore tende alla quantità finita 1.

Il terzo fattore

$$(e^{1/n} + 1)$$

tende a

$$e^0 + 1 = 1 + 1 = 2;$$

non si tratta quindi di un fattore infinitesimo.

Il quarto fattore

$$(n^3 - 1)$$

è un polinomio che tende all'infinito.

Terremo solamente l'addendo

$$n^3.$$

Infine, il fattore

$$(n! - \log n)$$

è dato dalla somma algebrica di due addendi tendenti all'infinito. Ricordando la scala degli infiniti, siamo autorizzati a tenere solamente l'addendo  $n!$  (trattandosi dell'infinito di ordine maggiore).

Pertanto il limite diviene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!(n^3) \cdot 1}{2 \cdot (n^3)(n!)} = \frac{1}{2}.$$

13) [T.E. 18/03/2008]

Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{x^4}{4} \right)^{\frac{4(e^{2x^4} - 1)}{[1 - \cos(2x^2)]^2}}.$$

**Svolgimento.**

Cominciamo con una prima analisi del limite facendo tendere  $x$  a 0. Il limite tende a

$$(1 + 0)^{\frac{4(e^0 - 1)}{[1 - \cos(0)]^2}} = (1)^{\frac{0}{0}}.$$

Anzitutto osserviamo che la base della potenza è della forma

$$(1 + y), \quad \text{con } y = -\frac{x^4}{4} \rightarrow 0.$$

Cerchiamo quindi di applicare il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e,$$

moltiplicando e dividendo l'esponente della potenza per il reciproco di  $y$ , vale a dire

$$-\frac{4}{x^4}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \left( -\frac{x^4}{4} \right) \right]^{-\frac{4}{x^4} \cdot \frac{-x^4}{4} \cdot \frac{4(e^{2x^4} - 1)}{[1 - \cos(2x^2)]^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[ 1 + \left( -\frac{x^4}{4} \right) \right]^{-\frac{4}{x^4}} \right\}^{\frac{-x^4}{4} \cdot \frac{4(e^{2x^4} - 1)}{[1 - \cos(2x^2)]^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-x^4}{4} \cdot \frac{4(e^{2x^4} - 1)}{[1 - \cos(2x^2)]^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4}{4} \cdot \frac{4(e^{2x^4} - 1)}{[1 - \cos(2x^2)]^2}}, \end{aligned}$$

grazie al teorema di sostituzione.

Calcoliamo quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4}{4} \cdot \frac{4(e^{2x^4} - 1)}{[1 - \cos(2x^2)]^2},$$

che si presenta nella forma indeterminata

$$\frac{0}{0}.$$

Cerchiamo di applicare i limiti notevoli.

In particolare, il fattore

$$(e^{2x^4} - 1)$$

è del tipo

$$(e^y - 1) \quad \text{con } y \rightarrow 0,$$

pertanto è trattabile ricorrendo al limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$$

moltiplicando e dividendo tale fattore per  $y = (2x^4)$ .

Il fattore

$$[1 - \cos(2x^2)]$$

è del tipo

$$(1 - \cos t), \quad \text{con } t \rightarrow 0.$$

Ricordiamo quindi il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

e cerchiamo di applicarlo al nostro esercizio, moltiplicando e dividendo il fattore in questione per

$$t^2 = ((2x^2)^2) = 4x^4.$$

Quindi il limite diviene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4}{4} \cdot \frac{4(e^{2x^4} - 1)(2x^4)}{(2x^4) \frac{[1 - \cos(2x^2)]^2}{(4x^4)^2} (4x^4)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4}{4} \cdot \frac{8x^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 16x^8} = -\frac{1}{2}.$$

In conclusione, il limite iniziale vale

$$e^{-\frac{1}{2}}.$$

14) [T.E. 13/07/2010]

Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+7)^n + 2n^n}{n^n + 8n! + 2^n}.$$

**Svolgimento.**

La successione è costituita da 2 fattori (uno a numeratore, l'altro a denominatore).

Studiamo ciascun fattore.

Il fattore

$$(n+7)^n + 2n^n$$

è dato dalla somma di due addendi che tendono entrambi all'infinito; si tratta, però, di addendi della stessa famiglia di infiniti.

Come osservato in classe, in casi come questo, è errato trascurare uno dei due addendi; infatti, essendo della stessa famiglia, danno entrambi contributo al valore finale del limite.

Procediamo nel seguente modo: raccogliamo uno dei due addendi (per semplicità, quello la cui base è costituita da un monomio). Si ha

$$(n+7)^n + 2n^n = n^n \cdot \left[ \frac{(n+7)^n}{n^n} + 2 \right] = n^n \left[ \left( \frac{n+7}{n} \right)^n + 2 \right].$$

Il fattore a denominatore, invece, è dato dalla somma di tre addendi che tendono all'infinito ma appartenenti a tre famiglie differenti di infiniti. In questo caso teniamo solamente l'infinito dominante, vale a dire

$$n^n.$$

Il limite iniziale diviene perciò

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n \left[ \left( \frac{n+7}{n} \right)^n + 2 \right]}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{n+7}{n} \right)^n + 2 \right].$$

Consideriamo il primo dei due addendi in quadra e cerchiamo di stabilire a cosa tenda.

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+7}{n} \right)^n = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]^{+\infty},$$

che, tenendo l'addendo di infinito maggiore in ciascun fattore della frazione alla base della potenza, diviene

$$[1]^\infty.$$

Si tratta della forma indeterminata del limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Cerchiamo di scrivere la base della potenza in questo modo. Si ha immediatamente

$$\left( \frac{n+7}{n} \right)^n = \left( \frac{n}{n} + \frac{7}{n} \right)^n = \left( 1 + \frac{7}{n} \right)^n.$$

Per poter applicare il limite notevole (combinato col teorema di sostituzione) dovremmo avere all'esponente il reciproco di  $y = \frac{7}{n}$ , vale a dire

$$\frac{n}{7}.$$

In questo caso è sufficiente moltiplicare e dividere l'esponente per il fattore 7 e applicare la proprietà della potenza di potenza.

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+7}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left( 1 + \frac{7}{n} \right)^{\frac{n}{7}} \right\}^7 = e^7.$$

In definitiva

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{n+7}{n} \right)^n + 2 \right] = e^7 + 2.$$

## LIMITI CON CONFRONTI DI INFINITESIMI

Ricordiamo che una funzione  $f$  si dice **infinitesima per  $x \rightarrow x_0$**  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Assegnate due funzioni  $f$  e  $g$ , entrambe infinitesime per  $x \rightarrow x_0$ , diciamo che  $f$  e  $g$  **hanno lo stesso ordine di infinitesimo per  $x \rightarrow x_0$**  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq \{0, \infty\}.$$

Se  $\ell = 1$ , diremo che  $f$  e  $g$  sono due **infinitesimi equivalenti** per  $x \rightarrow x_0$ .

Il limite scritto sopra sta a significare che in prossimità di  $x_0$ , nessuna delle due funzioni tende a zero più rapidamente dell'altra. Ecco perché le due funzioni si dicono dello stesso ordine di infinitesimo o infinitesimi equivalenti.

La situazione precedente si può anche trovare espressa nella scrittura alternativa

$$f \sim \ell \cdot g \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Abbiamo visto a lezione, ricordando i limiti notevoli studiati, alcuni esempi di infinitesimi equivalenti.

Ad esempio, abbiamo detto che

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \log(1+x) \sim x, \dots$$

per  $x \rightarrow 0$ .

L'idea che suggeriscono tali scritture è il fatto di poter approssimare, in un intorno di 0 (per esempio), funzioni infinitesime di natura goniometrica, trascendente con funzioni polinomiali, ben più semplici da trattare (ad esempio nel calcolo dei limiti).

In ogni caso, le approssimazioni appena introdotte sono valide solamente quando si svolgono operazioni di passaggio al limite.

Pertanto verrebbe la tentazione di sostituire, nel calcolo dei limiti, un termine infinitesimo con un infinitesimo (polinomiale) ad esso equivalente.

Tuttavia un passaggio di questo tipo non sempre è lecito.

Se un *fattore* che compare nel limite in esame risulta costituito da un unico termine infinitesimo, la sostituzione è lecita.

Se invece un *fattore* risulta infinitesimo perché somma di *addendi* infinitesimi, in quel caso bisogna procedere con cautela controllando che **la sostituzione degli infinitesimi non porti a forme indeterminate o a cancellazioni di termini che contribuiscono al risultato finale**.

Qualora si verificassero cancellazioni, la sostituzione degli infinitesimi con gli infinitesimi polinomiali dedotti dai limiti notevoli non consente di risolvere l'esercizio: in questi casi si deve fare ricorso agli sviluppi di Taylor per le funzioni derivabili.

Mostriamo alcuni esempi.

1) Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(2x) - \sin x + 3 \tan x] (1 - \cos x)}{(\tan^2 x + x^3)(e^x - 1)}.$$

**Svolgimento.**

Analizziamo i vari fattori.

Il fattore

$$\sin(2x) - \sin x + 3 \tan x$$

è infinitesimo ma costituito dalla somma di tre addendi infinitesimi. Dobbiamo quindi prestare attenzione durante la sostituzione degli infinitesimi.

Poiché (in forza dei limiti notevoli)

$$\sin(2x) \sim 2x, \quad \sin x \sim x, \quad \tan x \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

proviamo a riscrivere il fattore in questione come segue:

$$2x - x + 3x.$$

Ci accorgiamo che non si genera alcuna cancellazione tra gli addendi. Pertanto la sostituzione degli addendi infinitesimi in questo primo fattore risulta essere efficace.

Il secondo fattore,

$$1 - \cos x$$

è nel complesso un infinitesimo (non è la somma di addendi infinitesimi). In questo caso la sostituzione è indubbiamente possibile.

Sostituiamo

$$1 - \cos x$$

con

$$\frac{1}{2}x^2.$$

Il terzo fattore

$$\tan^2 x + x^3$$

è infinitesimo, ma risulta essere la somma di due addendi infinitesimi,  $\tan^2 x$  e  $x^3$ .

Sostituendo

$$\tan^2 x$$

con

$$x^2,$$

si perviene al nuovo fattore

$$x^2 + x^3,$$

privo di cancellazioni.

Per concludere, il quarto e ultimo fattore,

$$e^x - 1,$$

essendo un fattore infinitesimo (ma non somma di addendi distinti infinitesimi), viene tranquillamente sostituito con l'equivalente

$$x.$$

Pertanto il limite iniziale diviene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - x + 3x) \cdot \frac{1}{2}x^2}{(x^2 + x^3)x} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{x^3 + x^4} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{x^3(1+x)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{1+x} = 2. \end{aligned}$$

2) Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2 \sin x - \tan^3 x}{1 - \cos x}.$$

***Svolgimento.***

Il primo fattore

$$e^{2x} - 1 - 2 \sin x - \tan^3 x$$

è infinitesimo in quanto somma di tre addendi infinitesimi, vale a dire

$$(e^{2x} - 1), \quad 2 \sin x, \quad -\tan^3 x.$$

Dobbiamo quindi prestare attenzione durante la sostituzione degli infinitesimi.

Si ha

$$(e^{2x} - 1) \sim 2x,$$

$$2 \sin x \sim 2 \cdot x,$$

$$\tan^3 x \sim x^3.$$

Pertanto, sostituendo, si ottiene il fattore

$$2x - 2x - x^3,$$

nel quale si ha la cancellazione di due addendi.

In questo caso, è necessario ricorrere agli sviluppi in serie di Taylor.

Lasciamo per il momento in sospenso la soluzione dell'esercizio.

3) Si calcoli il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - 2 \tan \frac{3}{n}}{e^{1/n^2} - 1} \cdot \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

**Svolgimento.**

Il primo fattore

$$\sin \frac{1}{n} - 2 \tan \frac{3}{n}$$

è infinitesimo per  $n \rightarrow +\infty$ , ed è dato dalla somma di due infinitesimi,

$$\sin \frac{1}{n} \quad e \quad -2 \tan \frac{3}{n}.$$

Si ha

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \tan \frac{3}{n} \sim \frac{3}{n}.$$

Quindi, sostituendo, il primo fattore diviene

$$\frac{1}{n} - 2 \cdot \frac{3}{n},$$

privo di cancellazioni.

Il fattore

$$\log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

è un infinitesimo: può essere sostituito con  $\frac{1}{n}$ .

Stesso discorso per il fattore

$$e^{1/n^2} - 1,$$

sostituibile immediatamente con  $\frac{1}{n^2}$ .

Il limite diviene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{n} - \frac{6}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -5.$$

4) Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{1 - \frac{\sin x}{x}}.$$

**Svolgimento.**

Il fattore

$$\sin^2 x + \cos x - 1$$

è infinitesimo e dato dalla somma di due addendi infinitesimi,

$$\sin^2 x \text{ e } (\cos x - 1).$$

Si ha

$$\sin^2 x \sim x^2, \quad (\cos x - 1) = -(1 - \cos x) \sim -\frac{1}{2}x^2.$$

Pertanto, sostituendo gli infinitesimi, si ottiene il fattore

$$x^2 - \frac{1}{2}x^2,$$

in cui non compaiono cancellazioni.

Il fattore

$$1 - \frac{\sin x}{x},$$

esso è infinitesimo in quanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Tale fattore si può riscrivere come

$$\frac{x - \sin x}{x}.$$

Ricordando che

$$\sin x \sim x,$$

sostituendo si giunge a

$$\frac{x - x}{x},$$

cioè a una cancellazione.

Con gli strumenti attuali, non è possibile proseguire con lo svolgimento.

## STUDIO DI SUCCESSIONI

1) [T.E. 29/03/2010]

Si determinino  $\inf A$ ,  $\sup A$  ed, eventualmente,  $\min A$  e  $\max A$ , essendo

$$A = \left\{ 3 \arctan \left[ \log \left( \frac{n+1}{n^2} \right) \right], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

**Svolgimento.**

Cominciamo con lo studiare il comportamento della successione

$$a_n = \frac{n+1}{n^2}.$$

Cerchiamo di stabilire se  $a_n$  è crescente o decrescente.

Supponiamo, ad esempio, che  $a_n$  sia crescente, ossia

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n},$$

per un certo  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ .

Si ha

$$\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2} \geq \frac{n+1}{n^2},$$

cioè

$$\frac{n+2}{n^2+2n+1} \geq \frac{n+1}{n^2},$$

da cui

$$n^3 + 2n^2 \geq n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1,$$

ossia

$$-n^2 - 3n - 1 \geq 0,$$

che non è mai verificata (non dimentichiamoci del fatto che  $n$  è un naturale, quindi  $n > 0$ ).

Quindi la successione  $(a_n)$  è decrescente.

La funzione  $\log$  è crescente; pertanto la composizione

$$\log \left( \frac{n+1}{n^2} \right)$$

è decrescente.

Infine, la funzione  $\arctan$  è crescente su tutto il suo dominio; ne segue che la composizione

$$\arctan \left[ \log \left( \frac{n+1}{n^2} \right) \right]$$

è una successione decrescente. Moltiplicando per la costante positiva 3, si ottiene la successione finale

$$b_n = 3 \arctan \left[ \log \left( \frac{n+1}{n^2} \right) \right], \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

che si mantiene decrescente.

Per il teorema sulle successioni monotone si ha:

$$\begin{aligned} \sup A &= \max A = b_1 = 3 \arctan \log 2; \\ \inf A &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \arctan \log(0^+) = 3 \arctan(-\infty) = 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

2) Si determinino  $\inf A$ ,  $\sup A$  ed, eventualmente,  $\min A$  e  $\max A$ , essendo

$$A = \left\{ \frac{\cos n\pi}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

***Svolgimento.***

Cerchiamo anzitutto di capire come si comporta il termine

$$\cos n\pi.$$

Valutiamolo nei primi numeri naturali, cercando di dedurne un comportamento generale. Si ha

$$\text{per } n = 0, \quad \cos(0\pi) = \cos(0) = 1,$$

$$\text{per } n = 1, \quad \cos(1 \cdot \pi) = -1,$$

$$\text{per } n = 2, \quad \cos(2\pi) = 1,$$

$$\text{per } n = 3, \quad \cos(3\pi) = -1,$$

e così via.

Quindi

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Pertanto, osserviamo, la successione  $\cos(n\pi)$  coincide con la successione  $(-1)^n$ .

Ne segue che la successione iniziale diviene

$$a_n = \frac{\cos n\pi}{3} + \frac{1}{n+3} = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{n+3} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi il grafico globale della successione  $a_n$  è dato dall'unione dei due grafici delle due sottosuccessioni

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n \text{ pari}$$

e

$$c_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n \text{ dispari}.$$

Determiniamo quindi separatamente inf e sup di ciascuna delle due sottosuccessioni  $b_n$  e  $c_n$  e considereremo inf  $a_n$  il più piccolo tra i due inf trovati e sup  $a_n$  il più grande dei due sup trovati.

Cominciamo con lo studio di  $b_n = 1 + \frac{1}{n+3}$ , con  $n$  pari, vale a dire

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

La successione

$$n+3$$

è crescente, pertanto, per quanto detto a lezione, la successione

$$\frac{1}{n+3}$$

è decrescente.

L'aggiunta dell'addendo  $+\frac{1}{3}$  non modifica la monotonia della successione: quindi la sottosuccessione

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$$

è decrescente.

Per il teorema sulle successioni monotone si ha

$$\inf b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3},$$

$$\sup b_n = \max b_n = b_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{0+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Studiamo ora la sottosuccessione

$$c_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{n+3}, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Anche in questo caso la successione è monotona decrescente (l'aggiunta dell'addendo  $-1$  non influenza la monotonia).

Pertanto si ha

$$\inf b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{n+3} \right) = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}$$

$$\sup b_n = \max b_n = b_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{1+3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

Tornando alla successione iniziale si ha

$$\inf a_n = -\frac{1}{3}, \quad \sup a_n = \max a_n = \frac{2}{3},$$

da cui

$$\inf A = -\frac{1}{3}, \quad \sup A = \max A = \frac{2}{3}.$$

### 3) [T.E. 03/04/2007]

Si determinino  $\inf A$ ,  $\sup A$  ed, eventualmente,  $\min A$  e  $\max A$ , essendo

$$A = \left\{ \max \left\{ \frac{8n+1}{n}, n^2+1 \right\}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

#### ***Svolgimento.***

La successione  $a_n$  che dobbiamo studiare,

$$a_n = \max \left\{ \frac{8n+1}{n}, n^2+1 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

è quella successione che associa ad ogni numero naturale  $n > 0$  il massimo (vale a dire il più grande) tra i due valori assunti rispettivamente dalla successione

$$b_n = \frac{8n+1}{n}$$

e dalla successione

$$c_n = n^2 + 1.$$

Cerchiamo anzitutto di stabilire le caratteristiche principali di ciascuna delle due successioni in gioco.

Cominciamo da

$$b_n = \frac{8n+1}{n} = 8 + \frac{1}{n} \quad n > 0.$$

Per quanto già osservato in precedenza, tale successione è indubbiamente decrescente.

Si ha

$$\sup b_n = \max b_n = b_1 = 8 + \frac{1}{1} = 9, \quad \inf b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 8 + \frac{1}{n} \right) = 8.$$

Studiamo ora la successione

$$c_n = n^2 + 1, \quad n > 0$$

sicuramente crescente.

Si ha, in questo caso,

$$\inf c_n = \min c_n = c_1 = 1 + 1 = 2, \quad \sup c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty.$$

Vista la monotonia e visti i valori di inf e sup delle due successioni, viene naturale congetturare che inizialmente i valori assunti dalla  $c_n$  siano inferiori rispetto a quelli assunti da  $B_n$ , dopodiché, da un certo naturale  $\bar{n}$  in poi, la situazione si capovolga: i valori assunti da  $b_n$  sono maggiori di quelli assunti da  $c_n$ .

Valutiamo quindi le due successioni nei primi naturali.

Si ha

$$b_1 = 9, \quad b_2 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} = 8,5, \quad b_3 = 8 + \frac{1}{3} = \frac{25}{3} = 8,\bar{3}, \quad b_4 = 8 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4} = 8,25, \dots$$

$$c_1 = 1 + 1 = 2, \quad c_2 = 4 + 1 = 5, \quad c_3 = 9 + 1 = 10, \quad c_4 = 16 + 1 = 17, \dots$$

Per  $1 \leq n \leq 2$  si ha  $c_n < b_n$ , mentre per  $n \geq 3$ , si ha  $c_n > b_n$ .

Pertanto, per quanto riguarda la successione  $a_n$  si avrà

$$a_1 = \max \{b_1, c_1\} = \max \{9, 2\} = 9,$$

$$a_2 = \max \{b_2, c_2\} = \max \left\{ \frac{17}{2}, 5 \right\} = \frac{17}{2},$$

$$a_3 = \max \{b_3, c_3\} = \max \left\{ \frac{25}{3}, 10 \right\} = 10$$

$$a_4 = \max \{b_4, c_4\} = \max \left\{ \frac{33}{4}, 17 \right\} = 17,$$

e così via, crescendo sempre più sino a tendere a  $\sup c_n = +\infty$ .

In conclusione, riassumendo tutte le considerazioni fatte, risulta

$$\inf a_n = \min a_n = \frac{17}{2}, \quad \sup a_n = +\infty,$$

cioè

$$\inf A = \min a_n = \frac{17}{2}, \quad \sup A = +\infty.$$