

# Infiniti e infinitesimi

Sia  $f$  una funzione definita in un intorno del punto  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , tranne eventualmente in  $x_0$ .

Ricordiamo che una funzione  $f$  si dice **infinitesima** per  $x \rightarrow x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$$

mentre diciamo che  $f$  è **infinita** per  $x \rightarrow x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Come abbiamo fatto per le successioni si possono confrontare gli ordini di infinito ed infinitesimo.

## Confronti di infiniti

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni infinite per  $x \rightarrow x_0$ , con  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ .

$f(x)$  ha **ordine di infinito**

**superiore** rispetto a  $g(x)$

per  $x \rightarrow x_0$

$$\text{sse } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$f(x)$  ha **ordine di infinito**

**inferiore** rispetto a  $g(x)$

per  $x \rightarrow x_0$

$$\text{sse } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$f(x)$  e  $g(x)$  hanno lo **stesso**

**ordine di infinito**

per  $x \rightarrow x_0$

$$\text{sse } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

se  $l = 1$  scriviamo

$f \simeq g$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## Esempi

**Es 1.**  $f(x) = e^{2x} - e^x$  ha ordine di infinito superiore rispetto a  $g(x) = e^x$  per  $x \rightarrow +\infty$ , abbiamo infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \frac{e^x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$$

**Es 2.**  $f(x) = x^2$  ha ordine di infinito inferiore rispetto a  $g(x) = 2^x$  per  $x \rightarrow +\infty$ , abbiamo infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x} = 0$$

**Es 3.**  $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$  ha lo stesso ordine di infinito di  $g(x) = x^4 - 2x^2$  per  $x \rightarrow +\infty$ , abbiamo infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2} = 3$$

# Confronti di infinitesimi

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni infinitesime per  $x \rightarrow x_0$ , con  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ .

$f(x)$  ha **ordine di infinitesimo**

**superiore** rispetto a  $g(x)$

per  $x \rightarrow x_0$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$f(x)$  ha **ordine di infinitesimo**

**inferiore** rispetto a  $g(x)$

per  $x \rightarrow x_0$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$f(x)$  e  $g(x)$  hanno lo **stesso**

**ordine di infinitesimo**

per  $x \rightarrow x_0$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

## Esempi

**Es 1.**  $f(x) = (\sin(x))^2$  ha ordine di infinitesimo superiore rispetto a  $g(x) = x$  per  $x \rightarrow 0$ , abbiamo infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(\sin(x))^2}{x^2} \cdot x \right] = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

**Es 2.**  $f(x) = x^3 - 2x^2$  ha ordine di infinitesimo inferiore rispetto a  $g(x) = x^3$  per  $x \rightarrow 0$ , abbiamo infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x - 2)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2}{x} = \infty$$

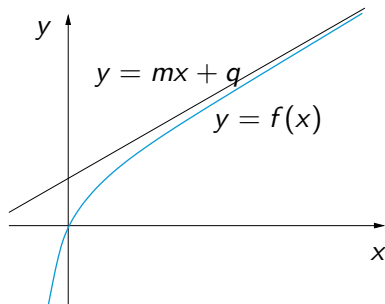
**Es 3.**  $f(x) = 1 - \cos(x)$  ha lo stesso ordine di infinitesimo di  $g(x) = x^2$  per  $x \rightarrow 0$ , abbiamo infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

# Asintoti

Sia  $f$  definita in un intorno di  $+\infty$ .

Spesso è utile sapere se, per  $x \rightarrow +\infty$ , la  $f$  si comporta come una retta di equazione  $y = mx + q$ :



In caso affermativo, interessa anche calcolare coeff. angolare ( $m$ ) e quota all'origine ( $q$ ) della retta, che viene detta **asintoto**.

La retta di equazione  $y = mx + q$  è un **asintoto destro** della funzione  $f$  se esistono  $m$  e  $q \in \mathbb{R}$  (ovvero valori reali **finiti**):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

ed è un **asintoto sinistro** della funzione  $f$  se esistono  $m$  e  $q \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Se una retta è un asintoto sia destro che sinistro per  $f$ , allora si dice **asintoto completo** per  $f$ .

Se  $m \neq 0$  l'asintoto è detto **obliquo**,  
se  $m = 0$  l'asintoto è detto **orizzontale**.

# Asintoti verticali

Gli asintoti verticali sono delle rette verticali e quindi non rientrano nella classificazione delle rette del tipo  $y = mx + q$  con  $m, q \in \mathbb{R}$ .

Per gli asintoti verticali abbiamo la seguente definizione:

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  la retta  $x = x_0$  è detta **asintoto verticale destro** per  $f$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  la retta  $x = x_0$  è detta **asintoto verticale sinistro** per  $f$ .

Gli asintoti verticali vanno cercati agli estremi (finiti) del dominio della funzione, oppure nei punti in cui una funzione definita a tratti cambia definizione.

## Asintoti obliq o orizz: come calcolare $m$ e $q$

Consideriamo il caso di ricerca di un asintoto destro e partiamo dalla definizione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + q)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - m. \end{aligned}$$

Quindi 
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Dalla definizione di asintoto: 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} q = q$$

Es.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

Cerco asintoto destro:  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1,$

$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$

Ho un asintoto obliquo destro  $y = x$ .

Cerco asintoto sinistro:

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + 1/x^2}}{x} = -1,$

$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0.$

Ho un asintoto obliquo sinistro  $y = -x$ .

**OSSERVAZIONE:** Se  $m = \infty$  e/o  $q = \infty$  non si ha asintoto.

Es.  $f(x) = \log(x)$ .

Qui si può cercare solo asintoto destro perchè  $\text{dom}f = (0, +\infty)$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty.$$

Quindi  $f(x) = \log(x)$  non ammette asintoti orizzontali o obliqui.

Si ha un asintoto verticale **destro**:  $x = 0$ .

Destro perchè  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$ .

# Studio di funzione

Il nostro obiettivo è **rappresentare graficamente una funzione**  
 $f : \text{dom}f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

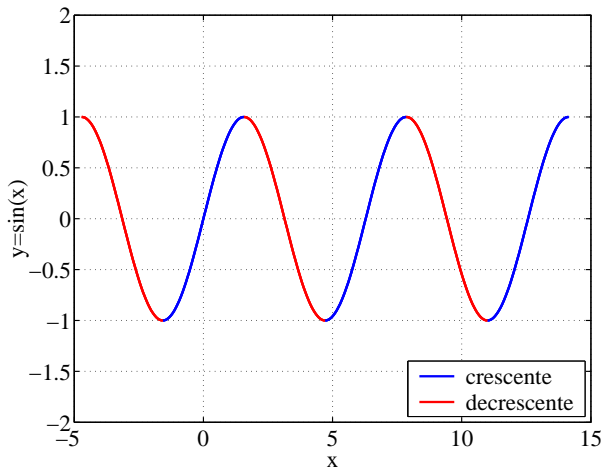
Con le conoscenze attuali possiamo studiare

- il dominio ed eventuali simmetrie
- la classificazione dei punti di discontinuità
- il comportamento limite agli estremi del dominio (limiti e asintoti)
- eventuali intersezioni con gli assi cartesiani

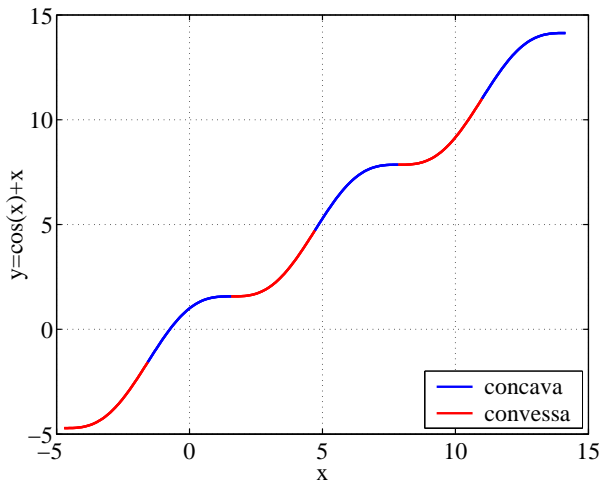
**Cosa manca?**

Tutta la parte di rappresentazione grafica "al finito", ovvero:

Bisogna saper dire per quali valori di  $x \in \text{dom}f$  la funzione è **crescente** e per quali valori di  $x \in \text{dom}f$  la funzione è **decescente**:



Bisogna saper dire per quali valori di  $x \in \text{dom}f$  la funzione è **convessa** e per quali valori di  $x \in \text{dom}f$  la funzione è **concava**:



Crescenza/decrecenza e convessità/concavità sono informazioni che si estraggono dalle **DERIVATE** della funzione.



**Dobbiamo introdurre il concetto di derivata in un punto e di funzione derivata**

**Riferimenti bibliografici:** Canuto-Tabacco: Cap. 5.1, 5.2, 5.3

**Esercizi:** Considerare tutte le funzioni proposte nei temi d'esame degli anni precedenti e studiarne dominio, continuità, simmetrie, comportamento agli estremi del dominio (limiti agli estremi del dominio).