# ESERCIZI SULLE SERIE NUMERICHE

**a cura di Michele Scaglia**

## RICHIAMI TEORICI

Richiamiamo brevemente i principali risultati riguardanti le serie numeriche.

**Teorema (Condizione Necessaria per la Convergenza)**

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie numerica.

Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, allora deve necessariamente essere $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Qual è il significato di questo teorema? Come viene applicato?

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è sicuramente NON CONVERGENTE.

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie può convergere oppure non convergere. Servono allora i criteri di convergenza per studiarne il carattere.

Il teorema esprime quindi una condizione necessaria ma non sufficiente ai fini della convergenza. Necessaria in quanto, se $\lim_{n} a_n \neq 0$, sicuramente la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ non converge; non sufficiente in quanto, come già osservato, la condizione $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ non garantisce la convergenza della serie. Si pensi ad esempio alla serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

divergente, ma verificante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

## SERIE A TERMINI POSITIVI

Si chiamano serie a termini positivi quelle serie numeriche i cui addendi, da un certo indice $\overline{n}$ in poi, assumono tutti valore di segno positivo.
Non importa se i primi (in numero finito) termini di una serie sono di segno negativo o alterno; quello che conta (per poter affermare di essere in presenza di una serie a termini positivi) è che da un certo $\overline{n}$ in poi i termini che si sommano non cambino mai più segno fino all'infinito.

Ad esempio, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-10}{n^3(n+1)},$$

è a termini positivi.
Infatti, se elenchiamo i suoi termini in ordine crescente di indice, abbiamo

$$a_1 = \frac{1-10}{1(1+1)} = -\frac{9}{2},\ a_2 = \frac{4-10}{8(3)} = -\frac{1}{4},\ a_3 = \frac{9-10}{27(4)} = -\frac{1}{108},\ a_4 = \frac{16-10}{64(5)} = +\frac{3}{160}, \ldots$$

e così via.
Da $\overline{n} = 4$ tutti gli addendi hanno segno positivo. Quindi la serie è a termini positivi.

Si dimostra un teorema che afferma che le serie a termini positivi possono solamente essere convergenti oppure positivamente divergenti (avere cioè per somma $+\infty$). Non possono essere indeterminate.

Una precisazione: vi sono anche le serie di termine negativo: lo studio del loro carattere è lo stesso di quello delle serie a termini positivi. Questo perché, raccogliendo il segno meno nel termine generale della serie e portandolo fuori dalla sommatoria (sfruttando la *linearità*), si ottiene l'opposta di una serie a termini positivi. Pertanto la convergenza o divergenza è ricondotta alla convergenza o divergenza della corrispondente serie a termini positivi (ovviamente, se la serie a termini positivi converge, la corrispondente serie a termini negativi converge ma ad un valore numerico opposto; idem per la divergenza (avremo la divergenza a $-\infty$)).
Ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge positivamente (essendo la serie armonica), ne segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$$

diverge negativamente.

Il problema è invece rappresentato dalle serie di segno variabile (in cui il segno degli addendi non è costante e può anche variare senza una particolare regola). Ma su di queste torneremo più avanti.

Per le serie a termini positivi valgono dei criteri che consentono di stabilirne il carattere (convergenza o positiva divergenza).

**CRITERIO DEL CONFRONTO**

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi. Supponiamo che si abbia

$$a_n \leq b_n,$$

da un certo $\overline{n}$ in poi.
Allora valgono i seguenti fatti:

- Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
- Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge allora anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge.

Il teorema dice sostanzialmente questo:

- Essendo, $n$ per $n$, il generico addendo $a_n$ minore di $b_n$, è ovvio che se la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge anche la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converga (in quanto si stanno sommando addendi più piccoli di quelli sommati nella serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, che comunque la rendevano convergente).
- Analogamente, poiché $a_n \leq b_n$, è facile convincersi del fatto che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge, in quanto in essa si sommano addendi più grandi di quegli altri che già facevano divergere la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Se invece

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

diverge, nulla si può dire del carattere della serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, in quanto avendo gli addendi più piccoli, potrebbe essere convergente ma anche divergente. Quindi il criterio non è applicabile.

Analogamente, se

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

converge, non si può dir nulla circa il carattere di

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n,$$

in quanto i suoi addendi, essendo più grandi di quelli della prima serie, potrebbero comportare la divergenza della seconda serie, come pure potrebbero comportarne la convergenza.

## CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi.
Consideriamo, se esiste, il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

1. Se $\ell \in ]0, \infty[$, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge, cioè le due serie hanno esattamente lo stesso carattere.
2. Se $\ell = 0$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
3. Se $\ell = +\infty$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.

Il punto più importante del precedente teorema è senza ombra di dubbio il punto 1. Esso dice infatti che se $\ell \neq 0$ e $\ell \neq \infty$ allora le due serie hanno esattamente lo stesso carattere (la convergenza/divergenza dell'una comporta la convergenza/divergenza dell'altra, e viceversa), senza preoccuparsi del carattere della serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$.

Questo criterio si usa fondamentalmente quando si vuole studiare il carattere di una serie il cui termine generale è complicato.

Si cerca quindi di esibire un'opportuna successione $b_n$ più semplice da studiare della $a_n$ e che verifichi

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in ]0, \infty[.$$

In tal modo si studia il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, che è lo stesso di $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Ma come introdurre la successione $b_n$ che renda quel limite diverso da zero e da $\infty$?

Fondamentalmente si segue questa regola. Si guardano i vari **fattori** che compaiono nel termine generale della serie.

- Se un fattore tende a $\infty$, lo si sostituisce con l'addendo di **infinito maggiore**.
- Se invece un fattore è **infinitesimo**, lo si sostituisce con la parte mancante di un opportuno **limite notevole** o con lo **sviluppo in serie di Taylor**, opportunamente arrestato a qualche ordine.
- Se infine un **fattore** tende ad una **quantità finita**, lo si **sostituisce con tale quantità**.

Ad esempio. Semplifichiamo il termine generale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3 + \log n - \arctan n)\sin\dfrac{2}{n}}{e^{2/n}(\log n)^2}.$$

Si ha

$$a_n = \frac{(n^3 + \log n - \arctan n)\sin\dfrac{2}{n}}{e^{2/n}(\log n)^2}.$$

Il **primo fattore**: $(n^3 + \log n - \arctan n)$.
Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 + \log n - \arctan n\right) = +\infty.$$

In questo caso dobbiamo individuare l'infinito maggiore. Si tratta di $n^3$.

Il **secondo fattore**: $\sin\dfrac{2}{n}$.
Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{2}{n} = 0,$$

cioè il secondo fattore è infinitesimo.

Cerchiamo quindi la parte mancante di un noto limite notevole.
Ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \in ]0, \infty[,$$

si ha, nel nostro caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 1 \in ]0; \infty[.$$

Quindi sostituiremo $\sin\dfrac{2}{n}$ con $\dfrac{2}{n}$.

Il **terzo fattore**: $e^{1/n}$.
Si ha

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1 \in ]0;\infty[.$$

Tale fattore lo sostituiamo con 1.

**Quarto fattore**: $(\log n)^2$.
Questo fattore si presenta già in una forma favorevole.

Se introduciamo quindi la nuova successione

$$b_n = \frac{n^3 \cdot \frac{2}{n}}{(\log n)^2},$$

non ci meravigliamo del fatto che si ottenga (visto come l'abbiamo costruita)

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3 + \log n - \arctan n)\sin\frac{2}{n}}{e^{2/n}(\log n)^2} \cdot \frac{(\log n)^2}{n^3 \cdot \frac{2}{n}} = 1 \in ]0;+\infty[.$$

Pertanto si dovrà studiare il carattere di

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 \cdot \frac{2}{n}}{(\log n)^2} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{-2}(\log n)^2},$$

facilmente trattabile in quanto riconducibile alla serie armonica generalizzata con il logaritmo.

## CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.
Consideriamo il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Valgono i seguenti fatti.

1. Se $\ell < 1$ allora $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
2. Se $\ell > 1$, allora $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.
3. Se $\ell = 1$, allora non si può concludere nulla circa il carattere di $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

**CRITERIO DELLA RADICE**

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.
Consideriamo il limite
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Valgono i seguenti fatti.

1. Se $\ell < 1$ allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
2. Se $\ell > 1$, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.
3. Se $\ell = 1$, allora non si può concludere nulla circa il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

## SERIE DI SEGNO VARIABILE

Sono dette serie di segno variabile quelle serie il cui termine generale non assume segno costante.

Ad esempio
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^2+1}$$
sono delle serie di segno variabile (in particolare, la seconda è di segno alterno, in quanto i suoi addendi si alternano uno positivo, uno negativo, uno positivo, ....).
Per lo studio di tali serie esistono fondamentalmente due criteri. Quello della convergenza assoluta (che può essere invocato in presenza di una qualsivoglia serie di segno variabile), e il criterio di Leibniz (applicabile solo per le serie di segno alterno).

**CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA**

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie di segno variabile.
Se la serie
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$$
converge, allora converge pure la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (si dice che la serie converge assolutamente).

Se invece

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$$

diverge, non si può concludere nulla circa il carattere della serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Il seguente criterio vale solo per le serie di segno alterno, ossia della forma

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad \text{con} \quad b_n \geq 0.$$

**CRITERIO DI LEIBNIZ**

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ una serie di segno alterno.

Se si ha che

- $\lim_n b_n = 0$ e
- $\{b_n\}$ è una successione monotona decrescente, ossia tale che $b_{n+1} \leq b_n$,

allora

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$$

converge.

Ora ci chiediamo: di solito come ci si comporta quando si è in presenza di una serie di segno variabile?

Anzitutto si parte con lo studio della convergenza assoluta, sperando che la serie converga assolutamente. In caso di risposta negativa, non si può concludere nulla circa il carattere della serie di partenza.

Nel caso di non convergenza assoluta, bisogna cercare di dedurre il carattere per altra via, senza una regola ben precisa.

Se però la serie è di segno alterno, si può allora ricorrere al Criterio di Leibniz.

# ALCUNE SERIE NOTEVOLI

## SERIE GEOMETRICA

Sia $q \in \mathbb{R}$. Allora la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

ha il seguente comportamento:

- CONVERGE se $|q| < 1$ e ha per somma $S = \dfrac{1}{1-q}$,
- DIVERGE a $+\infty$ se $q \geq 1$,
- È INDETERMINATA se $q \leq -1$.

## SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE per $\alpha > 1$;
- DIVERGE POSITIVAMENTE per $\alpha \leq 1$.

## SERIE ARMONICA GENERALIZZATA CON IL LOGARITMO

La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE
  - per $\alpha > 1$ e per ogni $\beta$
  - per $\alpha = 1$ e per $\beta > 1$
- DIVERGE POSITIVAMENTE
  - per $\alpha < 1$ e per ogni $\beta$,
  - per $\alpha = 1$ e per $\beta \leq 1$.

## ESERCIZI SVOLTI

1) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^n} \left[\log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{e^n}\right]^n.$$

***Svolgimento.***

La serie è a termini positivi.
Vista la struttura del termine generale, conviene applicare il Criterio della radice.

Dobbiamo calcolare il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{e^n} \left[\log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{e^n}\right]^n} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n^5}{e^n} \left[\log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{e^n}\right]^n\right\}^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/n}}{e} \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{e^n}.$$

Anzitutto si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{5/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\log n^{5/n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{5\log n}{n}} = e^0 = 1.$$

Inoltre, ricordando il limite notevole

$$\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e,$$

risulta, per composizione,

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{e^n} = \log \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{e^n} = \log e = 1.$$

Tornando al limite sotto studio si ottiene allora

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/n}}{e} \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{e^n} = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e} < 1.$$

Quindi, per il criterio della radice, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

risulta convergente.

2) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^3(2n)!}.$$

***Svolgimento.***

La serie è a termini positivi.

Applichiamo il Criterio del rapporto.

Dobbiamo calcolare il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Risulta

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^3[2(n+1)]!} \cdot \frac{n^3(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[n!(n+1)]^2}{(n+1)^3(2n+2)!} \cdot \frac{n^3(2n)!}{(n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(n+1)^2}{(n+1)^3(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{n^3(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Quindi, per il Criterio del rapporto, la serie assegnata converge.

3) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin n}{2n^5 + \log n + n}.$$

***Svolgimento.***

Cerchiamo di stabilire se la serie è a termini positivi o negativi.
Consideriamo pertanto il termine generale

$$a_n = \frac{n^3 + \sin n}{2n^5 + \log n + n}.$$

Poiché $-1 \leq \sin n \leq 1$ ed essendo $n \geq 1$, si ha banalmente

$$n^3 + \sin n > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Ancor più semplice è osservare che

$$2n^5 + \log n + n > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Quindi la serie è a termini positivi.

La struttura piuttosto elaborata del termine generale $a_n$ suggerisce di fare riferimento al criterio del confronto asintotico, di ricondurre cioè lo studio della serie assegnata allo studio di una nuova serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

di termine generale $b_n$ più semplice da trattare e tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in ]0; +\infty[.$$

Per introdurre una successione $b_n$ adatta, seguiamo i suggerimenti dati nei richiami teorici.
Consideriamo ciascun fattore.
Il primo fattore,

$$n^3 + \sin n,$$

consta di due addendi, $n^3$, che tende a $+\infty$ e $\sin n$, che non ammette limite per $n \to \infty$ ma è limitato tra $-1$ e 1. Tuttavia, per il Teorema del Confronto per le successioni, la somma dei due addendi tende all'infinito (fatto osservato quando si sono studiati i limiti di successione).
Pertanto, nel complesso, si ha

$$n^3 + \sin n \to +\infty.$$

In questo caso, sappiamo di sostituire tutto il fattore con l'addendo di infinito maggiore, vale a dire $n^3$ (che, d'altra parte, è anche l'unico addendo che tende a $+\infty$).
Nell'introdurre la nuova successione $b_n$ sostituiremo, al posto del fattore

$$(n^3 + \sin n),$$

il fattore

$$(n^3).$$

Consideriamo il secondo fattore:

$$2n^5 + \log n + n.$$

Ogni addendo di questo fattore tende a $+\infty$, quindi l'intero fattore tende a $+\infty$.
Dobbiamo tenere l'addendo di infinito maggiore, vale a dire $2n^5$.
Pertanto, la successione $b_n$ adatta al criterio del confronto asintotico è

$$b_n = \frac{n^3}{2n^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sarà quindi lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin n}{2n^5 + \log n + n}.$$

Poiché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge (trattandosi della serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$), ne segue, per il criterio del confronto asintotico, che pure la serie di partenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin n}{2n^5 + \log n + n}$$

converge.

4) Dopo aver osservato che è convergente, si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}}.$$

***Svolgimento.***

Il fatto di dover calcolare la somma ci suggerisce che si tratti o di una serie geometrica o di una serie telescopica.
Vista la struttura del termine generale (nel quale compaiono potenze del tipo $q^n$), indirizziamoci verso una serie geometrica.

Si ha (applicando le proprietà delle potenze)

$$a_n = \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}} = \frac{2^{-2n} \cdot 2^1}{3^n \cdot 3^{-2}} = \frac{(2^{-2})^n \cdot 2 \cdot 3^2}{3^n} = \frac{18}{(2^2)^n \cdot 3^n} = \frac{18}{(12)^n} = 18 \cdot \frac{1}{(12)^n} = 18 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n.$$

Pertanto (sfruttando anche la linearità)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}} = \sum_{n=2}^{\infty} 18 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n = 18 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica, vale a dire una serie del tipo

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n.$$

Nel nostro caso si ha

$$|q| = \left|\frac{1}{12}\right| = \frac{1}{12} < 1,$$

pertanto la serie converge.

Per calcolarne la somma, applichiamo la formula ricordata nei richiami teorici, prestando però attenzione al fatto che in questo caso si comincia a sommare dall'addendo che corrisponde a $n = 2$: dovremo pertanto sottrarre al risultato la somma dei due addendi che corrispondono ad $n = 0$ e $n = 1$.

Risulta

$$S = 18 \cdot \left[\frac{1}{1-q} - q^0 - q^1\right] = 18 \cdot \left[\frac{1}{1-\frac{1}{12}} - 1 - \frac{1}{12}\right] = 18 \cdot \left[\frac{12}{11} - \frac{13}{12}\right] =$$

$$= 18 \cdot \frac{144 - 143}{11 \cdot 12} = \frac{3}{22}.$$

5) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{\log n}}.$$

***Svolgimento.***

Si tratta di una serie di segno alterno, ossia una serie del tipo $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n b_n$.

In questo caso lo studio della convergenza assoluta non porta ad alcun risultato. Infatti, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/2}} = \frac{1}{n^0 (\log n)^{1/2}}$$

diverge (trattandosi dell'armonica generalizzata col logaritmo con $\alpha = 0 < 1$).

Per studiarne il carattere, applichiamo allora il criterio di Leibniz.

Ovviamente si ha $b_n \geq 0$ per ogni $n \geq 2$.

Dobbiamo controllare se la successione $b_n$ è infinitesima e decrescente.

Che sia infinitesima è banale. Infatti

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0.$$

Resta da controllare che $b_n$ è decrescente, ossia che

$$b_{n+1} \leq b_n \qquad \forall n \geq 2.$$

Impostando la disequazione si ottiene,

$$\frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\log n}},$$

ossia

$$\sqrt{\log(n+1)} \geq \sqrt{\log n}.$$

Elevando al quadrato otteniamo

$$\log(n+1) \geq \log n,$$

da cui, per la crescenza della funzione log,

$$n+1 \geq n, \qquad \text{ossia} \qquad 1 \leq 0,$$

che risulta banalmente verificata per ogni $n \geq 2$.

Quindi la successione $b_n$ verifica le ipotesi del criterio di Leibniz.

Quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n b_n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{\log n}}$ risulta convergente (ma non assolutamente convergente).
Diciamo in questi casi che la serie converge semplicemente.

6) Si discuta, al variare di $\alpha > 0$, il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{\alpha^n+n} \cdot \left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{n \log n}$$

***Svolgimento.***
Anzitutto, cerchiamo di ricondurre lo studio della serie assegnata a quello di una serie di termine generale più semplice, utilizzando il criterio del confronto asintotico.
L'idea sarà poi quella di applicare il criterio della radice (vista, in particolare, la presenza del fattore $n$ nell'esponente dell'ultimo fattore).
Dobbiamo cercare di capire a cosa tenda ciascun fattore.
Il primo fattore,

$$n^2+1$$

tende all'infinito.
Sostituiremo tale fattore, nella successione $b_n$ che introdurremo, con l'addendo di infinito dominante, vale a dire

$$n^2.$$

Consideriamo il secondo fattore, vale a dire

$$\alpha^n + n.$$

A seconda di quale sia il valore del parametro positivo $\alpha$, si ha un comportamento diverso.

- Se $0 < \alpha < 1$, è ben noto che

  $$\lim_{n \to +\infty} \alpha^n = 0,$$

  trattandosi di una successione geometrica con base minore di 1.
  Pertanto, si ha

  $$\lim_{n \to +\infty} (\alpha^n + n) = [0 + \infty] = +\infty.$$

  Quando introduremmo la successione $b_n$ sostituiremo, nel caso $0 < \alpha < 1$, questo fattore con l'infinito dominante (che, in realtà, è l'unico infinito), vale a dire

  $$n.$$

- Se $\alpha = 1$ si ha che

  $$\alpha^n = 1^n = 1,$$

  costantemente, ancor prima di passare al limite.
  Quindi si ha

  $$\lim_{n \to +\infty} (\alpha^n + n) = \lim_{n \to +\infty} (1 + n) = +\infty.$$

  Come nel caso $0 < \alpha < 1$, nell'introdurre la successione $b_n$, sostituiremo il fattore in questione con

  $$n,$$

  vale a dire l'addendo che manda all'infinito il fattore intero.

- Se $\alpha > 1$, invece, sappiamo che

  $$\lim_{n \to +\infty} \alpha^n = +\infty,$$

trattandosi della successione geometrica con base maggiore di 1.
Pertanto, risulta

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha^n+n)=[+\infty+\infty]=+\infty.$$

In questo caso, però, l'addendo di infinito dominante nell'intero fattore è

$$\alpha^n,$$

ricordando la scala degli infiniti introdotta nel capitolo riguardante le successioni.
Di conseguenza, in vista del criterio del confronto asintotico, quando introdurremo la successione $b_n$ opportuna, sostituiremo il fattore in questione con l'addendo

$$\alpha^n,$$

vale a dire l'infinito dominante.

Il terzo fattore che costituisce il termine generale della serie, invece, non lo modifichiamo (in quanto si presenta in forma già favorevole all'applicazione del criterio della radice).
A questo punto, passiamo in rassegna i vari casi e studiamo, volta per volta, il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

equivalente (dal punto di vista del carattere) a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Distinguiamo i vari casi.

- $0<\alpha\leq 1$.
  Come già osservato nella discussione precedente, la successione $b_n$ adatta all'applicazione del criterio del confronto asintotico è

  $$b_n=\frac{n^2}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{n\log n}=n\cdot\left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{n\log n}.$$

  Studiamo quindi il carattere della serie

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n=\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot\left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{n\log n}.$$

  Applichiamo il criterio della radice.

Dobbiamo valutare il limite

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n \cdot \left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{n\log n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{n\log n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n} \cdot \left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{\log n}.$$

Poiché il limite di un prodotto di successioni è uguale al prodotto dei limiti delle singole successioni (a patto che il prodotto di tali limiti abbia senso), calcoliamoci separatamente i due limiti

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{\log n}.$$

Cominciamo con

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/n}.$$

La presenza della $n$ sia alla base sia all'esponente ci suggerisce di ricorrere alla solita formula

$$y = e^{\log y}, \quad \text{per ogni } y > 0.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{1/n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = [e^0] = 1,$$

poiché $\log n$ è un infinito di ordine minore rispetto a $n$.
Il secondo limite, invece, è immediatamente risolto, trattandosi di un caso particolare del limite notevole

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e,$$

essendo, nel nostro caso,

$$t = \frac{1}{\log n}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{\log n} = e.$$

In definitiva, nel caso $0 < \alpha < 1$, si ha

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1 \cdot e = e > 1,$$

quindi, per il criterio della radice, la serie assegnata diverge.
Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di partenza diverge.

- $\alpha > 1$.
  In questo caso la successione $b_n$ è

$$b_n = \frac{n^2}{\alpha^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{n \log n}.$$

Anche stavolta applichiamo il criterio della radice (vi è, rispetto al caso precedente, la presenza di un ulteriore fattore al cui esponente c'è la $n$, vale a dire il fattore $\alpha^n$).
Calcoliamo

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n}.$$

Si ha

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\alpha^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{n \log n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2/n}}{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{\log n} =$$
$$= \frac{1}{\alpha} \cdot e,$$

essendo

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{2/n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2\log n}{n}} = e^0 = 1$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{\log n} = e,$$

come caso particolare del limite notevole

$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

Pertanto

$$\ell = \frac{e}{\alpha}.$$

A seconda del valore di $\ell$, il criterio della radice consente di dare diverse conclusioni.

  - Se $\ell = \dfrac{e}{\alpha} > 1$, cioè se $\alpha < e$, allora la serie diverge.
    Per essere più precisi, ricordando che stiamo studiando il caso $\alpha > 1$, si ha che

$$\text{se } 1 < \alpha < e \text{ allora la serie } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge;}$$

- Se $\ell = \frac{e}{\alpha} < 1$, ossia se $\alpha > e$, la serie converge;
- Se $\ell = \frac{e}{\alpha} = 1$, ossia se $\alpha = e$, il criterio della radice non ci consente di concludere nulla circa il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

  Dobbiamo allora cercare di capire in altro modo il carattere di tale serie.
  Cominciamo dunque a scrivere la serie ponendo $\alpha = e$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{n \log n}.$$

In casi come questi (di inapplicabilità di un criterio, nella fattispecie il criterio della radice) si spera di dimostrare la non convergenza della serie assegnata dimostrando che il termine generale non tende a 0 quando $n \to +\infty$ (sappiamo infatti che condizione necessaria, ma non sufficiente, per la convergenza della serie è che il suo termine generale sia infinitesimo per $n \to +\infty$).
Pertanto calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to+\infty} b_n,$$

sperando che tale limite non risulti 0. Se, infatti, dovesse risultare 0, la serie potrebbe convergere come non convergere e dovremmo quindi cercare un'altra strada per studiarne il carattere.
Procediamo col calcolo del limite.
Si ha, utilizzando la solita uguaglianza e il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n^2}{e^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{n \log n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n^2}{e^n} \cdot e^{\log \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{n \log n}}\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n^2}{e^n} \cdot e^{n \log n \cdot \log \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n^2}{e^n} \cdot e^{n \log n \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\log n}\right)}{\frac{1}{\log n}} \cdot \frac{1}{\log n}}\right] = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{e^n} \cdot e^n\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \neq 0.$$

Ne segue che, per $\alpha = e$, la serie non converge (diverge positivamente, trattandosi di una serie a termini positivi.)

In definitiva:

- la serie converge per $\alpha > e$;
- la serie diverge per $0 < \alpha \leq 1 \ \cup \ 1 < \alpha < e \ \cup \ \alpha = e$, vale a dire per $0 < \alpha \leq e$.

7) Sia $E$ l'insieme deglia $\alpha > 0$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + \log n}{n^\alpha \log(n+1)} \right)^{1/2}$$

sia convergente. Determinare l'estremo inferiore di $E$.

***Svolgimento.***

Applicando il Criterio del Confronto asintotico, cerchiamo di ricondurre lo studio della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ allo studio un'opportuna $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, più semplice da trattare e riconducibile a serie notevoli (tipo l'armonica generalizzata/armonica generalizzata col logaritmo).

Per fare ciò è necessario esibire una successione $b_n$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in ]0, +\infty[.$$

Dobbiamo quindi capire il comportamento di ciascun fattore del termine generale $a_n$ al tendere di $n$ all'infinito.

Osservando il primo fattore, cioè l'intero numeratore, notiamo immediatamente che esso tende all'infinito; in particolare l'infinito dominante è dovuto all'addendo $n^2$.
Nella nuova successione $b_n$ possiamo sostituire il fattore

$$n^2 + \log n$$

con

$$n^2.$$

Passiamo al denominatore.

Il fattore $n^\alpha$ va già bene.

Inoltre, per quanto riguarda $\log(n+1)$ si ha ovviamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1,$$

pertanto sostituiremo $\log(n+1)$ con $\log n$.

Se introduciamo quindi la successione

$$b_n = \left(\frac{n^2}{n^\alpha \log n}\right)^{1/2},$$

risulta ovviamente (per come è stata costruita)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in ]0;+\infty[.$$

Possiamo quindi invocare il criterio del Confronto asintotico e affermare che le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.
In particolare, gli $\alpha$ per cui converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sono tutti e soli gli $\alpha$ per cui converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Stabiliamo quindi per quali $\alpha > 0$ si ha la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^\alpha \log n}\right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha-2} \log n}\right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}} \log^{1/2} n}.$$

Pensando alla serie armonica generalizzata col logaritmo, si ha che la serie in questione converge soltanto se

$$\frac{\alpha-2}{2} > 1,$$

da cui

$$\alpha > 4.$$

Per $\alpha = 4$, invece, si otterrebbe la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1/2} n},$$

divergente, in quanto $\frac{1}{2} < 1$.

Quindi l'insieme $E$ degli $\alpha$ in cui si ha la di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è

$$E = ]4;+\infty[,$$

il cui estremo inferiore è 4.

8) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}.$$

***Svolgimento.***

Osserviamo anzitutto che la serie è convergente grazie al criterio del confronto asintotico. Infatti, detta

$$b_n = \frac{2}{4n^2} = \frac{1}{2n^2},$$

si ha ovviamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in ]0, +\infty[.$$

Pertanto le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

hanno lo stesso carattere.
Poiché la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge (trattandosi dell'armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$), ne segue che pure la serie di partenza

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$$

risulta convergente.

Dovendo calcolarne la somma, ci aspettiamo che si tratti o di una serie geometrica o di una telescopica.
Vista la forma del termine generale, escludiamo la prima eventualità.

Si deve trattare quindi di una serie telescopica, vale a dire della forma

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}).$$

Sappiamo che la somma di una serie del tipo è

$$S = \left(b_{n_0} - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}\right).$$

Cerchiamo di scrivere il termine generale nella forma

$$b_n - b_{n+1}.$$

Come già visto in classe, nel caso in cui il termine generale sia razionale, si può procedere con la decomposizione della frazione utilizzando il metodo dei fratti semplici.
Scomponiamo il denominatore in fattori. Si tratta di un polinomio di secondo grado.

Ricordiamo che, assegnato un polinomio di secondo grado

$$ax^2 + bx + c,$$

per scomporlo si risolve anzitutto l'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

trovando le due soluzioni reali $x_1$ e $x_2$ (nel caso in cui non esistano soluzioni reali, il polinomio non è scomponibile in $\mathbb{R}$).
A questo punto si scompone il polinomio come

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Nel nostro caso (dimenticandoci per il momento che $n \in \mathbb{N}$), risolvendo

$$4n^2 + 8n + 3 = 0,$$

si ottiene

$$n_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{4} = \frac{-4 \pm 2}{4},$$

da cui

$$n_1 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}, \qquad n_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$4n^2 + 8n + 3 = 4 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n + \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot 2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= (2n+1) \cdot (2n+3).$$

La frazione sotto studio è quindi

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Decomponiamola col metodo dei fratti semplici: cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3}.$$

Si ottiene

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3} = \frac{A(2n+3)+B(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2An+3A+2Bn+B}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2A+2B)+3A+B}{(2n+1)(2n+3)}.$$

L'uguaglianza tra il primo e l'ultimo termine è verificata se e solo se

$$\begin{cases} 2A+2B=0 \\ 3A+B=2 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} A=-B \\ 3A+B=2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} A=-B=0 \\ -2B=2 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}.$$

Detta

$$b_n = \frac{1}{2n+1}$$

risulta

$$b_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3}.$$

Quindi il termine generale della serie è proprio della forma

$$b_n - b_{n+1}.$$

Per quanto già ricordato si ha che la somma della serie telescopica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3} = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

vale

$$S = \left( b_{n_0} - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} \right) = \left( b_2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} \right) = \left( \frac{1}{2\cdot 2+1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

9) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n!).$$

***Svolgimento.***

La presenza del termine $\sin(n!)$ rende la serie di segno variabile (non alterno), in quanto la funzione seno assume i suoi valori tra $-1$ e 1. Non siamo quindi in presenza di una serie a termini positivi.
Procediamo con lo studio della convergenza assoluta. Se la serie dei valori assoluti risultasse convergente, potremmo affermare che pure la serie di partenza risulta convergente.

Consideriamo pertanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n!) \right|.$$

e studiamone il carattere.

Si ha banalmente

$$|a_n| = \left| \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n!) \right| \leq \left| \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \right| = b_n,$$

ricordando la limitatezza del sin:

$$|\sin(n!)| \leq 1.$$

La precedente maggiorazione ci indirizza verso l'applicazione del criterio del confronto. Se infatti riuscissimo a dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente, allora avremmo automaticamente provata pure la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, in forza del criterio del confronto, per l'appunto. Nulla potremmo concludere, al contrario, nel caso sfortunato in cui la $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ risultasse divergente.

Cerchiamo quindi di studiare la serie di termine generale

$$b_n = \left| \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \right| = \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}$$

(l'ultima uguaglianza è banale in quanto la frazione è a termini positivi).

Per lo studio di tale serie (che è a termini positivi) procediamo come segue.
Anzitutto, attraverso il criterio del confronto asintotico, cerchiamo di rendere lo studio di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ il più semplice possibile, riconducendoci ad una serie con un termine generale $c_n$ più trattabile ma con lo stesso carattere.
Osserviamo che, per $n \to \infty$ si ha $\arctan(n^3) \to \dfrac{\pi}{2}$; segue quindi che

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ 3^{n-2} + \arctan(n^3) \right\} = 3^{+\infty} + \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

Nel costruire la successione $c_n$ dovremo sostituire a questo fattore l'addendo di infinito più potente, vale a dire $3^{n-2}$.

Gli altri fattori sono già in forma favorevole.

Se consideriamo quindi la successione

$$c_n = \frac{3^{n-2}}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}$$

è ovvio (visto come la si è costruita) che

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} \in ]0, +\infty[.$$

Pertanto, per il criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

hanno lo stesso carattere.

Quindi possiamo considerare, in luogo di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}.$$

A tale serie conviene applicare, vista la struttura del termine generale, il criterio del rapporto. Dobbiamo valutare il limite
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$
Si ha
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n-1}}{(2n+2)!\ 4^{n+2}}}{\dfrac{3^{n-2}}{(2n)!\ 4^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3^{-1}}{(2n+2)(2n+1)(2n)! \cdot 4^n \cdot 4^2} \cdot \frac{(2n)!4^n \cdot 4}{3^n \cdot 3^{-2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1.$$
Poiché il limite del rapporto è $\ell < 1$, segue immediatamente, per il criterio del rapporto, che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}$$
è convergente.
Quindi, per Confronto asintotico, pure la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}$$
è convergente.
A sua volta, ricordando la disuguaglianza
$$|a_n| \le b_n,$$
segue (per il criterio del confronto) che pure
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$
è convergente.
Come già richiamato all'inizio dello svolgimento, essendo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergente, ne segue che la serie di partenza, ossia
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n!)$$
è assolutamente convergente, quindi convergente.

10) Studiare il carattere della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}.$$

***Svolgimento.***

Anche in questo caso la serie è di segno variabile, o meglio, di segno alterno.

Controlliamo se la serie converge assolutamente. Se così fosse, avremmo automaticamente anche la convergenza della serie di partenza.

Consideriamo quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n^3+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

Studiamo allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

Cerchiamo di ricondurre tale serie alla serie armonica generalizzata (in forza del criterio del confronto asintotico).
Il numeratore va già bene.

Il denominatore consta del fattore

$$n^3 + 1,$$

che tende all'infinito.

Pertanto, per i discorsi già fatti, possiamo sostituirlo con

$$n^3,$$

vale a dire l'infinito di ordine maggiore.
Pertanto, introdotta la successione

$$b_n = \frac{n}{n^3},$$

si ha ovviamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in ]0, \infty[.$$

Pertanto, per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno esattamente lo stesso carattere.

Studiamo allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Tale serie è ovviamente convergente (trattandosi dell'armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$).

Di conseguenza anche $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Pertanto segue anche la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, che viene detta convergere assolutamente.

Non è stato quindi necessario ricorrere al Criterio di Leibniz.

11) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right).$$

***Svolgimento.***

Siamo in presenza di una serie di segno variabile (anzi, di segno alterno).

Cominciamo col controllare se la serie converge assolutamente: in tal caso si avrebbe pure la convegenza della serie di partenza. In caso di riposta negativa, procederemo col Criterio di Leibniz (essendo in presenza di una serie di segno alterno).

Consideriamo quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left( e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right).$$

Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right).$$

Cerchiamo di applicare il Criterio del Confronto asintotico.

Per $n \to \infty$ si ha

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \to 0,$$

il numeratore è cioè infinitesimo.

Cerchiamo di sostituirlo con un infinitesimo equivalente (ricorrendo ai limiti notevoli).
Poiché

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

si ha, per composizione,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1.$$

Se consideriamo allora la successione

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n}},$$

risulta ovviamente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{b_n}=1\in]0;\infty[.$$

Pertanto, per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\quad\text{e}\quad\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

hanno lo stesso carattere.
Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$$

diverge (trattandosi della serie armonica generalizzata con $\alpha=\frac{1}{2}<1$), ne segue, per Confronto asintotico, che pure la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$$

diverge.

Non si ha quindi assoluta convergenza. Bisogna pertanto ricorrere al Criterio di Leibniz.

Bisogna controllare che la successione

$$\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$$

sia infinitesima e decrescente.

Che sia infinitesima l'abbiamo già osservato.

Dobbiamo mostrare la decrescenza.
Poiché la successione $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ è decrescente e poiché la funzione esponenziale in base $e$ è crescente, ne segue, per composizione, che la successione

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

è decrescente.
Lo è pure la successione

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1.$$

Quindi per il Criterio di Leibniz, la serie assegnata converge. Non vi è invece, come già osservato, convergenza assoluta.

12) Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 6}} \right)^{2n}.$$

Per tali valori di $x$ calcolarne la funzione somma $S(x)$ e determinare il valore del limite

$$\lim_{x \to -\infty} S(x).$$

***Svolgimento.***

Si tratta di una serie geometrica, vale a dire di una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Cerchiamo di scrivere il termine generale in tale modo.
Si ha

$$\left( \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 6}} \right)^{2n} = \left[ \left( \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 6}} \right)^2 \right]^n = \left( \frac{e^{2x}}{e^x + 6} \right)^n.$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 6}} \right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^{2x}}{e^x + 6} \right)^n.$$

La serie converge se e solo se

$$|q| < 1,$$

ossia, se e solo se

$$\left|\frac{e^{2x}}{e^x+6}\right| < 1,$$

vale a dire

$$\begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{e^x+6} > -1 \\ \dfrac{e^{2x}}{e^x+6} < 1 \end{cases}.$$

La prima delle due disequazioni è sempre soddisfatta (essendo $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Pertanto il sistema si riduce alla sola disequazione

$$\frac{e^{2x}}{e^x+6} < 1,$$

cioè

$$\frac{e^{2x}-e^x-6}{e^x+6} < 0,$$

che equivale a

$$e^{2x}-e^x-6 < 0,$$

poiché il denominatore $(e^x+6)$ è sempre maggiore strettamente di 0 (quindi non influisce sul segno della frazione).
Per risolvere l'ultima disequazione, effettuiamo la sostituzione

$$e^x = t,$$

ottenendo

$$t^2 - t - 6 < 0.$$

Risolvendo l'equazione associata si trova

$$t_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

da cui

$$t_1 = -2, \quad t_2 = 3.$$

La disequazione risulta quindi soddisfatta per

$$-2 < t < 3,$$

vale a dire, risostituendo $t$ con $e^x$,

$$-2 < e^x < 3.$$

L'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che risolvono la precedente disequazione è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ che risolvono il sistema

$$\begin{cases} e^x > -2 \\ e^x < 3 \end{cases} .$$

Vista la positività della funzione esponenziale, la prima disequazione risulta sempre verificata.

Il sistema si riduce pertanto alla seconda delle due disequazioni, vale a dire

$$e^x < 3,$$

che, passando al logaritmo (in base $e$) a entrambi i membri, equivale a

$$x < \log 3.$$

In definitiva, l'insieme degli $x$ per cui converge la serie di partenza è

$$]-\infty, \log 3[.$$

Per tali valori di $x$ calcoliamo la funzione somma, applicando la nota formula (in questo caso non bisogna sottrarre nulla alla somma in quanto la sommatoria parte da $n = 0$):

$$S(x) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{e^{2x}}{e^x+6}} = \frac{1}{\frac{e^x+6-e^{2x}}{e^x+6}} = \frac{e^x+6}{-e^{2x}+e^x+6}.$$

Dobbiamo a questo punto calcolare il

$$\lim_{x \to -\infty} S(x).$$

Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} S(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x+6}{-e^{2x}+e^x+6} = \left[\frac{e^{-\infty}+6}{-e^{-\infty}+e^{-\infty}+6}\right] = \left[\frac{0+6}{0+0+6}\right] = 1.$$

13) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \left|\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}\right|$$

al variare di $\alpha > 0$.

***Svolgimento.***

La serie è evidentemente a termini positivi grazie alla presenza del valore assoluto.

Vorremo utilizzare il Criterio del Confronto asintotico.

Vista la struttura del termine entro valore assoluto, ovviamente infinitesimo, si intuisce immediatamente che, per studiarne il comportamento all'infinito, bisogna ricorrere agli sviluppi in serie di Taylor.

Ricordando che, per $x \to 0$, si ha

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

si ha nel nostro caso, per $n \to \infty$ (e conseguentemente $\frac{1}{n} \to 0$),

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Pertanto risulta

$$\left|\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \frac{1}{n^\alpha}\right|.$$

L'ordine di infinitesimo di tale termine dipende dai valori assunti dal parametro $\alpha$.

- Se $\alpha = 1$ si ottiene, per $n \to \infty$,

$$\left|\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}\right| = \left|-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right|.$$

  Se consideriamo quindi la successione

$$b_n = n^{2/3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

  otteniamo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{6} \in ]0; +\infty[.$$

  Quindi, per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \cdot \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/3}}$$

converge (in quanto si tratta della serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$), ne segue che anche la serie di partenza $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

- Se $\alpha > 1$, allora l'infinitesimo da tenere (quello di ordine minore) è $\frac{1}{n}$.
  Se consideriamo quindi la successione

$$b_n = n^{2/3} \cdot \frac{1}{n}$$

risulta

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in ]0; +\infty[.$$

Quindi, per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$$

diverge (in quanto si tratta della serie armonica generalizzata con $\alpha < 1$), si ha che diverge pure la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Se $\alpha < 1$, l'infinitesimo da tenere (quello di grado minore) è ovviamente $\frac{1}{n^{\alpha}}$.
  Detta

$$b_n = n^{2/3} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}},$$

si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.
In particolare, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per tutti e soli i valori di $\alpha$ per cui converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
In realtà

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2/3}}$$

converge se e solo se

$$\alpha - \frac{2}{3} > 1,$$

ossia, se e solo se

$$\alpha > \frac{5}{3},$$

in disaccordo con l'ipotesi $\alpha < 1$.

Quindi per $\alpha < 1$ non vi è convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, quindi nemmeno di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

14) Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}.$$

***Svolgimento.***

Si tratta di una serie di segno variabile, in particolare, è una serie a segno alterno. Infatti il termine generale è dato dal prodotto di $(-1)^n$ per il termine sempre positivo $\frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$.

Cominciamo col considerare l'assoluta convergenza. Se la serie dei valori assoluti risulta convergente, allora lo è pure la serie di partenza. In caso contrario, il test dell'assoluta convergenza non ci dice nulla in merito al carattere della serie di partenza.
In quel caso, ricorreremo al criterio di Leibniz, applicabile in quanto la serie è di segno alterno.

Cominciamo col vedere se la serie converge assolutamente.

Dobbiamo studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}.$$

Per lo studio di quest'ultima serie ricorriamo al criterio del rapporto.
Consideriamo il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2n+2)!}{5^{n+1}\left[(n+1)!\right]^2}}{\dfrac{(2n)!}{5^n (n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{5^n \cdot 5(n!)^2(n+1)^2} \cdot \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4}{5} < 1,$$

quindi la serie $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ converge.

Di conseguenza, la $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge assolutamente, quindi converge.

15) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n}.$$

***Svolgimento.***

Innanzitutto, osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi, in quanto $\log n > 0$ per ogni $n > 1$.
Poiché si ha, per ogni $n > 0$,

$$\log n < \sqrt{n},$$

segue immediatamente che

$$\log^2 n < n.$$

Da cui, passando ai reciproci, si ottiene

$$\frac{1}{\log^2 n} > \frac{1}{n}.$$

Detta

$$b_n = \frac{1}{n},$$

si ha quindi

$$a_n > b_n.$$

Poiché
$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$
è divergente (trattandosi della serie armonica), segue che, per il criterio del confronto, pure la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ risulta divergente.

16) Studiare il carattere della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

***Svolgimento.***

Cerchiamo anzitutto di capire se si tratta di una serie a termini positivi o a segno variabile.

Elenchiamo, in ordine crescente d'indice, alcuni termini della successione $a_n$, termine generale della serie:
$$a_1 = 1 \cdot \tan \frac{\pi}{4} = 1 \cdot 1 = 1, \quad a_2 = 2 \tan \frac{\pi}{8}, \quad a_3 = 3 \tan \frac{\pi}{16}, ...,$$
e così via. I valori assunti dalla successione sono tutti positivi (in quanto la tangente, tra 0 e $\frac{\pi}{4}$, è positiva).
Pertanto la serie in questione è a termini positivi.

Per il suo studio conviene ricorrere al criterio del Confronto asintotico.
Osseviamo preliminarmente che
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0;$$
quindi, per composizione, si ha pure
$$\lim_{n \to \infty} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0.$$

Alla luce di questa osservazione viene spontaneo cercare di sostituire il termine generale della serie con uno più semplice ad esso equivalente per $n \to \infty$.
Notiamo che si ha (per il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$)
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\tan \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1.$$

Pertanto possiamo sostituire la successione $a_n$ originaria con la successione
$$b_n = n \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.
Studiamo quindi il carattere di

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Lo studio di tale serie lo si può effettuare, ad esempio, ricorrendo al criterio del rapporto. Bisogna pertanto valutare il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\pi}{2^{n+2}}}{\frac{n \cdot \pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\pi}{2^n \cdot 2^2} \cdot \frac{2^n \cdot 2}{n\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Per il criterio del Confronto asintotico, converge pure la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

17) **[T.E. 20/04/2011]** Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{n}} - \sqrt[4]{n}}{n^{\beta+1}}.$$

***Svolgimento.***

La serie è a termini positivi.
L'idea è di ricondurre lo studio della serie a una serie più semplice (in questo caso, la serie armonica generalizzata, vista l'assenza di fattoriali o termini del tipo $q^n, n^n$).
Controlliamo i vari termini.
Cominciamo col primo fattore (quello che compare a numeratore):

$$\sqrt{1+\sqrt{n}} - \sqrt[4]{n}.$$

Si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\sqrt{n}}-\sqrt[4]{n}\right)=[+\infty-\infty].$$

Conviene razionalizzare. Risulta
$$\sqrt{1+\sqrt{n}}-\sqrt[4]{n}=\sqrt{1+\sqrt{n}}-\sqrt[4]{n}\cdot\frac{\sqrt{1+\sqrt{n}}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{1+\sqrt{n}}+\sqrt[4]{n}}=$$
$$=\frac{1+\sqrt{n}-\sqrt{n}}{\sqrt{1+\sqrt{n}}+\sqrt[4]{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{n}}+\sqrt[4]{n}}.$$

Possiamo riscrivere la serie come
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\beta+1}\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{n}}-\sqrt[4]{n}\right)}$$

Studiamo i fattori.
Stavolta, si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{n}}+\sqrt[4]{n}=+\infty.$$

Consideriamo l'addendo dominante in ogni radice.
Abbiamo
$$\sqrt{1+\sqrt{n}}+\sqrt[4]{n}\ \sim\ \sqrt{\sqrt{n}}+\sqrt[4]{n}=2\sqrt[n]{n}\ \sim\ \sqrt[4]{n}\quad\text{per } n\to+\infty.$$

Il fattore
$$n^{\beta+1}$$

è già in forma favorevole.
Introdotta la nuova successione
$$b_n=\frac{1}{n^{\beta+1}\cdot\sqrt[4]{n}}=\frac{1}{n^{\beta+1}\cdot n^{1/4}},$$

si ha che le due serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\beta+1}\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{n}}-\sqrt[4]{n}\right)}\quad\text{e}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\beta+1}\cdot n^{1/4}}$$

hanno esattamente lo stesso carattere (per il criterio del confronto asintotico).
In particolare, i valori di $\beta$ per cui converge la prima serie sono tutti e soli i valori di $\beta$ per cui converge la seconda.

Poiché la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\beta+1} \cdot n^{1/4}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\beta+1+\frac{1}{4}}},$$

armonica generalizzata, converge quando

$$\beta + 1 + \frac{1}{4} > 1,$$

cioè quando

$$\beta > -\frac{1}{4},$$

ne segue che pure la serie originaria converge per $\beta > -\frac{1}{4}$.

18) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+2} \cdot \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}.$$

***Svolgimento.***

Dovrà trattarsi di una serie telescopica, vale a dire della forma

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}).$$

Cerchiamo quindi di scrivere il termine generale $a_n$ della serie in tale modo.

Anzitutto osserviamo che

$$n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$$

(a tale risultato si giunge con l'usuale scomposizione del trinomio di secondo grado o attraverso la regola di *somma e prodotto*).
Riscriviamo quindi la frazione:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+2} \cdot \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)} \cdot \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2} \cdot \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)}$$

(la radice del prodotto l'abbiamo scritta tranquillamente come prodotto di due radici in quanto i due fattori sono entrambi positivi).

A questo punto razionalizziamo opportunamente:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}\cdot\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot(n+2-(n+1))}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Detta

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

si ha

$$b_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{(n+1)+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Pertanto siamo riusciti a scrivere la serie nella forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1}).$$

Per quanto già richiamato, la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$$

vale

$$S=\left(b_{n_0}-\lim_{n\to\infty}b_{n+1}\right)=\left(b_1-\lim_{n\to\infty}b_{n+1}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+1}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

19) Si dica per quali $\alpha\in]0,+\infty[$ risulta convergente la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}{n^{2\alpha}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha}}.$$

(Suggerimento: si utilizzi il limite $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$).

***Svolgimento.***

Cerchiamo anche in questo caso di applicare il Criterio del Confronto asintotico. È però necessario cercare di capire come si comportano all'infinito i vari fattori che compongono il termine generale $a_n$ della serie.

Cominciamo col numeratore.

Come suggerito nel testo, bisogna cercare di applicare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Cerchiamo di riscrivere il numeratore

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha,$$

in modo che risulti ad esso applicabile il limite suggerito.
Raccogliendo $n^\alpha$ si ha

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left[\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\right] = n^\alpha \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1\right] =$$

$$= n^\alpha \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right].$$

Poiché $n \to \infty$, si ha che $\frac{1}{n} \to 0$, quindi il termine

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1$$

è del tipo

$$(1+x)^\alpha - 1 \qquad \text{con } x \to 0.$$

Pertanto, invocando il limite notevole del suggerimento, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha \in ]0, +\infty[.$$

Quindi potremo sostituire il termine

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1$$

con

$$\frac{1}{n}.$$

Passiamo ora al denominatore.

Il fattore $n^{2\alpha}$ va già bene.

Studiamo invece il fattore

$$1 - \cos\frac{1}{n}.$$

È ben noto il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Poiché, nel nostro caso, $\frac{1}{n} \to 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \in ]0, +\infty[.$$

Quindi sostituiremo il fattore

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha}$$

con

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/\alpha} = \frac{1}{n^{2/\alpha}}.$$

La successione adatta al criterio del confronto asintotico è quindi

$$b_n = \frac{n^{\alpha}\frac{1}{n}}{n^{2\alpha}\frac{1}{n^{2/\alpha}}},$$

Per il criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno quindi lo stesso carattere; in particolare, i valori di $\alpha$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, sono gli stessi valori di $\alpha$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, e viceversa.

Stabiliamo quindi per quali valori di $\alpha > 0$ si ha la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} \dfrac{1}{n}}{n^{2\alpha} \frac{1}{n^{2/\alpha}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1-\frac{2}{\alpha}}}.$$

Quest'ultima serie converge se e solo se

$$\alpha + 1 - \frac{2}{\alpha} > 1,$$

ossia, se e solo se

$$\frac{\alpha^2 - 2}{\alpha} > 0,$$

che risolta dà (ricordando che $\alpha > 0$),

$$\alpha > \sqrt{2}.$$

Pertanto la serie di partenza $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per $\alpha > \sqrt{2}$.

20) Si discuta la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

***Svolgimento.***

Si tratta di una serie di segno alterno, in quanto il termine generale è del tipo

$$a_n = (-1)^n b_n,$$

ove $b_n$ è una successione strettamente positiva (infatti, per $x > 0$, si ha $\arctan x > 0$).

Consideriamo anzitutto la serie dei valori assoluti, vale a dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

A questa serie a termini positivi applichiamo il criterio del Confronto asintotico.

Il fattore

$$\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$

è infinitesimo per $n \to \infty$.
Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$$

si ha, nel nostro caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{n}}} = 1.$$

Pertanto possiamo sostituire il fattore

$$\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$

col fattore

$$\frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

Per il criterio del Confronto asintotico, possiamo dire che le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

hanno lo stesso carattere.
Poiché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/5}}$$

diverge (essendo l'armonica generalizzata con $\alpha = \dfrac{1}{5} < 1$), ne segue che pure la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$

diverge.
Pertanto non si ha convergenza assoluta (e quindi non si può concludere nulla circa il carattere della serie iniziale).

D'altra parte, trattandosi di una serie di segno alterno, si può utilizzare il criterio di Leibniz.

Dobbiamo controllare che $b_n$ sia infinitesima e decrescente.

Ovviamente si ha

$$\lim_{n\to\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}} = 0,$$

quindi $a_n$ è infinitesima.

Per controllare la decrescenza di $a_n$ dovremmo controllare i valori di $n$ che risolvono la disequazione

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Si ha:

$$\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \leq \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}};$$

ma, essendo al funzione arctan monotona crescente, la precedente disequazione è equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{n}},$$

ossia

$$\sqrt[5]{n} \leq \sqrt[5]{n+1},$$

banalmente vera per ogni $n > 0$.
Pertanto la successione $a_n$ è decrescente.

Ne segue, per il Criterio di Leibniz, che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$

è convergente.

21) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin^2 n + 2}{4^n + 1}.$$

***Svolgimento.***

La serie è a termini positivi (in quanto il sin compare con potenza quadra).

Non è possibile applicare direttamente il Criterio del Confronto asintotico, in quanto non esiste

$$\lim_n \sin^2 n$$

e, di conseguenza, nemmeno il

$$\lim_n \left(3^n \sin^2 n + 2\right).$$

Dobbiamo procedere diversamente.

Poiché

$$0 \leq \sin^2 n \leq 1,$$

si ha ovviamente

$$3^n \sin^2 n + 2 \leq 3^n \cdot 1 + 2 = 3^n + 2,$$

quindi, detta

$$b_n = \frac{3^n + 2}{4^n + 1},$$

risulta

$$a_n = \frac{3^n \sin^2 n + 2}{4^n + 1} \leq \frac{3^n + 2}{4^n + 1} = b_n,$$

cioè

$$a_n \leq b_n.$$

Se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

risultasse convergente, potremmo concludere pure la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, grazie al Criterio del Confronto. Non potremmo invece concludere nulla nel caso in cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergesse.

Controlliamo quindi il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{4^n + 1}.$$

Per lo studio di tale serie ricorriamo al Criterio del Confronto asintotico.

Cerchiamo di capire il comportamento del termine generale $b_n$ al tendere di $n$ all'infinito.

Il numeratore tende all'infinito: nell'introdurre la nuova successione lo sostituiremo con

$$3^n.$$

Per lo stesso ragionamento, il denominatore lo sostituiremo con

$$4^n.$$

La nuova successione adatta per l'applicazione del criterio del confronto asintotico è quindi

$$c_n = \frac{3^n}{4^n}.$$

Per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

hanno lo stesso carattere.
Essendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

convergente, in quanto una serie geometrica di ragione $q = \frac{3}{4} < 1$, ne segue che anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente.
A sua volta, per il Criterio del Confronto, anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin^2 n + 2}{4^n + 1}$$

è convergente.

22) Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)!}{(n+7)^{\alpha} n!}.$$

***Svolgimento.***

Osserviamo che la serie è a termini positivi.

Riscriviamo il termine generale in maniera semplificata:

$$a_n = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!}{(n+7)^{\alpha} n!} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+7)^{\alpha}}.$$

Quindi dobbiamo discutere per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+7)^{\alpha}}.$$

Come al solito, cerchiamo di ricondurre lo studio della $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ allo studio di un'opportuna $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, invocando il criterio del Confronto asintotico.

Osserviamo che il numeratore è equivalente, per $n \to \infty$, a $n^4$.
Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{n^4} = 1.$$

Allo stesso modo, risulta pure

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+7)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_n \left(\frac{n+7}{n}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1.$$

Quindi, introducendo la nuova successione

$$b_n = \frac{n^4}{n^\alpha},$$

risulta ovviamente

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in ]0, \infty[.$$

Pertanto, per il criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.
Di coseguenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge se e solo se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{converge.}$$

Ma la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-4}}$$

converge se e solo se $\alpha - 4 > 1$, ossia se e solo se $\alpha > 5$.
Quindi, anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)!}{(n+7)^\alpha n!}$$

converge per $\alpha > 5$.

23) **[T.E. 09/01/09]**

Determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^{3\beta} + \log n^7\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

***Svolgimento.***

Cercheremo di applicare il Criterio del Confronto asintotico.

Studiamo sin da subito il secondo fattore (che non dipende da $\beta$).
Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)=0,$$

si tratta cioè di un fattore infinitesimo. Si vede subito che in questo caso i limiti notevoli non funzionano. Per studiarne il comportamento, ricorriamo agli sviluppi di Taylor.

Ricordando che, per $x\to 0$, si ha

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

si ha, nel nostro caso, per $n\to\infty$,

$$\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Quindi, per $n\to\infty$, risulta

$$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Pertanto il secondo fattore si comporta come

$$\frac{1}{n^3}.$$

Discutiamo ora il primo fattore del termine generale, esaminando i vari casi.

- Se $\beta<0$, allora si ha

  $$\lim_n n^{3\beta}=0,$$

  pertanto

  $$\lim_{n\to\infty}\left(n^{3\beta}+\log n^7\right)=0+\infty=+\infty.$$

  In particolare l'infinito dominante (e anche unico che compare nel fattore) è $\log n^7 = 7\log n$.
  Quindi il primo fattore lo possiamo sostituire con $7\log n$.
  Introducendo quindi la successione

  $$b_n=\frac{1}{n^3}\cdot 7\log n,$$

risulta ovviamente

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 7 \in ]0, +\infty[.$$

Pertanto possiamo, per il criterio del Confronto asintotico, studiare il carattere di

$$7\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3(\log n)^{-1}}.$$

Poiché tale serie converge (essendo l'esponente di $n$ maggiore di 1), segue che pure la serie di partenza converge.

Quindi, per il momento, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge per ogni $\beta < 0$.

- Sia ora $\beta = 0$.
  La serie si riduce alla serie

$$7\sum_{n=2}^{\infty} \left(\log n^7\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right),$$

che è equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3(\log n)^{-1}},$$

convergente.

Quindi, anche per $\beta = 0$, si ha la convergenza di $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

- Sia ora $\beta > 0$.
  In questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{3\beta} = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^{3\beta} + \log n^7\right) = +\infty + \infty = +\infty.$$

Però, in questo caso, l'infinito dominante è $n^{3\beta}$. Quindi il primo fattore si comporta come $n^{3\beta}$.

Se introduciamo allora la successione

$$b_n = n^{3\beta} \cdot \frac{1}{n^3},$$

si ha banalmente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in ]0, +\infty[.$$

Quindi, in forza del Criterio del Confronto asintotico, il carattere di $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ è lo stesso di $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$.

Studiamo quindi per quali $\beta > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} n^{3\beta} \cdot \frac{1}{n^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3-3\beta}}.$$

Tale serie converge per

$$3 - 3\beta > 1,$$

ossia per

$$\beta < \frac{2}{3},$$

mentre diverge per $\beta \geq \frac{2}{3}$.

Pertanto, ricordando che siamo nel caso $\beta > 0$, la serie converge se e solo se

$$\begin{cases} \beta > 0 \\ \beta < \frac{2}{3} \end{cases},$$

ossia se e solo se

$$0 < \beta < \frac{2}{3}.$$

In definitiva, l'insieme dei $\beta \in \mathbb{R}$ per cui converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^{3\beta} + \log n^7\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$$

è dato dall'unione:

$$\beta \leq 0 \quad \cup \quad 0 < \beta < \frac{2}{3}.$$

Quindi la serie data converge per

$$\beta < \frac{2}{3}.$$

24) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

***Svolgimento.***

È banale osservare che siamo in presenza di una serie a termini positivi.

Vista la forma del termine generale della serie, conviene provare ad applicare il criterio della radice.

Consideriamo quindi il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}.$$

Si ha

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_n \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_n \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Quindi, per il criterio della radice, la serie assegnata risulta convergente.

24) Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n + 3n! - 2\log n}{(2^n+1)(2n)!}.$$

***Svolgimento.***

Osserviamo che la serie è a termini positivi.

Per poter applicare il Criterio del Confronto asintotico, dobbiamo cercare di capire quale sia il comportamento del termine generale $a_n$ per $n \to \infty$, per poter così esibire un'opportuna successione $b_n$, come da criterio.

Il numeratore tende all'infinito. In questo caso sappiamo di dover tenere l'addendo di infinito maggiore, vale a dire

$$n^n.$$

Pertanto

$$n^n + 3n! - 2\log n \quad \sim \quad n^n.$$

Passando al denominatore, il primo fattore, vale a dire

$$2^n + 1$$

tende all'infinito e pertanto, per i soliti discorsi, può essere sostituito con

$$2^n.$$

Il fattore $(2n)!$ non ha bisogno di essere sostituito con qualche altro fattore.

Introduciamo quindi la nuova successione

$$b_n = \frac{n^n}{2^n(2n)!}.$$

Per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.

Studiamo quindi il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n(2n)!}.$$

Si tratta di una tipica serie il cui studio è affrontabile col Criterio del rapporto.

Si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_n \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}[2(n+1)]!} \cdot \frac{2^n \cdot (2n)!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)}{2^n \cdot 2(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{2^n(2n)!}{n^n} = \lim_n \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e \cdot \lim_n \frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot 0 = 0 < 1.$$

Pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

è convergente.

Ne segue, per il Criterio del Confronto asintotico, che anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

è convergente.

25) Si studi al variare di $\alpha \in [0, +\infty[$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)^{\alpha}}{n\sqrt{n} \cdot (1 - \cos(n^{-\alpha/2}))}$$

***Svolgimento.***

Applicheremo il criterio del confronto asintotico, cercando di ricondurci alla serie armonica generalizzata.

Cominciamo col fattore a numeratore: guardiamo il contenuto della tonda (poi eleveremo alla $\alpha$).
Cerchiamo di capire a cosa tende il fattore in tonda: si ha

$$\lim_n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Il fattore è pertanto infinitesimo.

Per trattare tale fattore, occore ricordare l'identità notevole dimostrata in aula:

$$\arctan n + \arctan \frac{1}{n} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{per ogni } n > 0.$$

Dalla precedente relazione si ottiene

$$\frac{\pi}{2} - \arctan n = \arctan \frac{1}{n}.$$

Quindi possiamo riscrivere

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right) = \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

(non abbiamo fatto alcun limite o alcuna sostituzione di infinitesimi equivalenti. Abbiamo semplicemente riscritto il termine in tonda utilizzando quell'identità).
Riscriviamo quindi la serie come segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\arctan \frac{1}{n}\right)^{\alpha}}{n\sqrt{n} \cdot \left(1 - \cos\left(n^{-\alpha/2}\right)\right)}$$

Come già anticipato effettueremo lo studio di tale serie applicando il criterio del confronto asintotico.

Consideriamo il caso in cui $\alpha > 0$ (successivamente tratteremo il caso $\alpha = 0$).
Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$$

si ha, nel nostro caso,

$$\lim_{n} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Pertanto possiamo sostituire il primo fattore della serie con

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}.$$

Proseguiamo.
Osserviamo che il fattore

$$n\sqrt{n} = n \cdot n^{1/2} = n^{3/2}.$$

è già in forma favorevole.

Infine, l'ultimo fattore,

$$\left(1 - \cos\left(n^{-\alpha/2}\right)\right) = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right).$$

Poiché $\alpha > 0$, risulta

$$\frac{1}{n^{\alpha/2}} \to 0.$$

Quindi,

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n^{\alpha}/2}\right) \to 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

Il fattore è pertanto infinitesimo.

Ricorreremo anche in questo caso ad un limite notevole.

In particolare, faremo uso del limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \in ]0, +\infty[.$$

Applicando tale limite alla questione, si ha ovviamente

$$\lim_{n} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)}{\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)^2} = \frac{1}{2} \in ]0, \infty[.$$

Pertanto sostituiremo il fattore

$$1-\cos\frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

con

$$\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)^2 = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Introduciamo quindi la nuova successione

$$b_n = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha}{n^{3/2}\cdot\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)^\alpha}{n\sqrt{n}\cdot(1-\cos n^{-\alpha/2})} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

hanno lo stesso carattere (pertanto i valori di $\alpha$ per cui converge la seconda sono tutti e soli i valori di $\alpha$ per cui converge la prima).
Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

converge per ogni $\alpha > 0$ (essendo un'armonica generalizzata indipendente da $\alpha$), ne segue che pure la serie di partenza converge per ogni $\alpha > 0$.

Analizziamo ora il caso $\alpha = 0$. Sostituendo, ci si riconduce alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)^0}{n\sqrt{n}\cdot(1-\cos n^{0/2})} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}(1-\cos 1)} =$$

$$\frac{1}{(1-\cos 1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}},$$

che converge (essendo l'armonica generalizzata con $\alpha > 1$).

Quindi la serie iniziale converge per ogni

$$\alpha \geq 0.$$

26) **[T.E. 29/03/10]**

Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{\frac{2}{n}}\left(\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right)-1\right)}{\frac{2}{n^{2/3}}-\sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)}.$$

***Svolgimento.***

Cercheremo di applicare il Criterio del Confronto asintotico.

Consideriamo i vari fattori che compongono il termine generale $a_n$ al fine di introdurre una nuova successione $b_n$ più semplice.

Il primo fattore: si ha

$$e^{\frac{2}{n}} \to e^0 = 1.$$

Nell'introdurre la nuova successione $b_n$, sostituiremo tale fattore con il termine 1.
Il secondo fattore.
Vista la forma, procediamo con gli sviluppi di Taylor intorno a 0 (applicabili in quanto $\frac{2}{n^2} \to 0$ per $n \to \infty$).
Ricordando che

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0,$$

si ha, nel nostro caso,

$$\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)^3 = 1 + \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad \text{per } n \to \infty.$$

Quindi risulta

$$\left(\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right)-1\right)=1+\frac{2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)-1=\frac{2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Nell'introdurre la nuova successione $b_n$ sostituiremo il fattore

$$\left(\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right)-1\right)$$

con

$$\frac{2}{n^4}.$$

Anche il terzo fattore è infinitesimo; in particolare è dato dalla sottrazione di due infinitesimi.

Procediamo anche in questo caso con gli sviluppi di Taylor.
Ricordando che

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6), \quad \text{per} \;\; x\to 0,$$

si ha, per $n\to\infty$,

$$\sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)=\frac{2}{n^{2/3}}-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)^4=\frac{2}{n^{2/3}}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^{8/3}}\right).$$

Quindi

$$\frac{2}{n^{2/3}}-\sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)=\frac{2}{n^{2/3}}-\frac{2}{n^{2/3}}+\frac{4}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^{8/3}}\right)=$$

$$=\frac{4}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^{8/3}}\right) \quad \text{per} \;\; n\to\infty.$$

Sostituiremo quindi il fattore

$$\frac{2}{n^{2/3}}-\sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)$$

con

$$\frac{4}{3n^2}.$$

La successione adatta al criterio del confronto asintotico è pertanto

$$b_n=\frac{1\cdot\frac{2}{n^4}}{\frac{4}{3n^2}}=\frac{3}{2n^2}.$$

Le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno quindi lo stesso carattere.

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2} = \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge (trattandosi della serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$), ne segue che pure la serie di partenza

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}}\left(\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right) - 1\right)}{\frac{2}{n^{2/3}} - \sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)}$$

risulta convergente.

28) **[T.E. 20/04/2011]** Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n^2 - \log n}{n^6 + 10n^3 \sin^2 n}}.$$

***Svolgimento.***

Osserviamo che la serie è di segno variabile, in particolare è di segno alterno. Infatti è una serie della forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n, \quad b_n \geq 0.$$

Per prima cosa controlliamo se la serie dei valori assoluti converge oppure no. In caso di risposta negativa, potremo far ricorso al Criterio di Leibniz (applicabile solo per serie di segno alterno). Consideriamo quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \sqrt{\frac{n^2 - \log n}{n^6 + 10n^3 \sin^2 n}} \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n^2 - \log n}{n^6 + 10n^3 \sin^2 n}}.$$

Non abbiamo lasciato il valore assoluto in quanto una radice quadrata è sempre maggiore o uguale di 0.
Si tratta ora di capire se la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n^2 - \log n}{n^6 + 10n^3 \sin^2 n}}$$

converge oppure no.
Come sempre capita con le serie a termini positivi, la prima cosa da prendere in considerazione è la possibilità di semplificare il termine generale, applicando in tal modo il criterio del confronto asintotico.
Ciò è possibile a patto che ogni fattore del termine generale della serie ammetta limite.
Consideriamo ciascun fattore sotto radice quadrata (per il momento non ci preoccupiamo della presenza della radice quadrata; la riconsidereremo nell'introdurre la nuova serie).
Consideriamo il primo fattore

$$n^2 - \log n.$$

Si ha ovviamente

$$\lim_{n \to +\infty} (n^2 - \log n) = +\infty,$$

in quanto $\log n$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $n^2$.
Quando introdurremo la nuova successione, chiamiamola $c_n$, adatta al criterio del confronto asintotico, sostituire il fattore appena studiato con

$$n^2.$$

Consideriamo il secondo e ultimo fattore,

$$n^6 + 10n^3 \sin^2 n.$$

È ben noto che non esista il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sin^2 n,$$

né tantomeno

$$\lim_{n \to +\infty} n^3 \sin^2 n.$$

Tuttavia il limite

$$\lim_{n \to +\infty} n^6 + 10n^3 \sin^2 n$$

esiste. Infatti risulta

$$\lim_{n\to+\infty} n^6 + 10n^3 \sin^2 n = \lim_{n\to+\infty} n^6 \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 n}{n^3}\right) = +\infty(1+0) = +\infty,$$

dato che, essendo $0 \leq \sin^2 n \leq 1$, risulta

$$0 \leq \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n^3}$$

e quindi, per il teorema del confronto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3} = 0.$$

Pertanto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^6 + 10n^3 \sin^2 n = +\infty$$

e l'infinito che terremo nell'introdurre la successione $c_n$ è ovviamente

$$n^6.$$

Introduciamo quindi la successione

$$c_n = \sqrt{\frac{n^2}{n^6}} = \sqrt{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^2}.$$

Il criterio del confronto asintotico ci garantisce che le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n^2 - \log n}{n^6 + 10n^3 \sin^2 n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

abbiano esattamente lo stesso carattere.
Poiché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge (trattandosi dell'armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$), ne segue che pure la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n^2 - \log n}{n^6 + 10n^3 \sin^2 n}},$$

pertanto la serie assegnata converge assolutamente.

27) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n\alpha}}{n!}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

***Svolgimento.***

Osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi.

Vista la forma del termine generale $a_n$, conviene ricorrere al Criterio del Rapporto.

Dobbiamo valutare il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

e discuterne il valore al variare di $\alpha$.

Risulta

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{(n+1)\alpha}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{n\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n\alpha} \cdot (n+1)^{\alpha}}{n!(n+1)} \cdot \frac{n!}{n^{n\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n\alpha} \cdot \frac{(n+1)^{\alpha}}{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\right]^{\alpha} \cdot (n+1)^{\alpha-1} = e^{\alpha} \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1}.$$

Si tratta ora di stabilire, al variare di $\alpha$, il valore del limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1}.$$

- Se $\alpha - 1 > 0$, ossia se $\alpha > 1$, allora

  $$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = +\infty.$$

  Di conseguenza risulta

  $$\ell = e^{\alpha} \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = +\infty > 1,$$

  da cui la divergenza della serie.

- Se $\alpha - 1 = 0$, ossia se $\alpha = 1$, allora

  $$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

  Pertanto

  $$\ell = e^{\alpha} \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = e^{1} \cdot 1 = e > 1,$$

da cui la divergenza della serie.

- Se $\alpha - 1 < 0$, ossia se $\alpha < 1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = 0.$$

Quindi risulta

$$\ell = e^{\alpha} \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = e^{\alpha} \cdot 0 = 0 < 1,$$

da cui la convergenza della serie.

In conclusione, la serie risulta convergente solo per $\alpha < 1$.

28) Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha}}\right)^{\alpha} - 1}{n\,(\log n)^{\alpha-2}}.$$

***Svolgimento.***

Bisogna discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Cominciamo col caso $\alpha > 0$.
Vista la struttura del termine generale $a_n$, conviene applicare il criterio del Confronto Asintotico.

Cerchiamo di capire qual è il comportamento del numeratore per $n \to +\infty$, cosicché riusciamo ad esibire una buona successione $b_n$ adatta al criterio del Confronto asintotico.

Essendo $\alpha > 0$, si ha che $n^{\alpha} \to \infty$, da cui $\dfrac{1}{n^{\alpha}} \to 0$;
pertanto, $1 + \dfrac{1}{n^{\alpha}} \to 1$, e conseguentemente

$$\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha}}\right)^{\alpha} \to 1^{\alpha} = 1,$$

da cui

$$\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha}}\right)^{\alpha} - 1 \to 1 - 1 = 0.$$

Quindi il numeratore del termine generale è infinitesimo. Cerchiamo quindi di capire, ricorrendo ai limiti notevoli, a quale altra successione risulti asintotico per $n \to \infty$.

Ricordando le definizioni di esponenziale e logaritmo, riscriviamo il numeratore come segue:

$$\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^\alpha - 1 = e^{\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^\alpha} - 1 = e^{\alpha\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)} - 1.$$

Poiché

$$\lim_n \alpha \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \alpha\log(1+0) = \alpha\log 1 = \alpha\cdot 0 = 0,$$

il numeratore di $a_n$, vale a dire

$$e^{\alpha\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)} - 1$$

è del tipo

$$e^t - 1, \quad \text{con } t \to 0,$$

essendo nel nostro caso

$$t = \alpha\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Ricordando quindi il limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1,$$

conviene sostituire $a_n$ con la successione

$$b_n = \frac{\alpha\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n\left(\log n\right)^{\alpha-2}}.$$

Per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.
Studiamo quindi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n\left(\log n\right)^{\alpha-2}}.$$

Nuovamente, applichiamo il criterio del Confronto asintotico.

È quindi necessario esibire una successione $c_n$ tale che

$$\lim_n \frac{b_n}{c_n} = \ell \in ]0, \infty[.$$

Anche in questo caso cercheremo di utilizzare un opportuno limite notevole.
È immediato osservare che per $n \to \infty$ il termine

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

è del tipo

$$\log(1+t) \qquad \text{con} \quad t \to 0,$$

(è $t = \frac{1}{n^\alpha}$).

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

conviene scegliere come successione $c_n$ la seguente:

$$c_n = \frac{\alpha \dfrac{1}{n^\alpha}}{n\left(\log n\right)^{\alpha-2}},$$

Quindi studiamo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha \dfrac{1}{n^\alpha}}{n\left(\log n\right)^{\alpha-2}}$$

che, a sua volta, ha lo stesso carattere (sempre per confronto asintotico) della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\dfrac{1}{n^\alpha}}{n\left(\log n\right)^{\alpha-2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}\left(\log n\right)^{\alpha-2}}.$$

Il carattere di tale serie è subito studiato, in quanto si tratta della serie armonica generalizzata col logaritmo.
Si ha convergenza se e solo se

$$\alpha + 1 > 1,$$

ossia se

$$\alpha > 0,$$

che rappresenta proprio l'intervallo degli $\alpha$ in cui stiamo conducendo questa prima parte di discussione.

Pertanto, per $\alpha > 0$, si ha la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{\infty} d_n$, da cui, la convergenza della

serie $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$, da cui la convergenza di $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ e, a sua volta, la convergenza di $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.
Quindi, per $\alpha > 0$, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

converge.

Sia ora $\alpha = 0$.
In tal caso il termine generale si riduce a zero. Quindi non si pone il problema dello studio della convergenza, in quanto la serie identicamente nulla converge a 0 (trattandosi della somma di infiniti addendi tutti uguali a 0).

Sia ora $\alpha < 0$.

Cerchiamo di capire quale sia il comportamento del numeratore per $n \to \infty$.

Essendo $\alpha < 0$, si ha $n^\alpha \to 0$, da cui $\frac{1}{n^\alpha} \to \infty$ e, ovviamente, $1 + \frac{1}{n^\alpha} \to \infty$;
quindi (ricordando nuovamente che $\alpha < 0$) segue immediatamente che

$$\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^\alpha \to 0,$$

da cui

$$\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^\alpha - 1 \to -1.$$

Pertanto, per $n \to \infty$, il numeratore di $a_n$ si comporta come un numero $(-1)$.
Ne segue che conviene scegliere la successione

$$b_n = \frac{-1}{n(\log n)^{\alpha-2}}.$$

Per il criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.

Studiamo quindi il carattere di

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{n(\log n)^{\alpha-2}} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha-2}},$$

che è l'opposta di una serie a termini positivi (il carattere non cambia).

Essendo l'esponente di $n$ uguale ad 1, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha-2}}$$

converge se e solo se

$$\alpha - 2 > 1,$$

ossia

$$\alpha > 3,$$

evidentemente in disaccordo con le ipotesi (ossia $\alpha < 0$).

Quindi per $\alpha < 0$ la serie non converge.

In conclusione, per $\alpha < 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ diverge, mentre per $\alpha \geq 0$ converge.