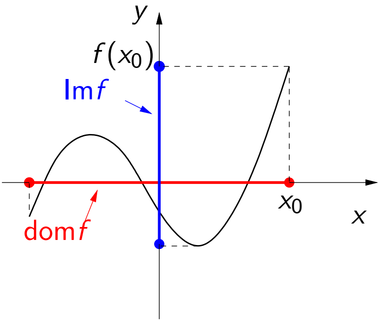
Punti di estremo: punto di massimo assoluto

Def. Sia $x_0 \in \mathrm{dom} f$. Si dice che x_0 è un punto di massimo assoluto per f se

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in \mathrm{dom} f$$

ovvero

$f(x_0)$ è il massimo dell'insieme $\mathrm{Im} f$.



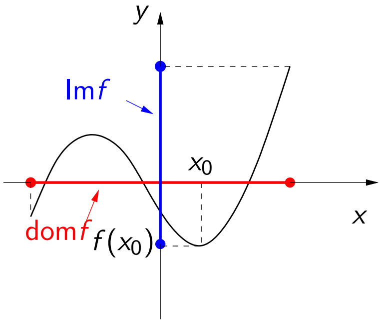
Punto di minimo assoluto

Sia $x_0 \in \mathrm{dom} f$. Si dice che x_0 è un punto di minimo assoluto per f se

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in \mathrm{dom} f$$

ovvero

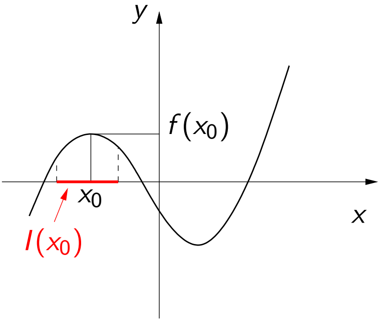
$f(x_0)$ è il minimo dell'insieme $\mathrm{Im} f$.



Punto di massimo relativo

Def. Sia $x_0 \in \text{dom} f$. Si dice che x_0 è un punto di massimo relativo per f se esiste un intorno $I(x_0)$ del punto x_0 tale che

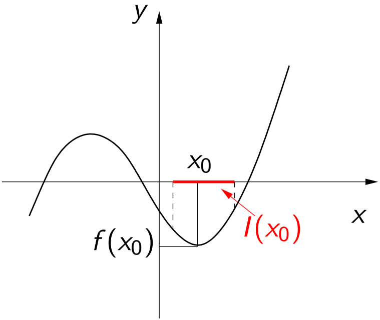
$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in I(x_0) \cap \text{dom} f.$$



Punto di minimo relativo

Def. Sia $x_0 \in \mathrm{dom} f$. Si dice che x_0 è un punto di minimo relativo per f se esiste un intorno $I(x_0)$ del punto x_0 tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in I(x_0) \cap \mathrm{dom} f.$$



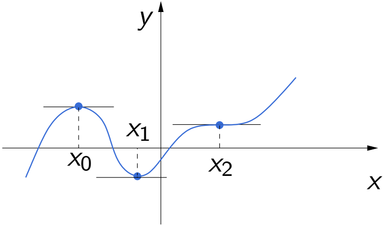
Osservazioni

I punti di massimo relativo e minimo relativo sono detti punti di estremo relativo, mentre i punti di massimo e minimo assoluto sono detti punti di estremo assoluto.

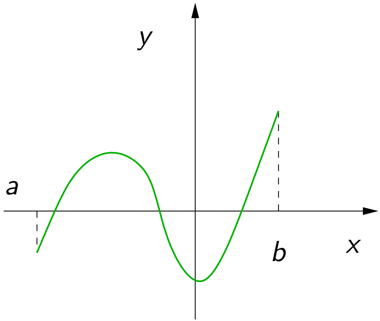
Un punto di estremo assoluto è anche punto di estremo relativo, il viceversa non è sempre vero.

Punti stazionari (o critici)

Def. Un punto $x_0 \in \mathrm{dom} f$ si dice punto stazionario (o punto critico) per f, se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$ (ovvero la tangente ad f in x_0 è una retta orizzontale).



Osservazione. Se f è definita solo in un intorno sinistro di x_0 ed esiste $f'_-(x_0)$ si assume che f sia derivabile in x_0 e si definisce $f'(x_0) = f'_-(x_0)$. $(x_0 = b.)$



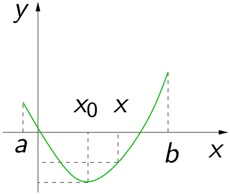
Se f è definita solo in un intorno destro di x_0 ed esiste $f'_+(x_0)$ si assume che f sia derivabile in x_0 e si definisce $f'(x_0) = f'_+(x_0)$. $(x_0 = a)$

Teorema (di Fermat). Sia f **definita in un intorno $I_r(x_0)$ del punto x_0 e derivabile in x_0.** Se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo per f allora $f'(x_0) = 0$, ovvero x_0 è un punto stazionario per f.

Dimostrazione

Sia x_0 punto di minimo relativo per f, x_0 interno a dom$f$ e $\exists f'(x_0)$ finita. Devo dimostrare che $f'(x_0) = 0$.

Se x_0 è punto di minimo relativo, si ha $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in I(x_0)$, ovvero $f(x) - f(x_0) \geq 0$.

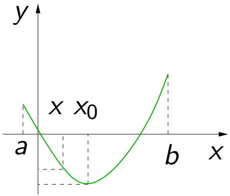


Sia $x > x_0$ (ovvero $x - x_0 > 0$), allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

e facendo tendere $x \to x_0^+$, per il corollario al teorema della permanenza del segno, si ha

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Ora prendo $x < x_0$ (ovvero $x - x_0 < 0$), allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$



e facendo tendere $x \to x_0^-$, sempre per il corollario al teorema della permanenza del segno,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Poichè f è derivabile in x_0 si deve avere

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

ovvero

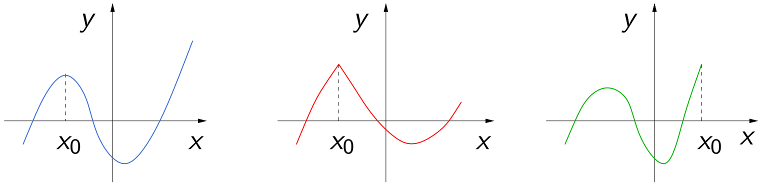
$$0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x_0) = 0.$$

Se x_0 è punto di massimo relativo la dimostrazione è analoga. □

Ricerca dei punti di estremo

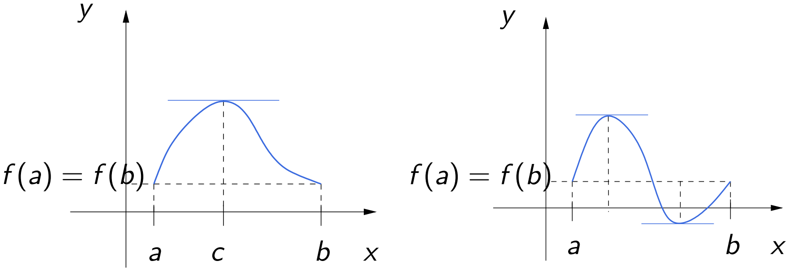
I punti di estremo di una funzione vanno ricercati tra i punti $x \in \mathrm{dom} f$:

- punti stazionari, $f'(x_0) = 0$ (per il teorema di Fermat)
- punti di non derivabilità (punti angolosi e cuspidi)
- estremi finiti (in $\mathbb{R}$) del dominio.



Teorema di Rolle

Sia f una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Se $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.



Dim.

f è continua su un intervallo chiuso e limitato, allora per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo M e minimo m (assoluti), con $x_m, x_M \in [a, b]$ (x_m e x_M punti di minimo e di massimo).

Caso a. $m = M$.

Allora f è costante su $[a, b]$ e $f'(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$.

Caso b. $m \leq f(a) = f(b) < M$.

f assume massimo in un punto interno ad $[a, b]$.

Il punto di massimo assoluto x_M è anche punto di massimo relativo, f è definita in un tutto un intorno di x_M ed f è derivabile in un intorno di x_M.

Ho le ipotesi per applicare il teorema di Fermat e concludere che x_M è un punto stazionario, ovvero $f'(x_M) = 0$.

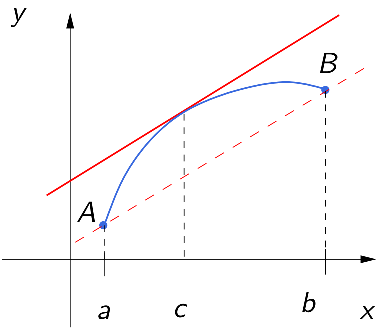
Caso c. $m < f(a) = f(b) \leq M$.

f assume minimo in un punto interno ad $[a, b]$. La dimostrazione è analoga al Caso b. $\square$

Teorema di Lagrange

Sia f una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Esiste un punto c per cui la tangente ad f in c è parallela alla retta passante per i punti $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Dim. Si consideri la funzione $h(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.
$h(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$ (perchè somma di funzioni continue in $[a, b]$), derivabile in (a, b) (perchè somma di funzioni derivabili in (a, b)), e

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 0 = f(a)$$
$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - f(b) + f(a)$$

La funzione $h(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, quindi esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$.

Ma $\quad h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad$ e dire

$h'(c) = 0$ equivale a dire $\quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. $\square$

Teorema della derivata nulla

Sia f continua e derivabile su un intervallo I. Sia $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$, allora f è costante in I.

Dimostrazione. Dimostrare che f è costante su I equivale a dimostrare che $f(x_1) = f(x_2), \ \forall x_1, \ x_2 \in I$.
Dimostriamo per assurdo: $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$.
Negare la tesi equivale a dire che $\exists x_1, \ x_2 \in I : \ f(x_1) \neq f(x_2)$.
Applichiamo il teorema di Lagrange (f soddisfa le ipotesi del thm di Lagrange sull'intervallo $[x_1, x_2] \subset I$), otteniamo che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$$

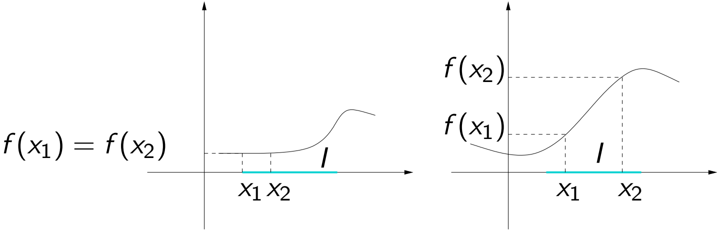
che contraddice l'ipotesi.

Ricordiamo la def. di funzione crescente:

Sia I il dominio di una funzione f reale a valori reali, oppure un intervallo contenuto nel dominio di f.

Def. La funzione f si dice **monotona crescente su I** se

$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$



Def. La funzione f si dice **monotona strettamente crescente su I** se $\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$

Risulta impossibile verificare la crescenza e decrescenza di $f(x)$ mediante la definizione: dovremmo verificare la propr. per infinite coppie di punti!

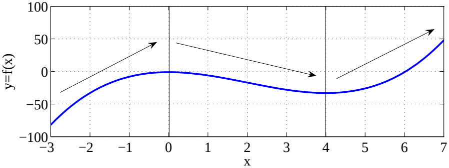
Criterio del segno della derivata prima

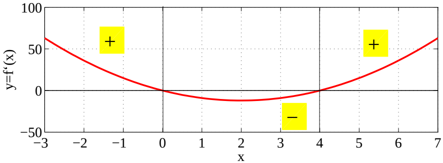
Teorema.

Sia $I \subseteq \mathrm{dom} f$ un intervallo e sia f derivabile su I. Allora

$$f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è crescente su } I \text{ e}$$
$$f'(x) > 0,\ \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f \text{ è strettamente crescente su } I.$$

(Per la dimostrazione, si vedano gli appunti o il libro a pag. 191).



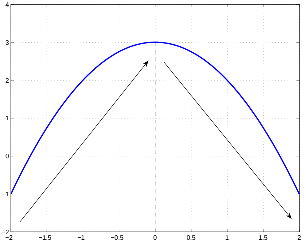


Oss. f strett. crescente $\not\Rightarrow f'(x) > 0$.

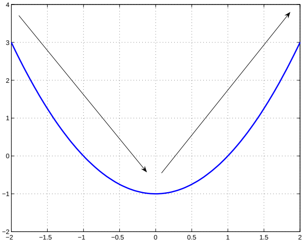
Es. $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$, ovvero f strett. crescente. non implica $f'(x) > 0$

Corollario Se x_0 è punto di max relativo per f, allora f è crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra.

Se x_0 è punto di min relativo per f, allora f è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra.



$x_0 = 0$ è p.to di max. rel.



$x_0 = 0$ è p.to di min. rel.

Teorema di de l'Hôpytal

Siano f e g due funzioni definite in un intorno di x_0, tranne al piú nel punto x_0, e tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L \qquad \text{con } L = 0 \qquad \text{o } L = \pm\infty.$$

Se f e g sono derivabili nell'intorno di x_0, tranne eventualmente in x_0, con $g' \neq 0$, e se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora esiste anche

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Es. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin(5x)}$ (OK) $\qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x + \sin(x)}{3x - \cos(x)}$ (NO)

Abbiamo visto le definizioni:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Il seguente teorema fornisce un criterio per valutare derivata destra e sinistra in maniera piú semplice:

Teorema del limite della derivata

Sia f una funzione definita e continua in $I(x_0)$ e derivabile in $I(x_0)$ tranne eventualmente in x_0. Se esiste (finito o infinito) $\ell_1 = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$, allora esiste anche la derivata destra $f'_+(x_0)$ in x_0

e si ha $f'_+(x_0) = \ell_1 = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$.

Analogamente, se esiste (finito o infinito) $\ell_2 = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$, allora esiste anche la derivata sinistra $f'_-(x_0)$ in x_0 e si ha

$$f'_-(x_0) = \ell_2 = \lim_{x\to x_0^-} f'(x).$$

Dimostrazione.

La dimostrazione del teorema segue dal teorema di de l'Hôpytal:

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

A PATTO CHE ESISTA $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$

A PATTO CHE ESISTA $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ $\square$

Derivata seconda

Def. Se f' è derivabile in x_0, si dice che f è derivabile due volte in x_0 e si pone

$$f''(x_0) := (f')'(x_0).$$

$f''(x_0)$ è detta derivata seconda di f in x_0.

La funzione che associa ad x il valore $f''(x)$, ove questo sia definito, è detta funzione derivata seconda.

Es. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 1, \qquad f'(x) = 3x^2 - 12x,$
$f''(x) = 6x - 12$

Derivate di ordine superiore

In maniera analoga a quanto fatto per la derivata seconda, si può definire la derivata terza di f in x_0, se esiste, come la derivata prima in x_0 della derivata seconda di f:

$$f'''(x_0) := (f'')'(x_0)$$

ed in generale, per $k \geq 1$, la la derivata di ordine k di f in x_0 è

$$f^{(k)}(x_0) := (f^{(k-1)})'(x_0).$$

Per definizione si pone $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$, ovvero la derivata di ordine zero di una funzione è la funzione stessa.

Es. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}x^{-2}$

$f''(x) = -\dfrac{3}{2} \cdot (-2)x^{-3} = 3x^{-3}$,

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 3 \cdot (-3)x^{-4} = -\dfrac{9}{x^4}$.

Def. Una funzione f si dice di classe $\mathcal{C}^k$ (con $k \geq 0$) su un intervallo I, se essa è derivabile k volte in I e se la funzione derivata $k-$sima di f ($f^{(k)}(x)$) è un funzione continua su I. L'insieme delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ su I è denotato con $\mathcal{C}^k(I)$.

$\mathcal{C}^\infty(I)$ è l'insieme delle funzioni che sono derivabili un numero arbitrario (∞) di volte su I.

Es. $f(x) = e^x$, $\qquad f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 1, 2, \ldots..$
Qualunque sia k, la derivata $f^{(k)}(x)$ coincide con f che è una funzione continua su $\mathbb{R}$, quindi $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Es. $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0, +\infty)$: $\qquad f \in \mathcal{C}^0(I)$: in $x = 0$ f è definita, continua, ma non derivabile.

Convessità e concavità

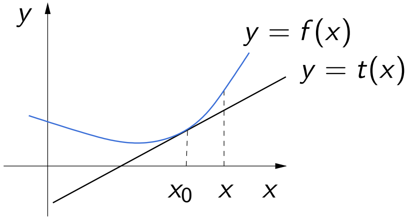
Consideriamo la funzione $f(x)$, definita in un intorno del punto x_0 e l'equazione della retta t tangente ad f nel punto $x_0 \in \mathrm{dom} f$:

$$t: \; y = t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Def. La funzione f si dice convessa (o volge la concavità verso l'alto) in x_0 se esiste un intorno $I_r(x_0)$ di x_0 tale che:

$$\forall x \in I_r(x_0) \qquad f(x) \geq t(x)$$

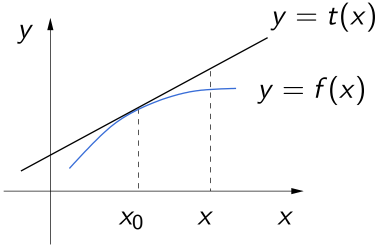
e si dice strettamente convessa in x_0 se $f(x) > t(x)$ $x \neq x_0$.



Def. La funzione f si dice concava in x_0 se esiste un intorno $I_r(x_0)$ di x_0 tale che:

$$\forall x \in I_r(x_0) \qquad f(x) \leq t(x)$$

e si dice strettamente concava in x_0 se $f(x) < t(x)$ $x \neq x_0$.



Def. Sia I un intervallo e f derivabile su I. f si dice convessa (risp. concava) su I, se è convessa (risp. concava) in ogni punto di I.

Criterio del segno della derivata seconda

Teorema. Se f è una funzione derivabile due volte su I, si ha:

$$f''(x) \geq 0, \qquad \forall x \in I \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ è convessa su } I.$$

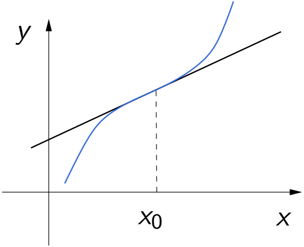
e

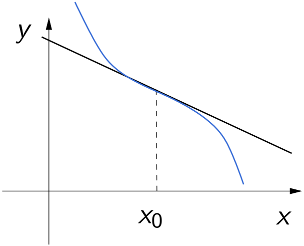
$$f''(x) > 0, \quad \forall x \in I \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente convessa su } I.$$

Osservazione. Se f è strettamente convessa su I, non è detto che $f''(x) > 0$ su I.
Es.: $f(x) = x^4$. In $x = 0$ si ha $f''(0) = 0$ ed f strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$.

Punti di flesso

Def. Sia f una funzione definita e derivabile in un intorno del punto x_0. Il punto x_0 si dice punto di flesso per f se esiste un intorno sinistro di x_0 in cui f è concava ed esiste un intorno destro di x_0 in cui f è convessa o, viceversa, se esiste un intorno sinistro di x_0 in cui f è convessa ed esiste un intorno destro di x_0 in cui f è concava.





Oss. Un punto di flesso x_0 per cui si ha $f'(x_0) = 0$ è detto punto di flesso a tangente orizzontale, mentre un punto di flesso x_0 per cui si ha $f'(x_0) \neq 0$ è detto punto di flesso a tangente obliqua.

Studio di funzione completo

Obiettivo: disegnare il grafico di una funzione $y = f(x)$.

Passi da seguire.

1. Determinare il dom$f$
2. Determinare le intersezioni di $y = f(x)$ con gli assi cartesiani.
3. Determinare possibili asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) [questo vuol dire calcolare i limiti di f agli estremi del dominio].
4. Individuare eventuali punti di discontinuità.
5. Calcolare la derivata prima e determinare il suo dominio.
6. Studiare il segno della derivata prima per individuare dove la funzione è crescente/decrescente. Determinare, se esistono, i punti di estremo della funzione ed i punti di non derivabilità.
7. Calcolare la derivata seconda di f.
8. Studiare il segno della derivata seconda per individuare dove la funzione è convessa/concava. Determinare, se esistono, i punti di flesso della funzione.

Riferimenti bibliografici: Canuto Tabacco, Sez. 6.4, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10.

Esercizi: Svolgere i vari passi dello studio di funzione per le funzioni elementari viste.

Fare lo studio delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$
3. $f(x) = x \log(x)$
4. $f(x) = e^{1/x^2}$
5. $f(x) = e^{1/x}$