OSSERVAZIONE

Dire che f è limitata nell'intorno $I(x_0)$ NON vuole dire che esiste $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$

Esempio. Sia $f(x)$ la funzione di Dirichlet così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

L'insieme immagine di f è $\mathrm{im} f = \{0, 1\}$ è un insieme limitato (ammette sia maggioranti che minoranti), quindi f è limitata su tutto il suo dominio, cioè su $\mathbb{R}$.
Inoltre abbiamo $-1 \leq 0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi possiamo dire che $|f(x)| \leq C \ \forall x \in \mathbb{R}$ con $C = 1$ (vedi def. a pag. 13).
Tuttavia $\nexists \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$, qualunque sia $x_0 \in \mathbb{R}$

Infatti f continua a saltare tra i valori 0 e 1 (ricordiamo che tra due numeri razionali ce n'è sempre almeno uno irrazionale e tra due nuemeri irrazionali ce n'è sempre almeno uno razionale) e non si riesce a verificare la definizione di limite (si vedano pag. 15-16 di cap3a.pdf).