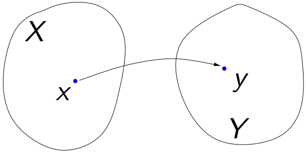
FUNZIONI

Siano X e Y due insiemi.

Def. Una **funzione** f **definita in** X **a valori in** Y è una corrispondenza (una legge) che associa ad ogni elemento $x \in X$ al piú un elemento y in Y.



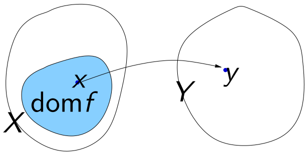
Def. L'insieme Y è detto **codominio** di f.

Es. Siano $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ e $f : x \mapsto y = \dfrac{1}{x}$ (ad un numero reale associo il suo inverso).

x	4	$\sqrt{2}$	$-2/3$	...	$-e$	...	0
$y = 1/x$	$1/4$	$1/\sqrt{2}$	$-3/2$	...	$-1/e$	...	?

Def. L'insieme degli $x \in X$ a cui f associa uno e un solo elemento $y \in Y$ è detto **dominio** di f e si indica con $\text{dom}f$. Si ha $\text{dom}f \subseteq X$ e si scrive:

$$f : \text{dom}f \subseteq X \to Y.$$



N.B. $\text{dom}f$ è l'insieme degli $x \in X$ per i quali la corrispondente y sta in Y.

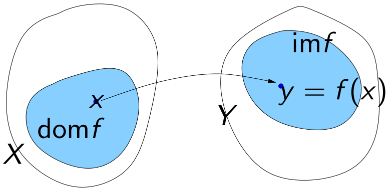
Es. $f(x) = 1/x$ con $X = Y = \mathbb{R}$. Se $x \neq 0 \Rightarrow y = 1/x \in \mathbb{R}$

MA $\frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$, QUINDI $\text{dom}f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Oss. $\forall x \in \text{dom}f$, f associa ad x uno e un solo elemento $y \in Y$.

Immagine

Def. L'unico elemento $y \in Y$ associato ad un elemento $x \in \text{dom} f$ si dice immagine di x attraverso f e si scrive $y = f(x)$ (oppure $f : x \mapsto y = f(x)$).



Def. Dato $A \subset \text{dom } f$, l'insieme $B = \{y \in Y : \ \exists x \in A : \ y = f(x)\}$ è detto immagine di A attraverso f e si può scrivere $B = f(A)$.

Def. L'insieme $\text{im} f = \{y \in Y : \ \exists x \in \text{dom} f : \ y = f(x)\}$ è detto immagine di f. Si ha l'inclusione: $\text{im} f \subseteq Y$.

Es. $f(x) = 1/x$ con $X = Y = \mathbb{R}$.
$y = 1/4$ è l'immagine di $x = 4$ mediante f.
L'insieme immagine è: $\text{im} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Def. L'insieme

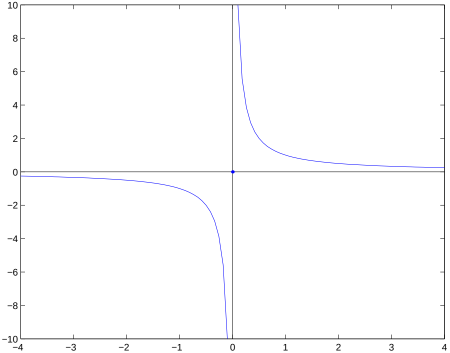
$$G(f) = \{(x,y)|\ x \in \mathrm{dom} f,\ e\ y = f(x) \in \mathrm{im} f\} \subset X \times Y$$

è detto **grafico** di f.

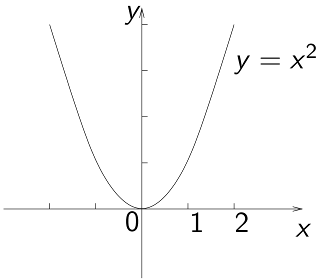
Es. $f(x) = 1/x$ con $X = Y = \mathbb{R}$.

$X \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 =$ piano cartesiano.

$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1/x\}$



Def. Una funzione si dice **reale** se $Y=\mathbb{R}$.
Def. Una funzione si dice **a variabile reale** se $X=\mathbb{R}$.
Il grafico di una funzione reale a variabile reale è l'insieme dei punti (x,y) del piano cartesiano tali che $y=f(x)$.
Es. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $f(x)=x^2$



Controimmagine

Def. Sia $y \in Y$, la **controimmagine di** y **attraverso** f è l'insieme

$$f^{-1}(y) = \{x \in \mathrm{dom} f : f(x) = y\} \subseteq \mathrm{dom} f.$$

Es. Considerando la funzione di prima $f(x) = \dfrac{1}{x}$, la controimmagine del valore $y = 3$ è

$$f^{-1}(3) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; 1/x = 3\} = \{1/3\}$$

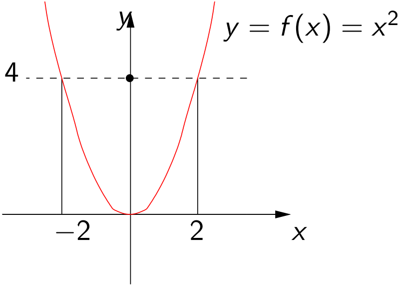
La controimmagine di $y = 0$ è

$$f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; 1/x = 0\} = \emptyset$$

Non c'è alcun valore reale x tale che $1/x = 0$.

Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, $\mathrm{im} f = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\} = [0, +\infty)$.

? $f^{-1}(4)$

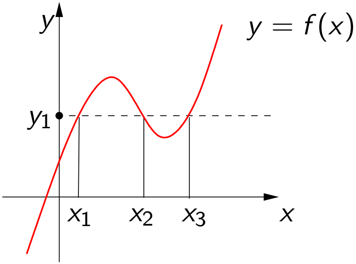


$$f^{-1}(4) = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$$

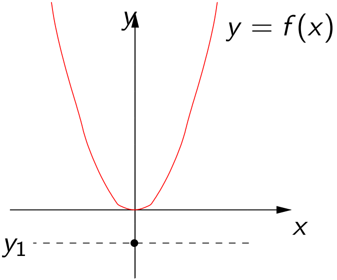
f suriettiva

Def. Una funzione si dice **suriettiva** se im$f = Y$, ovvero se ogni elemento di Y ha per controimmagine un insieme non vuoto, ovvero ogni elemento di Y è l'immagine di almeno un elemento di dom$f$.

Esempi



SURIETTIVA:
$\text{im} f = Y = \mathbb{R}$

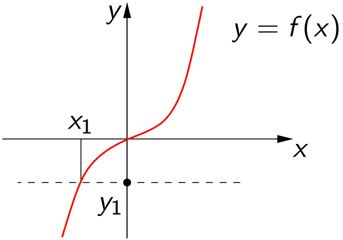


NON SURIETTIVA:
$\text{im} f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \; Y = \mathbb{R}$

f iniettiva

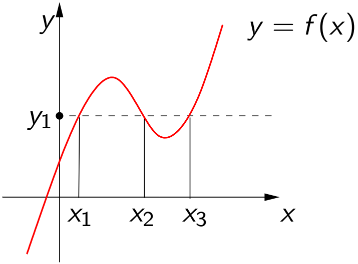
Def. Una funzione si dice **iniettiva** se ogni elemento di $\mathrm{im}f$ è immagine al piú di un elemento di $\mathrm{dom}f$, o equivalentemente se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esempi



INIETTIVA:

$f^{-1}(y_1) = \{x_1\}$



NON INIETTIVA:

$f^{-1}(y_1) = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$, o

$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y_1$

f biettiva

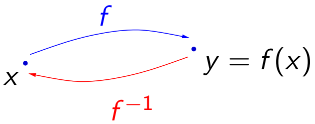
Def. Una funzione f si dice **biunivoca** o **biettiva** se è sia iniettiva che surettiva, ovvero ogni elemento $y \in Y$ è immagine di uno e uno solo elemento $x \in \mathrm{dom} f$.

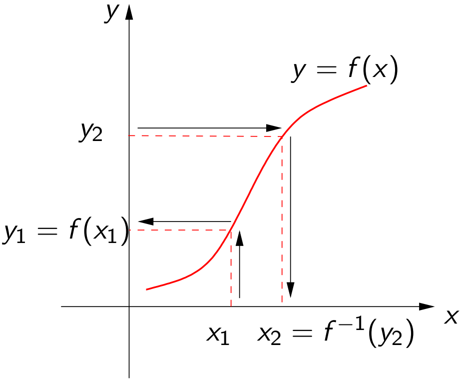
Osservazione: Sia $D = \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}$.
Se invece di considerare $f : D \to \mathbb{R}$, consideriamo $f : D \to \mathrm{im} f$, automaticamente abbiamo f suriettiva (facciamo coincidere il codominio con $\mathrm{im} f$).
Per definizione di $\mathrm{im} f$, ad ogni elemento $y \in \mathrm{im} f$ corrisponde almeno un elemento $x \in D : \; y = f(x)$.

Funzione inversa

Sia $D = \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$. Considero una funzione $f : D \to \text{im} f$ (quindi suriettiva).

Def. Se una funzione f è iniettiva sul suo dominio, possiamo costruire una funzione che ad ogni elemento $y \in \text{im} f$ associa l'unico elemento x dell'insieme controimmagine.



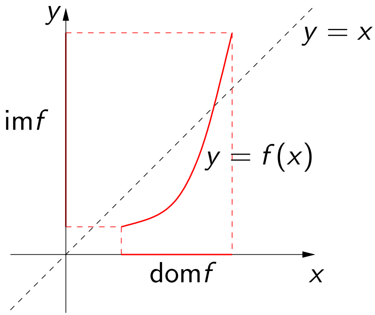


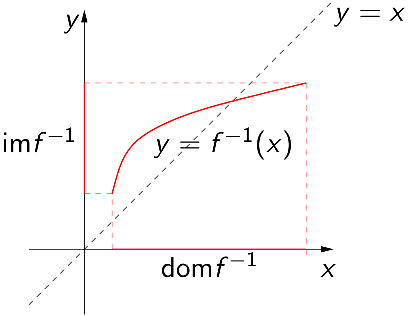
Tale funzione è detta funzione inversa di f, viene indicata con f^{-1}

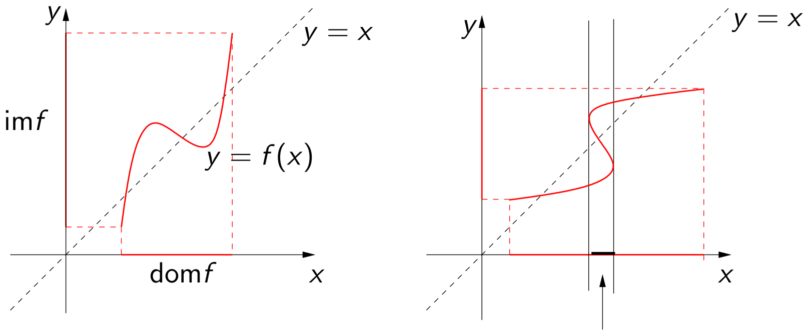
Funzione inversa

$$\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{im} f, \qquad \mathrm{im} f^{-1} = \mathrm{dom} f$$

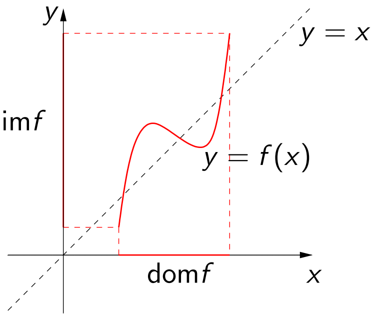
Grafico della funzione inversa

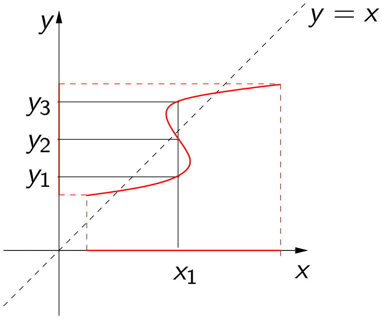






$y = f(x)$ NON è iniettiva e **NON** è invertibile,
ovvero la curva a destra non è il grafico di alcuna funzione,
ad una x corrisponde piú di una y





$f(x)$ NON è iniettiva e **NON** è invertibile,
ovvero la curva a destra non è il grafico di alcuna funzione,
ad una x corrisponde piú di una y

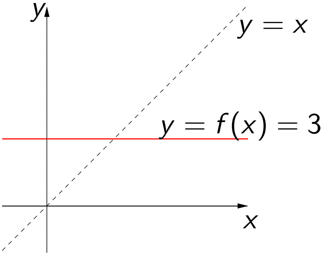
Quindi:

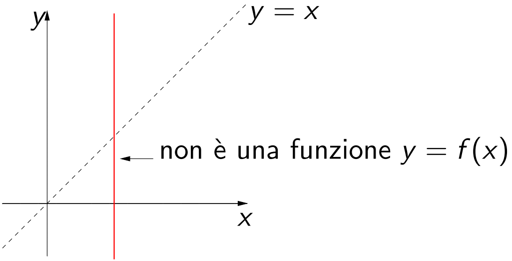
$f : D \to \mathbb{R}$ è invertibile se e solo se è suriettiva e iniettiva.

$f : D \to \mathrm{im} f$ è invertibile se e solo se è iniettiva (è già suriettiva su $\mathrm{im} f$)

NOTA: quando analizzeremo l'invertibilità, considereremo sempre
$f : D \to \mathrm{im} f$

Esempio: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{im} f$, $f(x) = 3$ NON è invertibile sul suo dominio; ($\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, $\mathrm{im} f = \{3\}$, f NON è iniettiva)

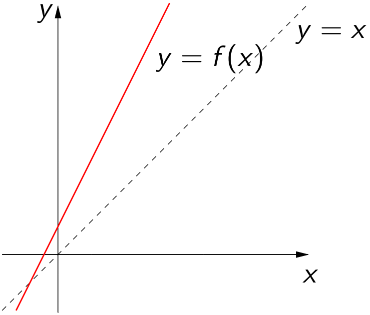


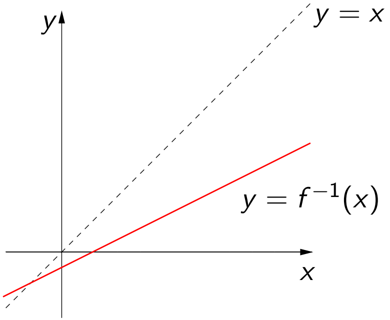


$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{im} f$, $f(x) = 3x + 2$

f è invertibile sul suo dominio;

$(\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, $\mathrm{im} f = \mathbb{R}$, f è iniettiva$)$



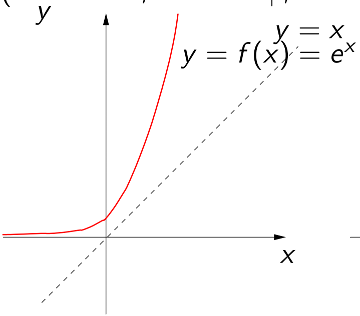


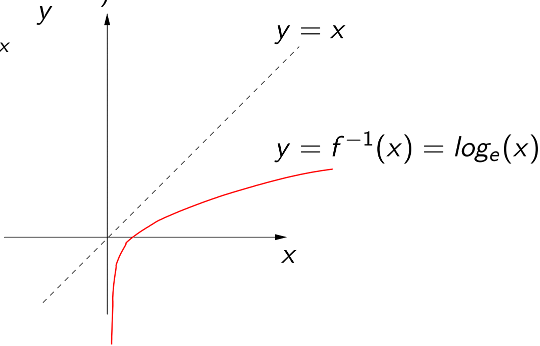
$\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{im} f = \mathbb{R}$, $\mathrm{im} f^{-1} = \mathrm{dom} f = \mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{im} f$, $f(x) = e^x$

f è invertibile sul suo dominio;

($\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, $\mathrm{im} f = \mathbb{R}_+$, f è iniettiva)



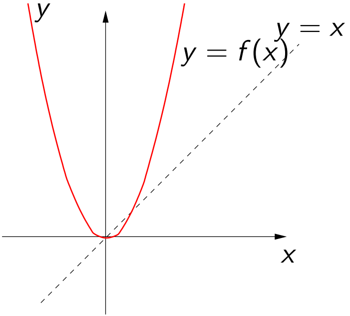


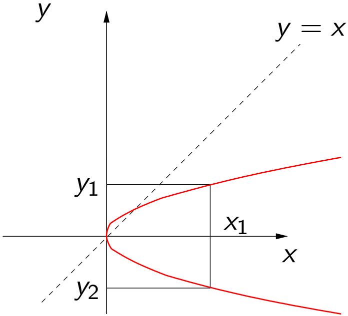
$\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{im} f = \mathbb{R}_+$, $\mathrm{im} f^{-1} = \mathrm{dom} f = \mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{im} f,\ f(x) = x^2$

f NON è invertibile sul suo dominio;

$(\mathrm{dom} f = \mathbb{R},\ \mathrm{im} f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\},\ f$ NON è iniettiva$)$

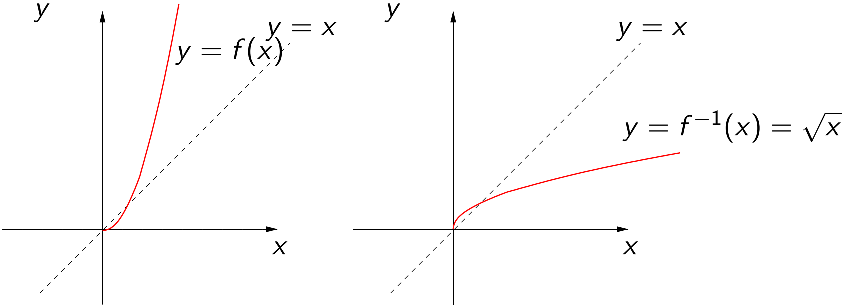




$f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathrm{im} f,\ f(x) = x^2$

f è invertibile sull'insieme di definizione $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

($\mathrm{dom} f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathrm{im} f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, f è iniettiva)



$$\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{im} f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\},\ \mathrm{im} f^{-1} = \mathrm{dom} f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Funzioni matematiche elementari

Funzioni polinomiali e razionali

retta: $y = f(x) = mx + q$, con $m,\ q \in \mathbb{R}$ assegnati.
parabola: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ assegnati.
cubica: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ assegnati.
razionale: $y = f(x) = 1/x$, $y = f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4}$,....

Funzioni trigonometriche

seno: $y = sin(x)$ coseno: $y = cos(x)$
tangente: $y = tg(x)$ cotangente: $y = cotg(x)$,...

Funzioni trascendenti

esponenziale: $y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}_+$
logaritmo: $y = log_a(x)$, con $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$
caso particolare: $a = e = 2.718281828459...$ (**Numero di Nepero**)

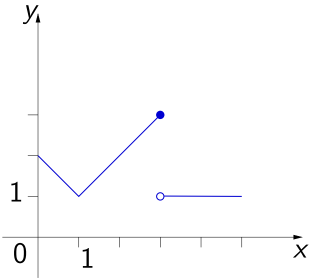
Funzioni irrazionali

radice: $y = \sqrt{(x)}$, $y = \sqrt[3]{(x)}$...

Funzioni definite a tratti

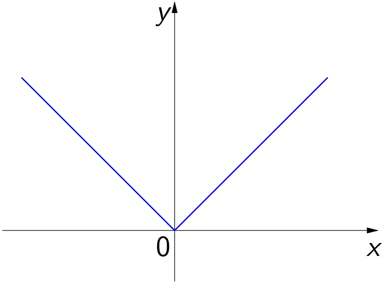
Sono funzioni reali di variabile reale ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) definite da espressioni diverse su intervalli diversi:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{se } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$



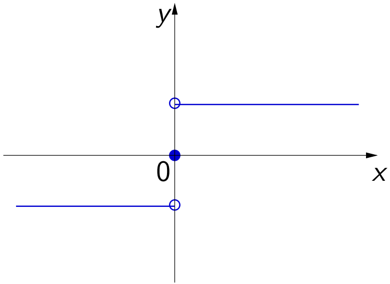
Funzione Valore Assoluto

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Funzione Segno

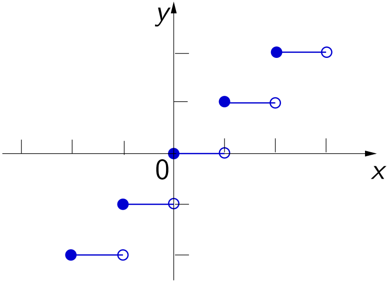
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : \quad f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Funzione Parte Intera

E' la funzione che associa ad un numero reale x il piú grande numero intero (in $\mathbb{Z}$) minore o uguale a x:
se $x = 3.4524$, $[x] = 3$, se $x = 2$, $[x] = 2$,
se $x = -12.786786$, $[x] = -13$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : \quad f(x) = [x]$$



Successioni

Def. Una **successione** è una funzione reale ($Y = \mathbb{R}$) a variabile naturale, ovvero $X = \mathbb{N}$:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \quad n \mapsto y = a(n) = a_n.$$

Il **dominio** di una successione è del tipo $\{n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$ con n_0 un opportuno numero naturale.

Es. $a_n = \dfrac{1}{n}$, in questo caso $n_0 = 1$.

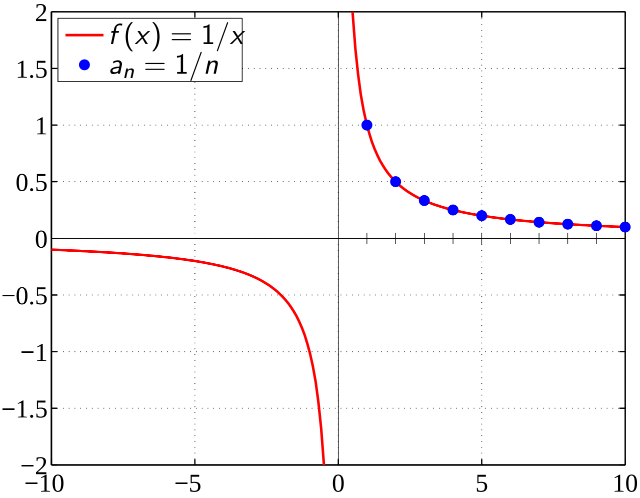
Es. $a_n = \dfrac{n+1}{n-2}$, in questo caso $n_0 = 3$.

Es. $a_n = (-1)^n$, in questo caso $n_0 = 0$.

Es. Il fattoriale di n: $\qquad a_n = n!,\ n \in \mathbb{N}$.

$0! := 1, \quad n! := n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1$

Confronto tra $f(x) = 1/x$ e $a_n = 1/n$



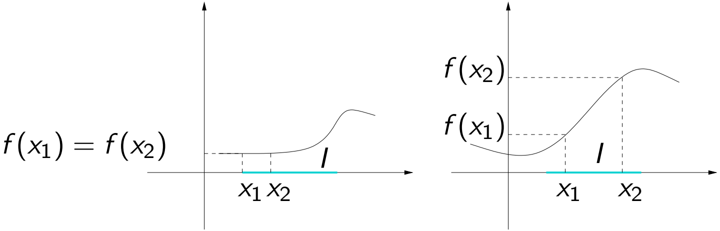
$$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}, \qquad \text{dom} a = \{n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$$

Funzioni monotone

Sia I il dominio di una funzione f reale a valori reali, oppure un intervallo contenuto nel dominio di f.

Def. La funzione f si dice **monotona crescente su I** se

$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$



Def. La funzione f si dice **monotona strettamente crescente su** I se

$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Analogamente si definisce una funzione **monotona decrescente su** I se

$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

e **monotona strettamente decrescente su** I se

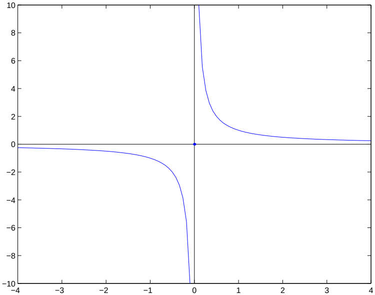
$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Proposizione. Se f è strettamente monotona sul suo dominio allora f è iniettiva.
Dim. Sia f strettamente monotona crescente, allora $\forall x_1,\ x_2 \in \mathrm{dom}(f)$ con $x_1 < x_2$ $(x_1 \neq x_2)$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ e quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$, ovvero f è iniettiva.
Dimostrazione analoga si ha per f strettamente monotona decrescente. $\square$

Il viceversa non è vero. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è iniettiva senza essere strettamente monotona sul suo dominio.



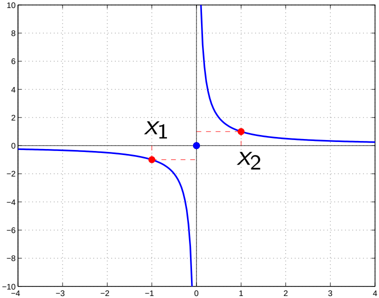
$\text{dom} f = \mathbb{R}$.
f è decrescente su $(-\infty, 0)$, è decrescente su $(0, +\infty)$, ma non è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

Infatti per $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, si ha $f(x_1) = -1 < f(x_2) = 1$.

Il viceversa non è vero. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è iniettiva senza essere strettamente monotona sul suo dominio.



$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$.
f è decrescente su $(-\infty, 0)$, è decrescente su $(0, +\infty)$, ma non è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

Infatti per $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, si ha $f(x_1) = -1 < f(x_2) = 1$.

Funzioni composte

Siano X, Y e Z tre inisiemi in $\mathbb{R}$. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Definiamo una nuova funzione $h : X \to Z$ detta funzione composta di f e g tale che

$$h(x) = g(f(x)), \qquad h = g \circ f.$$

Es. $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x^2$.
La funzione composta è: $h(x) = g(f(x)) = (\sin(x))^2$.
$f(x)$ prende il posto di x nella definizione di g.

Es. Sia $h(x) = \log(2x + 1)$.
Posso vedere $h(x) = g(f(x))$ con $g(x) = \log(x)$ e $f(x) = 2x + 1$.

Es. Sia $h(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x^2}}$.
Posso vedere $h(x) = g(f(x))$ con $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2}$.

Dominio di una funzione composta

Il dominio di una funzione f è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui f è definita, ovvero l'insieme

$$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Prendiamo $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x}$,

$h(x) = g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$.

$$x \in \mathrm{dom}\ (g \circ f) \Leftrightarrow x \in \mathrm{dom} f \quad e \quad f(x) \in \mathrm{dom}\ g$$

Quindi $x \in \mathrm{dom} h$ sse $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$, ovvero $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

$$\mathrm{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{dom} f : \ f(x) \in \mathrm{dom} g\}$$

Oss. La composizione di funzioni non è commutativa:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

$f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x^2$.
$(g \circ f)(x) = (\sin(x))^2$ mentre $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$.

Proprietà. Se f e g sono iniettive allora lo è anche $g \circ f$ e vale

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Proprietà. Se f e g sono entrambe monotone crescenti (o entrambe decrescenti) allora anche $g \circ f$ sarà monotona crescente.
$g \circ f$ sarà monotona decrescente negli altri casi.

Riferimento bibliografico

Canuto-Tabacco, cap. 2.

Esercizi:
1) Individuare dominio e insieme immagine delle funzioni elementari viste ad esercitazione e dire se sono monotone (crescenti o decrescenti) sul loro dominio, se sono iniettive, suriettive, biettive, invertibili.
2) Esercizi del cap. 2 del libro Canuto-Tabacco.