

SUCCESSIONI

e

LIMITI DI SUCCESSIONI

Richiami

Ricordiamo la definizione di **Punto di accumulazione**.

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è un **punto di accumulazione per A** se in **ogni intorno** di x_0 cade almeno un punto di A diverso da x_0 .

Se $A \equiv \mathbb{R}$, allora un qualsiasi punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (finito o infinito) è di accumulazione per \mathbb{R} .

ma se $A = \mathbb{N}$, **L'unico punto di accumulazione per \mathbb{N} è $+\infty$**

Ricordiamo che una **successione** è una funzione il cui dominio è contenuto nell'insieme dei numeri naturali:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \quad a : n \mapsto y = a_n$$

In conclusione, **l'unico limite che possiamo calcolare sulle successioni è per**

$$n \rightarrow \infty$$

Classificazione di successioni

Una successione può essere:

- **CONVERGENTE** se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ finito
- **DIVERGENTE POSITIVAMENTE** se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
- **DIVERGENTE NEGATIVAMENTE** se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
- **INDETERMINATA** se $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Es. La successione

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$$

è indeterminata.

Successioni convergenti

Def. La successione $a : n \mapsto a_n$, definita per $n \geq n_0$, **tende al limite** $l \in \mathbb{R}$ (o **converge al limite** $l \in \mathbb{R}$) e si scrive

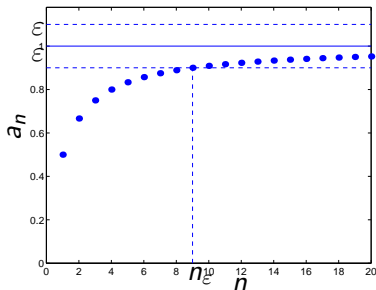
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ (\varepsilon reale), } \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

oppure (secondo la terminologia degli intorni) se:

$$\forall I_\varepsilon(l), \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) : \forall n \geq n_0, n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(l)$$



Def. Una successione convergente a $\ell = 0$ si dice **infinitesima**.

Es. $a_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Questa è una succ. infinitesima

Es. $a_n = \frac{n}{n+1}$. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Questa è una succ. convergente

Es. $a_n = \frac{3n^2 + 1}{5n^2 + 2n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{5n^2 + 2n} = \frac{3}{5}$$

Questa è una succ. convergente

Successioni divergenti

Def. La successione $a : n \mapsto a_n$ **tende** a $+\infty$ (o **diverge** a $+\infty$) e si scrive

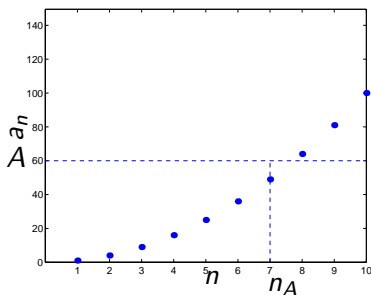
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

se

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_A \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n > n_A \Rightarrow a_n > A$$

oppure (secondo la terminologia degli intorni) se:

$$\forall I_A(+\infty), \exists I_{n_A}(+\infty) : \forall n \geq n_0, n \in I_{n_A}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_A(+\infty)$$



In maniera analoga si definisce una successione divergente a $-\infty$.

Def. La successione $a : n \mapsto a_n$ **tende** a $-\infty$ (o **diverge** a $-\infty$) e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

se

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_A \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n > n_A \Rightarrow a_n < -A$$

oppure (secondo la terminologia degli intorno)

$$\forall I_A(-\infty), \exists I_{n_A}(+\infty) : \forall n \geq n_0, n \in I_{n_A}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_A(-\infty)$$

Es. $a_n = -\log(n)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\log(n)) = -\infty,$$

Es. $a_n = -n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty,$$

TEOREMI SUI LIMITI DI SUCCESSIONE

Valgono tutti i teoremi visti per i limiti di funzione, ovviamente adattati alle successioni.

Teorema di unicità del limite. Una successione non può avere più di un limite.

Teorema di permanenza del segno. Esista $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $\ell > 0$ allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

Corollario al teorema di permanenza del segno. Esista $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq \bar{n}$, allora $\ell \geq 0$.

TEOREMI SUI LIMITI DI SUCCESSIONE

Primo teorema del confronto Siano a_n e b_n due successioni ed esistano $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, allora $l_1 \leq l_2$.

Secondo teorema del confronto Siano a_n , b_n e c_n tre successioni ed esistano $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, allora esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$.

Teorema dell'algebra dei limiti

Lemma di commutazione

(È il teorema di sostituzione applicato alle successioni)

Sia $[a, b]$ un intervallo in \mathbb{R} ,

sia $x_n : \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$ una successione di valori in $[a, b]$,

sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ ed f è continua in x^*

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x^*)$$

Osservazione

Quando f è continua, f ed il limite commutano

Esempio $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(1/n^2) = \sin\left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2\right) = \sin(0) = 0$

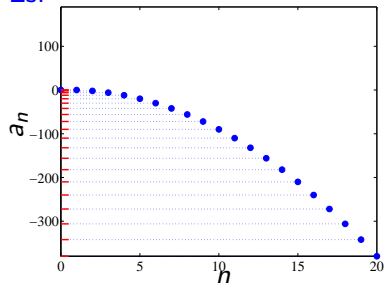
Alcune successioni fondamentali

- $a_n = c$ con c numero reale costante. Converge a $\ell = c$
- $a_n = n$ diverge positivamente
- $a_n = n^2$ diverge positivamente
- $a_n = n^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ diverge positivamente
- $a_n = n^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^-$ converge a $\ell = 0$
- $a_n = n!$ diverge positivamente
- $a_n = n^n$ diverge positivamente
- $a_n = (-n)^n = (-1)^n \cdot n^n$ è indeterminata
- successioni costruite a partire dalle funzioni elementari:
 $\cos(n)$, $\sin(n)$, $\tan(n)$ sono indeterminate,
 $\log(n)$, e^n , \sqrt{n} divergono positivamente.

Successione superiormente limitata

Def. Una successione a_n si dice **superiormente limitata** se l'insieme immagine $\text{im } a_n = \{a_n, n \geq n_0\}$ è un sottoinsieme di \mathbb{R} **superiormente limitato**.

Es.



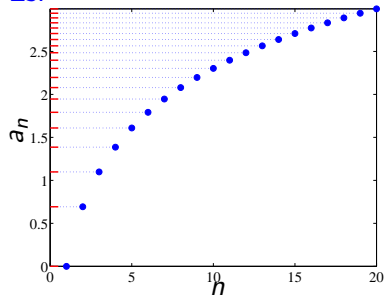
$$A = \text{im } a_n = \{n - n^2, n \in \mathbb{N}\}$$

$$A = \{0, 0, -2, -6, -12, \dots\}$$

$$\sup(A) = \max(A) = 0.$$

Successione inferiormente limitata

Def. Una successione a_n si dice **inferiormente limitata** se l'insieme immagine $\text{im } a_n = \{a_n, n \geq n_0\}$ è un sottoinsieme di \mathbb{R} inferiormente limitato.
Es.



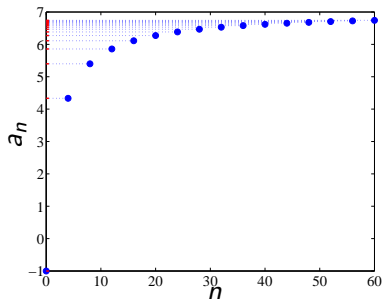
$$A = \text{im } a_n = \{\log(n), n \in \mathbb{N}_+\}$$

$$A = \{0, 0.693\dots, 1.098\dots, \dots\}$$

$$\inf(A) = \min(A) = 0$$

Una successione si dice **limitata** se è sia superiormente che inferiormente limitata.

Esempio. Sia $a_n = \frac{7n-2}{n+2}$.



$$A = \text{im } a_n = \left\{ \frac{7n-2}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf(A) = \min(A) = -1,$$
$$\sup A = 7.$$

La successione è superiormente ed inferiormente limitata, quindi è limitata.

Limitatezza e convergenza

Teorema. Sia a_n una successione convergente. Allora a_n è limitata.

Dim. Sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ e sia $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Per la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_0, n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

se prendo $\varepsilon = 1$, esiste n_ε tale che $\forall n > n_\varepsilon$ si ha $|a_n - \ell| < 1$.

Per la disuguaglianza triangolare si ha:

$$|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|, \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

Si pone $M = \max\{|a_{n_0}|, |a_{n_0+1}|, \dots, |a_{n_\varepsilon}|, 1 + |\ell|\}$.

Per come ho definito M si ha $|a_n| \leq M$ per ogni valore di n , sia $n \leq n_\varepsilon$, sia $n > n_\varepsilon$. Quindi la successione è limitata. \square

N.B. Il viceversa del precedente teorema non è vero, ovvero una successione limitata non è detto che sia anche convergente.

Esempio. $a_n = (-1)^n$ è limitata ma non è convergente.

Esempio. $a_n = \sin(n)$, $b_n = \cos(n)$ sono limitate ma non convergenti.

Esempio. $a_n = \arctan(n)$ è limitata e convergente.

Corollario al secondo teorema del confronto

Sia a_n una successione limitata e b_n una successione infinitesima.
Allora la successione prodotto $c_n = a_n b_n$ è infinitesima.

Es. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ perchè $a_n = \sin(n)$ è limitata, $b_n = \frac{1}{n}$ è infinitesima.

Successioni monotone

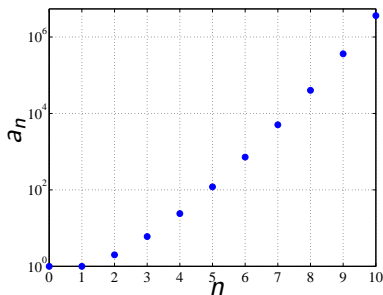
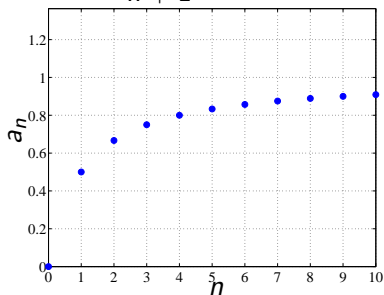
Def. Una successione si dice **monotona crescente** se

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq n_0,$$

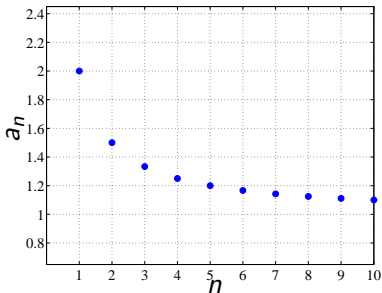
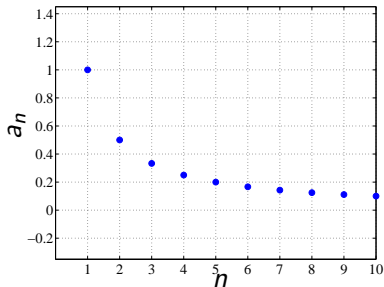
si dice **monotona decrescente** se

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq n_0,$$

Es. $a_n = \frac{n}{n+1}$, $a_n = n!$ sono monotone crescenti per $n \geq n_0 = 0$.



Es. $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{n+1}{n}$ sono monotone decrescenti per $n \geq n_0 = 1$.



$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

Es. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $a_n = \cos(n)$ non sono monotone crescenti, né monotone decrescenti.

Limite di successioni monotone

Teorema Sia $\{a_n\}$ una successione **monotona**, allora essa è convergente o divergente (non può essere indeterminata).

In particolare:

se $\{a_n\}$ è monotona **crescente**, $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \geq n_0} a_n$

mentre:

se $\{a_n\}$ è monotona **decrescente**, $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \geq n_0} a_n$

Osservazione:

se $\{a_n\}$ è monotona crescente $\Rightarrow \begin{cases} \inf_{n \geq n_0} a_n = \min_{n \geq n_0} a_n = a_{n_0} \\ \sup_{n \geq n_0} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \end{cases}$

Es. $a_n = n^2 + 3 = \{3, 4, 7, 12, \dots\}$.

$$\inf_{n \geq 0} a_n = \min_{n \geq 0} a_n = a_0 = 3$$

$$\sup_{n \geq 0} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Se $\{a_n\}$ è monotona **decrescente** \Rightarrow
$$\begin{cases} \inf_{n \geq n_0} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \sup_{n \geq n_0} a_n = \max_{n \geq n_0} a_n = a_{n_0} \end{cases}$$

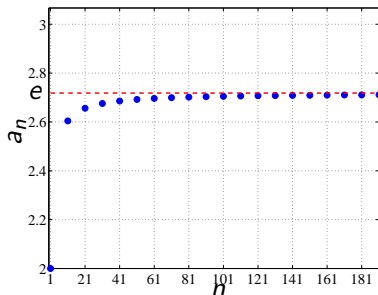
Es. $a_n = \frac{2}{n} = \left\{ 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \dots \right\}$.

$$\inf_{n \geq 1} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \qquad \sup_{n \geq 1} a_n = \max_{n \geq 1} a_n = a_1 = 2.$$

Il numero e di Nepero.

$$\text{Sia } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

n	a_n
1	2.00000000
50	2.69158803...
100	2.70481383...
150	2.70927591...
200	2.71151712...
250	2.71286512...
300	2.71376516...
350	2.71440871...
400	2.71489174...
450	2.71526765...
500	2.71556852...
550	2.71581477...
10000	2.71814592...



E' possibile dimostrare che a_n è strettamente crescente e che è superiormente limitata (dimostrazione lunga e con molti conti). Con queste ipotesi, il teorema precedente assicura che la successione a_n ha limite (ovvero a_n è convergente) e si definisce

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Principio di induzione

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato definito per ogni numero naturale $n \geq n_0$. Supponiamo che siano verificate le seguenti due condizioni:

1.- $\mathcal{P}(n_0)$ è vera

2.- $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera ($\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$).

Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$.

(si veda la voce “Principio di induzione” alla pagina web http://calvino.polito.it/canuto-tabacco/analisi_1/top-terza.htm gestita dagli autori del libro di testo Canuto-Tabacco.)

La disuguaglianza di Bernoulli

$$(1 + r)^n \geq 1 + rn \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } r \in \mathbb{R}^+.$$

Dimostrazione. Applichiamo il principio di induzione con

$$\mathcal{P}(n) = (1 + r)^n \geq 1 + rn.$$

Verifichiamo le ipotesi del Principio di induzione con $n_0 = 0$.

1.- $\mathcal{P}(0) = (1 + r)^0 = 1 \geq 1 + r \cdot 0 = 1$ (vera)

2.- Supponiamo $\mathcal{P}(n) = (1 + r)^n \geq 1 + rn$ vera, vediamo se è vera anche $\mathcal{P}(n + 1) = (1 + r)^{n+1} \geq 1 + r(n + 1)$.

Abbiamo: $(1 + r)^{n+1} = (1 + r) \cdot (1 + r)^n \geq$ (poiché $\mathcal{P}(n)$ è vera)

$$(1 + r)(1 + rn) = 1 + r(n + 1) + r^2n \geq 1 + r(n + 1) \text{ ovvero,}$$

$$\mathcal{P}(n + 1) = (1 + r)^{n+1} \geq 1 + r(n + 1).$$

Siccome entrambe le ipotesi del Principio di induzione sono vere, allora segue immediatamente la tesi, cioè:

$$(1 + r)^n \geq 1 + rn, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La successione geometrica

Sia $q \in \mathbb{R}$. La successione geometrica è $a_n = q^n$.

Teorema

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1 \text{ } (-1 < q < 1) \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Esempio

n	2^n	$(0.5)^n$	$(-2)^n$	$(-0.5)^n$
0	1	1	+1	+1
1	2	0.5	-2	-0.5
2	4	0.25	+4	+0.25
3	8	0.125	-8	-0.125
4	16	0.0625	+16	+0.0625
...				
10	1024	0.00097656	+1024	+0.00097656
11	2048	0.00048828	-2048	-0.00048828

Dimostrazione di $\lim q^n$

Caso 1 $q > 1$. Posso scrivere $q = 1 + r$ con $r > 0$. Per la disuguaglianza di Bernoulli si ha: $q^n = (1 + r)^n \geq 1 + rn$. Pongo: $b_n = q^n$ e $a_n = 1 + rn$ e osservo (grazie all'algebra dei limiti) che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Applico il primo teorema del confronto e quindi anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty.$$

Caso 2 $0 < q < 1$. Posso scrivere $q = 1/p$ con $p > 1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \text{(per le propr. delle potenze)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p^n} = \text{(per l'algebra dei limiti)} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} p^n} = \text{(per il Caso 1 di questo teorema)} \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

Caso 3 $-1 < q < 0$. Posso scrivere $q = -|q|$, ora $0 < |q| < 1$. Quindi, dal Caso 2 di questo teorema $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$, ovvero $|q|^n$ è infinitesima. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-|q|)^n = \quad (\text{per le propr. delle potenze}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n |q|^n = (\text{succ. limitata per infinitesima}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Caso 4 $q < -1$. Posso scrivere $q = -|q|$, ora $|q| > 1$. Quindi, dal Caso 1 di questo teorema $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = +\infty$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-|q|)^n = \quad (\text{per le propr. delle potenze}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n |q|^n = (\text{succ. limitata per divergente}) \\ &= \nexists \end{aligned}$$

Caso 5 $q = 1$, $q = 0$ e $q = -1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \nexists.$$



Ordini di infinito

Siano a_n e b_n due successioni divergenti. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \infty & a_n \text{ ha ordine di infinito } > \text{ di quello di } b_n \\ \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 & a_n \text{ e } b_n \text{ hanno lo stesso ordine di infinito} \\ 0 & a_n \text{ ha ordine di infinito } < \text{ di quello di } b_n \end{cases}$$

Esempi notevoli. - n^n ha ordine di infinito maggiore di $n!$, infatti si dimostra che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$,

- n^α ha ordine di infinito maggiore di n^β per ogni $\alpha > \beta > 0$, si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-\beta} = +\infty$

- n ha ordine di infinito maggiore di $\log(n)$, si dimostra che che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log(n)} = +\infty, \text{ o equivalentemente } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n} = 0$$

- piÙ in generale: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n))^\beta}{n^\alpha} = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

Dal teorema di sostituzione

Vale la seguente identità:

$$(a_n)^{b_n} = e^{\log(a_n)^{b_n}} = e^{b_n \cdot \log a_n}$$

Notazione: $\exp(n) = e^n$

$$n^{1/n^2} = \exp\left(\log n^{1/n^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{n^2} \log n\right) = \exp\left(\frac{\log n}{n^2}\right)$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\log n}{n^2}\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^2}\right) = e^0 = 1$$

Esercizi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/n^2} - 1}{2n^2 \cdot \log(n+7)} =$$

Ordini di infinitesimo

Siano a_n e b_n due successioni infinitesime. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & a_n \text{ ha ordine di infinitesimo } > \text{ di quello di } b_n \\ \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 & a_n \text{ e } b_n \text{ hanno lo stesso ordine di infinitesimo} \\ \infty & a_n \text{ ha ordine di infinitesimo } < \text{ di quello di } b_n \end{cases}$$

Esempi notevoli.

- $a_n = (1/2)^n$ ha ordine di infinitesimo maggiore di $b_n = 1/n$,

infatti si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/2)^n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$

- $a_n = 1/n$ ha ordine di infinitesimo minore di $b_n = 1/n^2$, infatti si

ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$,

- $a_n = \sin(1/n)$ ha ordine di infinitesimo uguale a $b_n = 1/n$, infatti

si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) = 1$



Sottosuccessioni

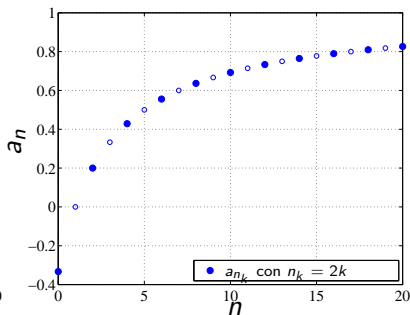
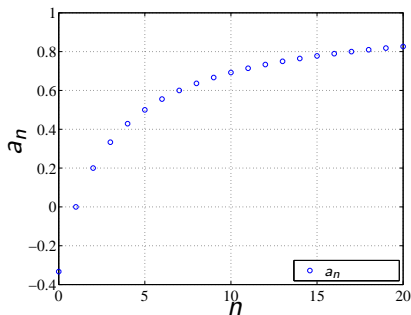
Def. Data una successione $\{a_n\}$, chiamiamo **sottosuccessione** di $\{a_n\}$ ogni successione estratta da questa, ossia ogni successione del tipo $\{a_{n_k}\}$ con $k = 0, \dots, \infty$, dove $\{n_k\}$ è una successione monotona strettamente crescente di valori in \mathbb{N} ($n_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tale che $n_k : k \mapsto n_k$).

Esempio 1. $a_n = \frac{n-1}{n+3}$, con $n \geq 0$. $n_k = 2k$, con $k \geq 0$ (n_k è la successione dei soli numeri pari).

Ottingo la sottosuccessione:

$$a_{n_k} = \frac{n_k - 1}{n_k + 3} \text{ con } n_k = 2k \text{ e } k \geq 0.$$

Esempio 1. $a_n = \frac{n-1}{n+3}$ e $a_{n_k} = \frac{n_k-1}{n_k+3}$ con $n_k = 2k$



$$\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

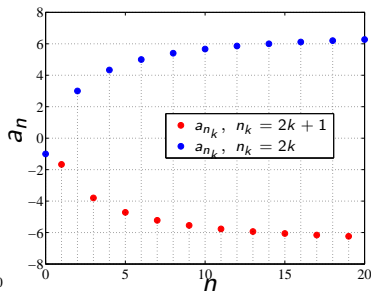
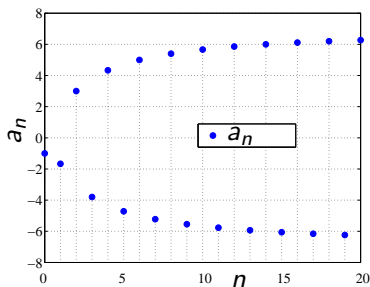
$$\{a_{n_k}\} = \{a_0, a_2, a_4, a_6, \dots\}$$

Sottosuccessioni

Esempio 2. $a_n = (-1)^n \frac{7n-2}{n+2}$, con $n \geq 0$.

$$a_{n_k} = -\frac{7n_k-2}{n_k+2}, \quad \text{per } n_k = 2k+1$$

$$a_{n_k} = \frac{7n_k-2}{n_k+2}, \quad \text{per } n_k = 2k$$



Ho estratto da a_n due sottosuccessioni.

Osservazione. Da una successione a_n posso estrarre infinite sottosuccessioni.

Teorema. Se una successione $\{a_n\}$ è convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, allora ogni sottosuccessione estratta da a_n converge ad ℓ , ovvero

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell, \quad \text{per ogni } n_k.$$

Es. Si veda l'Esempio 1.

Teorema. Se da una successione a_n estraggo due sottosuccessioni che convergono a due limiti diversi, allora a_n è indeterminata, ovvero

$$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

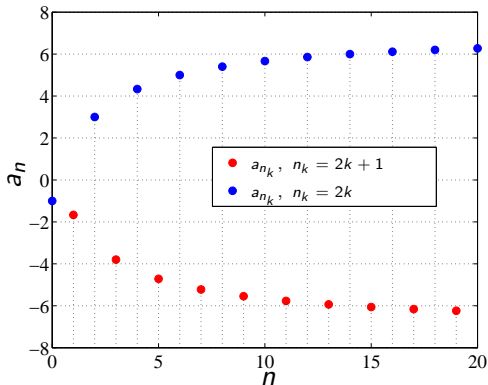
Es. Si veda l'Esempio 2. Per $n_k = 2k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = +7$. Per $n_k = 2k + 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = -7$, quindi $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Teorema (di Bolzano - Weierstrass).

Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Es. Si veda l'Esempio 2. a_n è limitata, si ha $\inf a_n = -7$ e $\sup a_n = 7$.

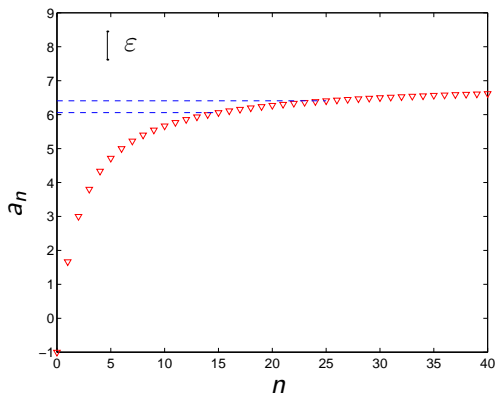
Abbiamo già trovato due sottosuccessioni di a_n che sono convergenti.



Successioni di Cauchy

Def. Una successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è **di Cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0, \quad n, m > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$



N.B. La def. di succ. di Cauchy non può essere data con la terminologia degli intorno

Il criterio di Cauchy

Teorema In \mathbb{R} ogni successione convergente è una successione di Cauchy ed ogni successione di Cauchy è convergente.

N.B. Questo teorema non vale in tutti gli insiemi numerici. Ad esempio in \mathbb{Q} non vale.

Esempio Sia $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Q}$. Inoltre si riesce a dimostrare che a_n è una successione di Cauchy.

Abbiamo visto che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \in \mathbb{R}$, ma $e \notin \mathbb{Q}$, cioè a_n è una successione di valori in \mathbb{Q} , è di Cauchy in \mathbb{Q} , ma non è convergente in \mathbb{Q} .

a_n è una successione di valori in \mathbb{R} , è di Cauchy in \mathbb{R} ed è convergente in \mathbb{R} .

Riferimenti Bibliografici: Canuto-Tabacco, pagg. 68-74, 142-143;

Esercizi: Studiare il comportamento delle seguenti successioni (monotona crescente, decrescente, oscillante), calcolarne inf, sup, max e min e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$:

$$a_n = \frac{3n - 4}{2n + 1}, \quad a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 3n + 2}$$

$$a_n = \frac{n^3}{\sqrt{n}}, \quad a_n = \arctan(n)$$

$$a_n = \log(n), \quad a_n = \sin n$$

$$a_n = \frac{n + 7}{8n + 2}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + n}{n + \sin(n!)} \cdot \frac{n^n \cdot n!}{(n + 2)^n \cdot (n + 1)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1} + 7n!}{(n + 2)^n \cdot (7n + \sin(n))} =$$