Equazioni differenziali ordinarie

Un'equazione differenziale ordinaria di ordine n è una relazione tra:

1. una variabile indipendente $x \in \mathbb{R}$,
2. una funzione incognita $y = y(x)$ a valori reali
3. le derivate $y^{(k)}$ di y fino all'ordine n.

Tale relazione è scritta come

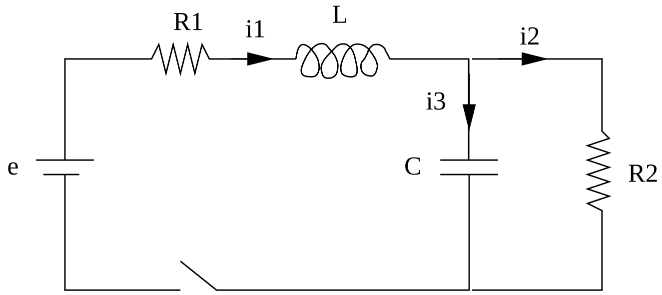
$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Es. $y'' + (1 + x)y\ y' - y + \sin(x) = 0$ è una equazioni differenziale ordinaria di ordine 2.

Data l'eqz. differenziale, l'obiettivo è calcolare la funzione $y(x)$ che soddisfa l'equazione data.

Esempio di elettrotecnica

Si consideri il circuito elettrico seguente:



Si vuole determinare la differenza di potenziale ai capi del condensatore dal momento in cui il circuito viene chiuso e per un certo intervallo di tempo.

x rappresenta la variabile indipendente *tempo*

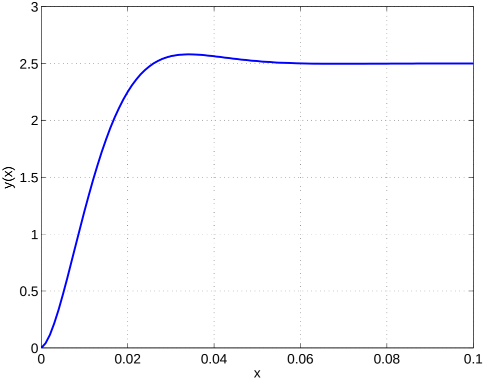
$y = y(x)$ è la differenza di potenziale ai capi del condensatore

Utilizzando le leggi di Kirchoff e di Ohm ed i legami tra differenza di potenziale, carica e intensità di corrente, si perviene alla relazione seguente:

$$LCy''(x) + (R_1 C + L/R_2)y'(x) + (1 + R_1/R_2)y(x) = e \qquad (1)$$

con le "condizioni iniziali" al tempo $x = 0$ (istante in cui viene chiuso il circuito) $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Se ad esempio si prendono $L = 0.1$ Henry, $C = 10^{-3}$ Farad, $R_1 = R_2 = 10$ Ohm, $e = 5$ Volt, si ottiene la seguente soluzione:



Obiettivo: risolvere semplici equazioni differenziali analiticamente.

Alcune definizioni

Def. L'ordine di una equazione differenziale ordinaria è il massimo ordine di derivazione che compare.

Def. Una soluzione dell'eq. diff. $\mathcal{F}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ in $I \subset \mathbb{R}$ è una funzione $y = y(x)$, $y : I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte su I e tale che:

$$\mathcal{F}(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \qquad \forall x \in I$$

Def. Una eqz. diff. si dice in forma normale se si può esplicitare la derivata di ordine massimo, ovvero se esiste una funzione f tale che:

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}).$$

Es. L'equazione del circuito si può scrivere in forma normale:

$$y'' = -\frac{1}{LC}\left(R_1 C + \frac{L}{R_2}\right) y' - \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) y + \frac{1}{LC} e.$$

Def. L'eqz. diff. si dice autonoma se non compare una dipendenza esplicita dalla variabile indipendente x.

Es.

$$\begin{aligned} \sin(x)y'' + y' - xy = \cos(x) &\quad \text{non è autonoma} \\ y'' + (x+1)y = 0 &\quad \text{non è autonoma} \\ y'' - (y')^2 = 1 &\quad \text{è autonoma} \end{aligned}$$

Def. Un'eqz. diff. si dice lineare se y e tutte le sue derivate compaiono al massimo con grado 1.

Es.

$$\begin{aligned} y'' - (y')^2 = 1 &\quad \text{non è lineare} \\ y'' + (x+1)y' = 0 &\quad \text{è lineare} \end{aligned}$$

Equazioni del primo ordine

La forma generale è $\boxed{\mathcal{F}(x, y, y') = 0}$

L'eqz. diff. scritta in forma normale è $\boxed{y' = f(x, y)}$

Es. $y'(e^y + 1) - (e^x + 1) = 0$ (nella forma $\mathcal{F}(x, y, y') = 0$)

In forma normale si ha: $y' = \dfrac{e^x + 1}{e^y + 1}$.

L'obiettivo è calcolare una funzione $y(x)$ che soddisfa l'equazione differenziale data.

Quante soluzioni esistono?

Una semplice equazione

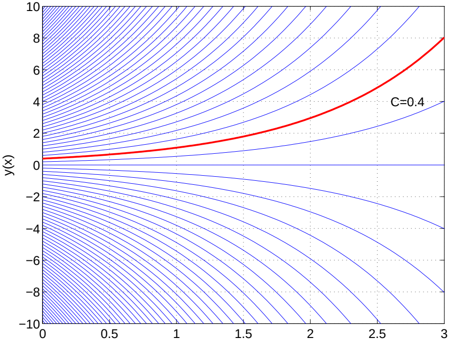
Risolvere $y' - y = 0$ o, equivalentemente $y' = y$.

$y(x)$ definita su I è una soluzione di $y' = y$ se $y'(x) = y(x)$, $\forall x \in I$.

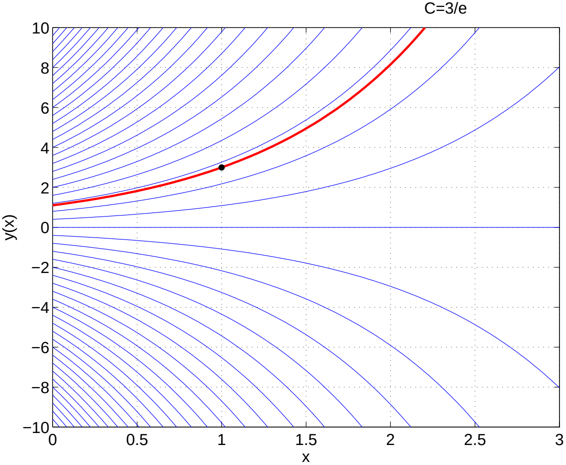
Ricordiamo che una funzione che coincide con la sua derivata è $y(x) = e^x$, quindi $y(x) = e^x$ è soluzione di $y' = y$.

Però anche $y(x) = Ce^x$ soddisfa $y'(x) = Ce^x = y(x)$, essendo C un qualsiasi numero reale.

Quindi l'equazione data ammette infinite soluzioni.



Ci si pone il problema di determinare una soluzione particolare, per esempio quella che soddisfa una condizione del tipo $y(x_0) = y_0$, con x_0 e y_0 le coordinate di un punto del piano cartesiano.
Ad esempio tra tutte le soluzioni $y(x) = Ce^x$, cerco quella che passa per il punto $(1, 3)$, ovvero t.c. $y(1) = 3$. Allora trovo $y(1) = Ce = 3$, cioè $C = 3/e$



Una soluzione generica dell'equazione differenziale $\mathcal{F}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, dipendente da una costante generica C è detta integrale generale dell'equazione differenziale.
Una soluzione con una C specifica è detta integrale particolare dell'equazione differenziale.

Problema di Cauchy

Data una funzione $f(x,y)$ e dato un punto (x_0,y_0) del piano cartesiano, il problema di determinare la funzione $y = y(x)$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, t.c.

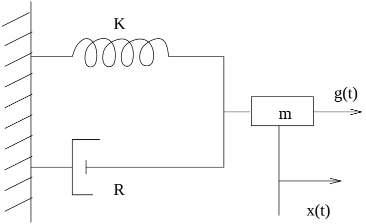
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $x_0 \in I$, è detto problema di Cauchy del primo ordine.
La condizione $y(x_0) = y_0$ è detta condizione iniziale ed il problema di Cauchy è anche detto problema ai valori iniziali.

La variabile indipendente x può rappresentare il tempo, per cui interessa studiare come evolve un sistema a partire da una situazione assegnata y_0 all'istante iniziale x_0.

Un altro esempio

Moto di un sistema costituito da un corpo di massa m, da una molla fissata ad una parete (=oscillatore).



L'oscillatore è sottoposto ad una forza esterna $g(t)$ (t = tempo) ed è presente una resistenza meccanica R.
Indicando con $x(t)$ lo spostamento della massa m al tempo t, esso è soluzione della seguente equazione differenziale:

$$mx''(t) + Rx'(t) + K(x(t) - L) = g(t) \qquad t \geq t_0$$

dove L è la lunghezza a riposo della molla e K è la sua costante elastica.
$x(t_0) = x_0$ posizione iniziale, $x'(t_0) = 0$ velocità iniziale. Qui t è la variabile indipendente, $x(t)$ è la funzione incognita.

Problema di Cauchy

Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ (intervallo), $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, si cerca $y : I \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Teorema. Se $f(x, y)$ è continua rispetto ai suoi argomenti ed è lipschitziana rispetto al secondo argomento, uniformemente rispetto al primo argomento, ovvero esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \; \forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

ALLORA esiste un intervallo chiuso $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ tale che esiste unica soluzione $y(x)$ di classe $C^1([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha])$ del problema di Cauchy (2).

Equazioni del primo ordine a variabili separabili

Sono equazioni del tipo

$$y' = f(x, y) = g(x)h(y)$$

cioè equazioni in cui la funzione $f(x, y)$ può essere scritta come prodotto di due funzioni: g (=funzione continua della sola x) e h (=funzione continua della sola y).

Es. $y' = \dfrac{e^x + 1}{e^y + 1}$. Si ha $g(x) = e^x + 1$, $h(y) = \dfrac{1}{e^y + 1}$.

Anzitutto si osserva che se $\exists \overline{y} : \; h(\overline{y}) = 0$, allora la funzione costante $y(x) = \overline{y}$ è soluzione dell'equazione differenziale data. Infatti, se $h(\overline{y}) = 0$ e $y(x) = \overline{y}$, allora $y'(x) = 0$ e si ha $0 = 0$.

Quindi $y' = g(x)h(y)$ ha tanti integrali particolari quanti sono gli zeri di $h(y)$. Questi integrali particolari sono detti integrali singolari.

Ora sia $y: \ h(y) \neq 0$, allora, da $y' = g(x)h(y)$ posso scrivere

$$\frac{1}{h(y)} y' = g(x).$$

Riprendendo la notazione di derivata di Leibniz e operando formalmente, abbiamo

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x), \ \text{ovvero} \ \frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

e integrando a sinistra e a destra si ha:

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + c.$$

Es.

$$1) \ y' = 2x\sqrt{1-y^2} \qquad 2) \ y' = 2y - y^2$$

$$3) \ y' = \frac{e^x+1}{e^y+1} \qquad 4) \ y' = x \sin y$$

$$5) \ y' = \frac{2xy}{x^2-1}$$

6)

$$\begin{cases} yy' = x(4-y^2) \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{x \to +\infty} y(x)$

7)

$$\begin{cases} y' = y^3 \sin(2x) \cos(2x) \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

Calcolare $y\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Equazioni del primo ordine lineari a coefficienti continui

Sono equazioni del tipo

$$y' + a(x)y = b(x)$$

con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue su un intervallo I.

Se $b(x) = 0$, l'equazione si dice omogenea
se $b(x) \neq 0$, l'equazione si dice non omogenea

Il problema di Cauchy associato a questo tipo di equazione è:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con x_0, y_0, $a(x)$ e $b(x)$ noti. Si deve calcolare $y(x)$.

Vediamo come risolvere il problema di Cauchy per eqz. diff. del primo ordine lineari a coeff. continui.

1. Sia $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$ la funzione integrale di $a(x)$.
2. Prendo l'eqz. diff. $y' + a(x)y = b(x)$ e la moltiplico per $e^{A(x)}$ (a sx e a dx):

$$(y' + a(x)y)e^{A(x)} = b(x)e^{A(x)}. \tag{3}$$

3. Osservo che

$$(y'e^{A(x)} + a(x)ye^{A(x)}) = y'e^{A(x)} + yA'(x)e^{A(x)} = D(ye^{A(x)}) \tag{4}$$

e, integrando entrambi i membri di (3) tra x_0 e x, si ha

$$\int_{x_0}^{x} (y' + a(t)y)e^{A(t)}dt = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt \tag{5}$$

Il termine di sx di (4) è

$$\int_{x_0}^{x} (y' + a(t)y)e^{A(t)}dt = \int_{x_0}^{x} (ye^{A(t)})'dt = ye^{A(x)} - y_0 e^{A(x_0)} = ye^{A(x)} - y_0, \tag{6}$$

Quindi

$$ye^{A(x)} - y_0 = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt$$

ovvero

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{e^{A(x)}}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right)}$$

Casi particolari

1. se $b(x) = 0$ (equazione omogenea), $y' + a(x)y = 0$

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{-A(x)}}$$

2. se $b(x) = 0$ e $a(x) = a$ costante, $y' + ay = 0$
si ha $A(x) = a \cdot (x - x_0)$ e la soluzione è:

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{-a\cdot(x-x_0)}}$$

3. se $a(x) = 0$, $y' = b(x)$
si ha $A(x) = 0$ e la soluzione è:

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)dt}$$

(poichè $b(t) = y'(t)$, questo non è altro che il teorema fondamentale del calcolo integrale).

Esercizi

$$\begin{cases} y' - \dfrac{2}{x}y = 2x - \dfrac{14}{x} \\ y(1) = 7 \end{cases} \tag{7}$$

Calcolare $\lim_{x\to 0^+} y(x)$.

$$\begin{cases} y' + y\tan(x) = \sin(2x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

Calcolare $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{2}{\pi}x\cos(x)e^{2\sin(x)} \\ y(\pi) = 1 \end{cases} \tag{9}$$

Calcolare $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Equazioni del secondo ordine lineari a coeff. costanti

Sono equazioni del tipo

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

con a e b costanti assegnate e $f(x)$ una funzione continua assegnata su I.

Il problema di Cauchy relativo è:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$, y_0 e y_1 sono valori assegnati. L'incognita è la funzione $y : I \to \mathbb{R}$.

Oss. Se avessimo una eqz. diff. di ordine n, servirebbero n condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Ritorniamo all'eqz del secondo ordine

1. Dapprima si considera l'equazione omogenea associata

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{11}$$

2. si costruisce il polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{12}$$

ottenuto da (11) sostituendo alla derivata $y^{(k)}$ la potenza λ^k.

3. si calcolano le radici $\lambda_1,\ \lambda_2$ del polinomio caratteristico (12). Si possono avere 3 casi, a seconda del segno del discriminante Δ di (12).

3.1 $\Delta > 0$. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distinte. Allora le funzioni $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni particolari di (11). L'integrale generale di (11) è:

$$y_o(x; c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.2 $\Delta = 0$. Due soluzioni coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$. L'integrale generale di (11) è:

$$y_o(x; c_1, c_2) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.3 $\Delta < 0$. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$ complesse coniugate con $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2)$ e $Im(\lambda_1) = -Im(\lambda_2)$.
L'integrale generale di (11) è:

$$y_o(x; c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Caso 3.3 $\Delta < 0$

Ricordando la definizione di esponenziale di $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^{Re(z)}(\cos(Im(z)) + i\sin(Im(z)))$$

e ricordando che $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2)$ e $Im(\lambda_1) = -Im(\lambda_2)$, si ha:

$$\begin{array}{rcl}
y_o(x; c_1, c_2) & = & c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \\
& = & c_1 e^{Re(\lambda_1)x}(\cos(Im(\lambda_1)x) + i\sin(Im(\lambda_1)x) \\
& & +c_2 e^{Re(\lambda_2)x}(\cos(Im(\lambda_2)x) + i\sin(Im(\lambda_2)x) \\
& = & e^{Re(\lambda_1)x}\Big[c_1(\cos(Im(\lambda_1)x) + i\sin(Im(\lambda_1)x)) \\
& & +c_2(\cos(Im(\lambda_2)x) + i\sin(Im(\lambda_2)x))\Big] \\
& = & e^{Re(\lambda_1)x}\Big[(c_1 + c_2)\cos(Im(\lambda_1)x) + i(c_1 - c_2)\sin(Im(\lambda_1)x)\Big]
\end{array}$$

Poichè f è a valori reali si ha $c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$ e $i(c_1 - c_2) \in \mathbb{R}$.
Ponendo $C_1 = c_1 + c_2$ e $C_2 = i(c_1 - c_2)$, la soluzione dell'omogenea si può scrivere in funzione della sola λ_1, con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$:

$$y_o(x; C_1, C_2) = e^{Re(\lambda_1)x}(C_1\cos(Im(\lambda_1)x) + C_2\sin(Im(\lambda_1)x))$$

Ritorniamo all'equazione non omogenea

$$y'' + ay' + by = f(x). \qquad (13)$$

L'integrale generale di (13) si scrive come

$$\boxed{y(x; c_1, c_2) = y_o(x; c_1, c_2) + y_p(x)}$$

dove $y_o(x; c_1, c_2)$ è l'integrale generale dell'omogenea associata e $y_p(x)$ è un integrale particolare che dipende dall'espressione di $f(x)$.

Consideriamo il caso in cui $f(x)$ è prodotto tra un polinomio algebrico di grado n ($p_n(x)$), un'esponenziale ($e^{\alpha x}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$) e una funzione trigonometrica ($\sin(\beta x)$ o $\cos(\beta x)$ con $\beta \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = p_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad o \quad f(x) = p_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

Con $f(x)$ così scelta si ha

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(q_1(x)\cos(\beta x) + q_2(x)\sin(\beta x))$$

dove:
q_1 e q_2 sono due polinomi di grado n e:
se $\alpha + i\beta$ è radice del polinomio caratteristico (cioè coincide con λ_1 e /o λ_2), allora m è la sua molteplicità, altrimenti $m = 0$.

Riferimenti bilbiografici

Canuto Tabacco, cap 11.

Esercizi 1. $y'' + y' - 6y = 3x^2 - x + 2$

2. $y'' + y' - 6y = 4\cos(2x)$

3. $y'' + y' - 3y = e^x$

4. $y'' - 4y = 4e^{2x}$

5. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y'' + y = 1 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3. \end{cases}$$

Calcolare $y\left(\frac{2}{3}\pi\right)$.

6. Sia $y(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 4y' + 4y = 0$ tale che $\lim_{x\to+\infty} y(x)e^{2x} = 2$. Si determini $y(0)$.

7. Sia $y(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - y = 1$ tale che $y'(0) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = 0$. Si determini $y(0)$.