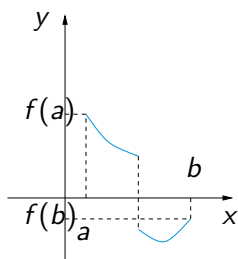
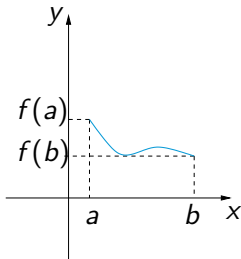
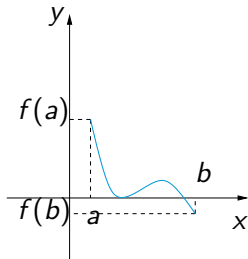


Proprietà delle funzioni continue

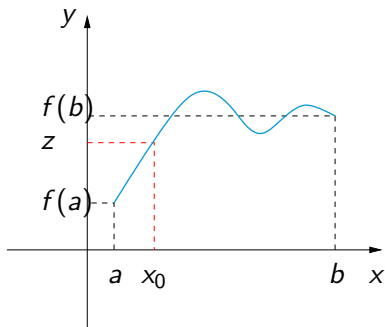
Def. Data una funzione reale f , si chiama **zero** (o radice) di f ogni punto $x_0 \in \text{dom}f$ in cui f si annulla.

Teorema (degli zeri di una funzione continua).

Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste almeno uno zero di f nell'intervallo aperto (a, b) .

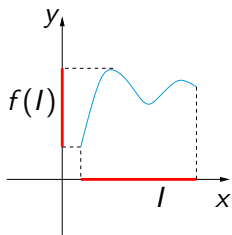


Teorema (dei valori intermedi) Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

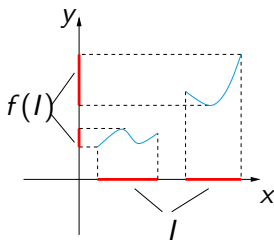


L'immagine di un insieme I tramite f è: $f(I) = \{y = f(x) : x \in I\}$

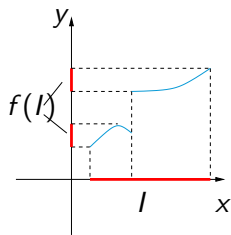
Corollario. Sia f una funzione continua su un intervallo I . Allora l'immagine $f(I)$ dell'intervallo I tramite f è ancora un intervallo.



I intervallo e f cont.



I non intervallo e f cont.



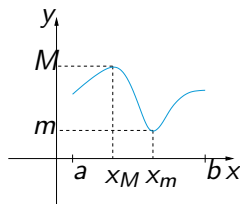
I interv. e f disc. su I .

Massimo e minimo di una funzione

Def. Si chiamano **massimo** e **minimo** di una funzione f su un intervallo $[a, b]$ i numeri reali

$$M = \max_{x \in [a, b]} f = \max\{f(x) : a \leq x \leq b\} \text{ e}$$

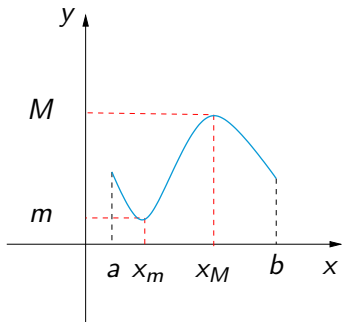
$$m = \min_{x \in [a, b]} f = \min\{f(x) : a \leq x \leq b\}$$



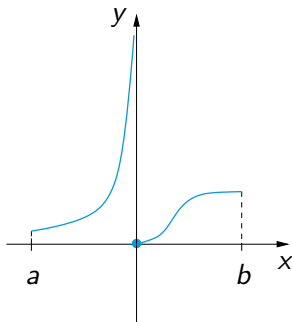
x_M e x_m sono detti rispettivamente **punto di massimo** e **punto di minimo**.

Teorema (di Weierstrass).

Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f è limitata ed ivi assume valori massimo e minimo.

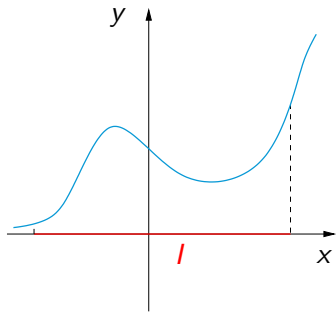


f continua: $\exists m, M$

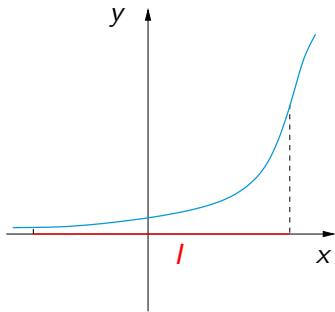


f discontinua: $\exists m, \nexists M$

Teorema. Sia f una funzione continua su un intervallo I . Allora f è iniettiva se e solo se è strettamente monotona su I .



f continua sull'intervallo
 I : NON monotona e
NON iniettiva su I .



f continua sull'intervallo I :
iniettiva e monotona su I

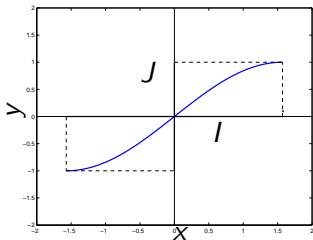
L'equivalenza cade se f non è continua o se I non è un intervallo.

Teorema. Sia f una funzione continua e invertibile su un intervallo. Allora la funzione inversa f^{-1} è continua sull'intervallo $J = f(I)$.

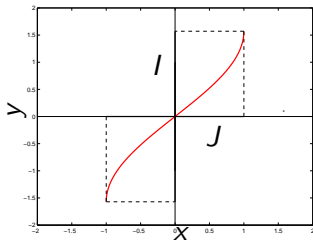
Es. $f(x) = \sin(x)$ con $I = [-\pi/2, \pi/2]$.

f è continua strettamente monotona sull'intervallo I e $J = f(I) = \{y = \sin(x), x \in [-\pi/2, \pi/2]\} = [-1, 1]$ è un intervallo.

Allora $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ è continua su J .



$$y = f(x) = \sin(x)$$



$$y = f(x) = \arcsin(x)$$

N.B. $\sin(x)$ non è invertibile sul suo dominio (perchè non è strettamente monotona su tutto \mathbb{R}).

Riferimenti bibliografici: Canuto-Tabacco: pagg. 78-83, 86-87.
pagg. 105-118.

Esercizi Canuto-Tabacco: es. n.3 a pag. 89. Es n. 4,5,6 a pag.
119-120.