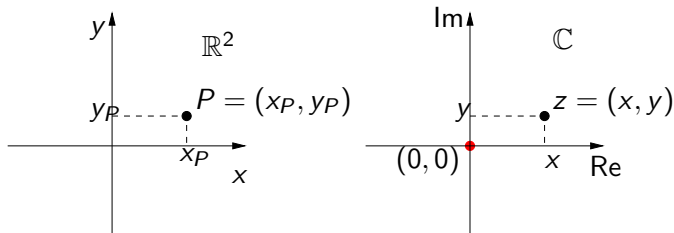


# Numeri Complessi

Un **numero complesso**  $z$  può essere definito come **una coppia ordinata**  $(x, y)$  di numeri reali  $x$  e  $y$ .

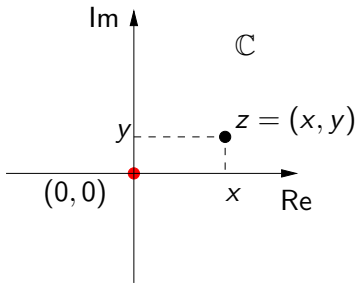
L'insieme dei numeri complessi è denotato con  $\mathbb{C}$  e può essere identificato con il piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ .



$x \in \mathbb{R}$  è detto **parte reale di  $z$**  e si scrive  $x = \text{Re}z$

$y \in \mathbb{R}$  è detto **parte immaginaria di  $z$**  e si scrive  $y = \text{Im}z$

L'insieme  $A = \{z \in \mathbb{C} : z = (x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ , detto **Asse reale** può essere identificato con la retta dei numeri reali  $\mathbb{R}$ , per cui possiamo scrivere  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .



L'insieme  $B = \{z \in \mathbb{C} : z = (0, y), y \in \mathbb{R}\}$  è detto **Asse immaginario** e i numeri di  $B$  sono detti **immaginari puri**.  
Lo **zero** di  $\mathbb{C}$  è la coppia  $(0, 0)$ .

## Operazioni in $\mathbb{C}$

Diciamo che due numeri complessi  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  sono **uguali** se hanno le stesse parti reali e immaginarie, ovvero:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

In particolare, un numero complesso  $z_1 = (x_1, y_1)$  è nullo se

$$z_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ e } y_1 = 0$$

La **somma** ed il **prodotto** sono definiti come:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 z_2 &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

In particolare:  $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ ,  $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$  e quindi

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

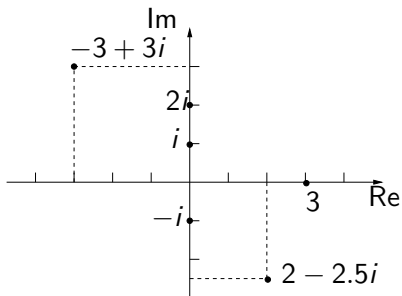
# Forma cartesiana di un numero complesso

- 1 Identifichiamo il numero complesso  $(x, 0)$  con il numero reale  $x$
- 2 Definiamo  $i = (0, 1)$ .  $i$  è detto **unità immaginaria**
- 3 Dalla relazione  $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$ , otteniamo

$$z = x + iy$$

detta **forma algebrica o cartesiana** del numero complesso  $z$ .

Osserviamo che  $i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ , ovvero  $i \in \mathbb{C}$  è la soluzione dell'equazione  $x^2 = -1$  (o  $x^2 + 1 = 0$ ), che invece non ha soluzioni in  $\mathbb{R}$ .



Tutti i numeri complessi con **parte immaginaria nulla**

( $b = \text{Im}z = 0$ ) stanno sull'asse reale **Re**.  $x = x + 0i$ .

Tutti i numeri complessi con **parte reale nulla** ( $x = \text{Re}z = 0$ )

stanno sull'asse immaginario **Im**.  $iy = 0 + iy = yi$ .

# Perché i numeri complessi?

Per poter calcolare la radice quadrata di un numero negativo

$$\sqrt{-1}, \sqrt{-18}, \dots$$

I numeri complessi NON servono per misurare distanze, tempi, pesi, forze, ....

Per poter descrivere e studiare piú facilmente la meccanica quantistica, i circuiti elettrici, i campi elettromagnetici, la trasmissione di segnali, la turbolenza di un fluido, ....

In certe situazioni lavorare con i numeri complessi è piú semplice che lavorare con i numeri reali.

# Operazioni in forma cartesiana

**Somma:**  $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

(sommo tra loro le parti reali e le parti immaginarie)

**Es.**  $(3 + i2) + (-2 + i) = (3 - 2) + i(2 + 1) = 1 + i3 = 1 + 3i$

**Sottrazione**  $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

(sottraggo tra loro le parti reali e le parti immaginarie)

**Es.**  $(3 + i2) - (-2 + i) = (3 + 2) + i(2 - 1) = 5 + i$

**Prodotto**  $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2$

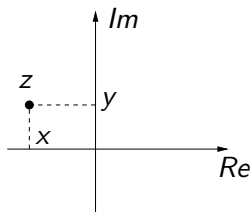
$$= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + (-1)y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

**Es.**  $(3 + i2) \cdot (-2 + i) = (-6 - 2) + i(3 - 4) = -8 - i$

# Complesso coniugato e modulo

**Def.**  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,



il numero complesso  $\bar{z} = x - iy$  è detto **complesso coniugato** di  $z$ .

**Def.**  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , il numero reale  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  è detto **modulo** di  $z$ .

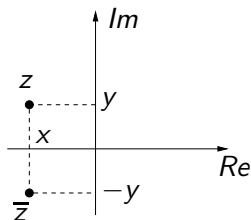
Rappresenta la distanza del numero complesso dallo zero complesso.

$z$  ed il suo coniugato  $\bar{z}$  hanno lo stesso modulo, ovvero:

$$|z| = |\bar{z}|.$$

## Complesso coniugato e modulo

**Def.**  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , il numero complesso  $\bar{z} = x - iy$  è detto **complesso coniugato** di  $z$ .



**Def.**  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , il numero reale  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  è detto **modulo** di  $z$ .

Rappresenta la distanza del numero complesso dallo zero complesso.

$z$  ed il suo coniugato  $\bar{z}$  hanno lo stesso modulo, ovvero:

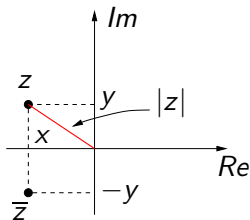
$$|z| = |\bar{z}|.$$

## Complesso coniugato e modulo

**Def.**  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , il numero complesso  $\bar{z} = x - iy$  è detto **complesso coniugato** di  $z$ .

**Def.**  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , il numero reale  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  è detto **modulo** di  $z$ .

Rappresenta la distanza del numero complesso dallo zero complesso.



$z$  ed il suo coniugato  $\bar{z}$  hanno lo stesso modulo, ovvero:

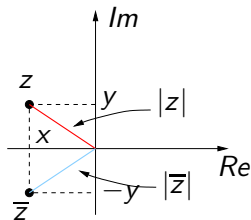
$$|z| = |\bar{z}|.$$

## Complesso coniugato e modulo

**Def.**  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , il numero complesso  $\bar{z} = x - iy$  è detto **complesso coniugato** di  $z$ .

**Def.**  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , il numero reale  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  è detto **modulo** di  $z$ .

Rappresenta la distanza del numero complesso dallo zero complesso.

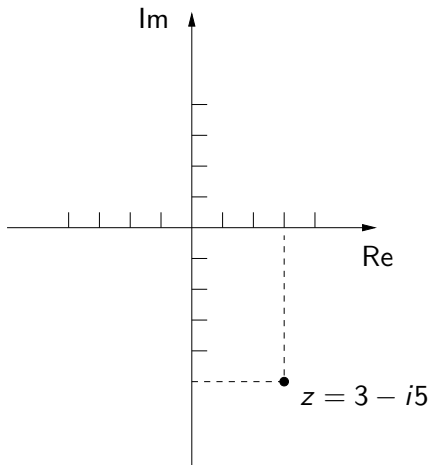


$z$  ed il suo coniugato  $\bar{z}$  hanno lo stesso modulo, ovvero:

$$|z| = |\bar{z}|.$$

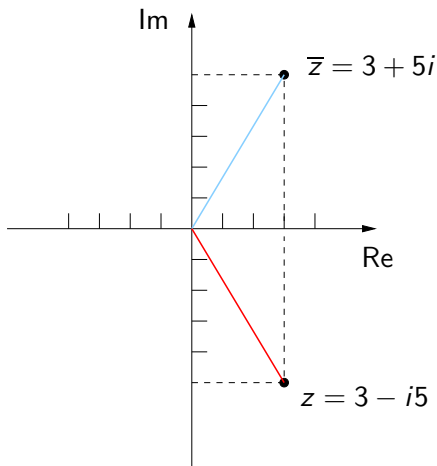
## Esempi:

1)  $z = 3 - i5$ , allora  $\bar{z} = 3 + i5$ , e  $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$



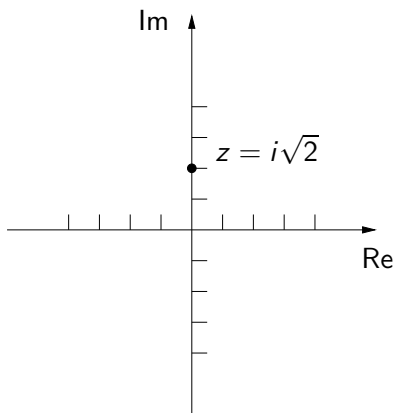
## Esempi:

1)  $z = 3 - i5$ , allora  $\bar{z} = 3 + i5$ , e  $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$



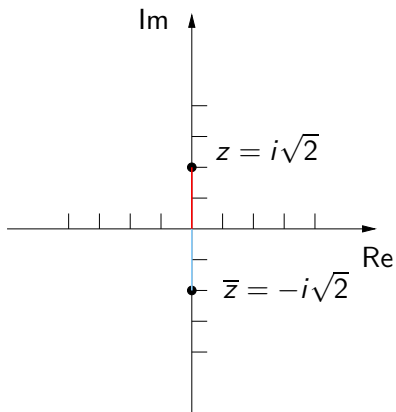
## $z$ immaginario puro

2)  $z = i\sqrt{2}$ , allora  $\bar{z} = -i\sqrt{2}$ , e  $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{2}$



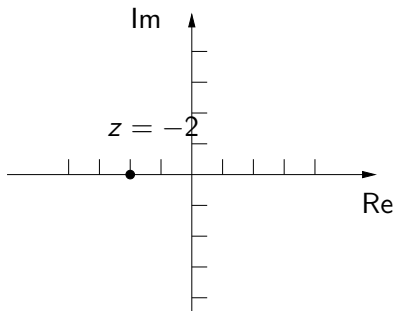
## $z$ immaginario puro

2)  $z = i\sqrt{2}$ , allora  $\bar{z} = -i\sqrt{2}$ , e  $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{2}$



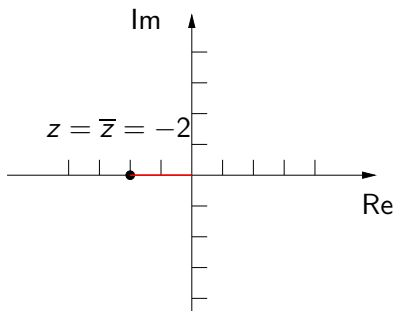
## $z$ reale

3)  $z = -2$ , allora  $\bar{z} = -2$ , e  $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{(-2)^2} = 2$



## $z$ reale

3)  $z = -2$ , allora  $\bar{z} = -2$ , e  $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{(-2)^2} = 2$



# Inverso di un numero complesso

La **divisione** tra due numeri è il prodotto del primo per l'inverso del secondo.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Per fare la divisione tra due numeri complessi devo saper costruire l'inverso  $\frac{1}{z}$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0 + i0$ .

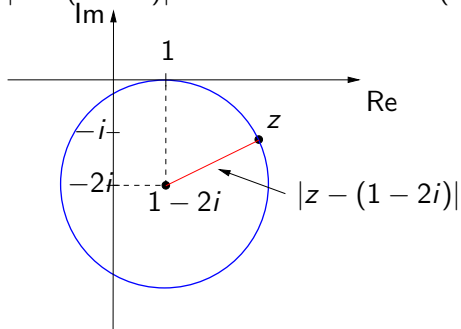
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Es. 
$$\frac{1}{3 - i2} = \frac{3 + i2}{13}$$

Cosa rappresenta  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - 2i)| = 2\}$ ?

$|z|$  è la distanza di  $z$  da  $0$ .

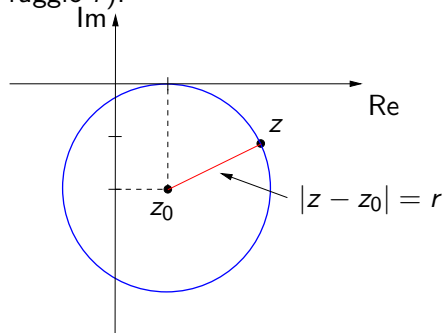
$|z - (1 - 2i)|$  è la distanza di  $z$  da  $(1 - 2i)$ .



$A$  è l'insieme dei punti  $z$  la cui distanza da  $(1 - 2i)$  è uguale a 2, ovvero è la **circonferenza dei punti  $z \in \mathbb{C}$  di centro  $z_C = (1 - 2i)$  e raggio  $r = 2$ .**

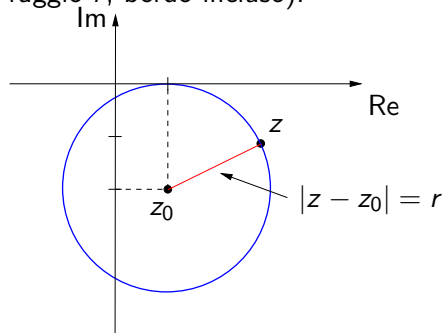
$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Assegnato  $z_0 \in \mathbb{C}$ , ed assegnato  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  
l'insieme  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$  è l'insieme dei punti del  
piano complesso che distano  $r$  da  $z_0$  (circonferenza di centro  $z_0$  e  
raggio  $r$ ).



$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

Assegnato  $z_0 \in \mathbb{C}$ , ed assegnato  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  
l'insieme  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$  è l'insieme dei punti del  
piano complesso che distano da  $z_0$  al più  $r$  (cerchio di centro  $z_0$  e  
raggio  $r$ , bordo incluso).



# Operazioni e complesso coniugato

$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ :

$$|\alpha \cdot z| = |\alpha| \cdot |z|$$

$$\overline{(\alpha z)} = \alpha \bar{z}$$

$\forall z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$$

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re}z$$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\operatorname{Im}z$$

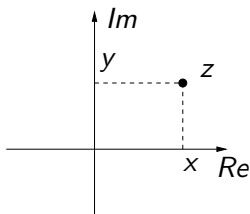
$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

**Infatti:** prendo  $z = x + iy$ , allora  $\bar{z} = x - iy$  e  
 $z = \bar{z}$  se e solo se  $x = x$  (sempre vero) e  $y = -y$  (vero se e solo se  
 $y = \operatorname{Im}z = 0$ ), ovvero  $z \in \mathbb{R}$ .

## Forma trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$

$\forall z \in \mathbb{C}$  è univocamente individuato mediante 2 parametri: la sua parte reale  $\operatorname{Re} z = x$  e la sua parte immaginaria  $\operatorname{Im} z = y$ .



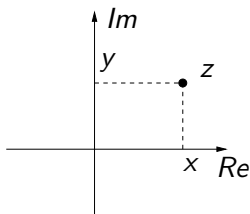
$z$  può essere individuato univocamente anche da altri due parametri:

- $\rho = |z|$  **modulo** di  $z$
- $\vartheta = \arg(z)$  **argomento** di  $z$

$\rho$  e  $\vartheta$  sono dette anche **coordinate polari** del punto  $z$  nel piano complesso.

## Forma trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$

$\forall z \in \mathbb{C}$  è univocamente individuato mediante 2 parametri: la sua parte reale  $\operatorname{Re} z = x$  e la sua parte immaginaria  $\operatorname{Im} z = y$ .



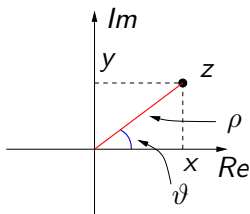
$z$  può essere individuato univocamente anche da altri due parametri:

- $\rho = |z|$  **modulo** di  $z$
- $\vartheta = \arg(z)$  **argomento** di  $z$

$\rho$  e  $\vartheta$  sono dette anche **coordinate polari** del punto  $z$  nel piano complesso.

## Forma trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$

$\forall z \in \mathbb{C}$  è univocamente individuato mediante 2 parametri: la sua parte reale  $\operatorname{Re} z = x$  e la sua parte immaginaria  $\operatorname{Im} z = y$ .

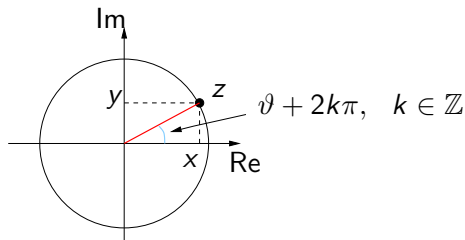


$z$  può essere individuato univocamente anche da altri due parametri:

- $\rho = |z|$  **modulo** di  $z$
- $\vartheta = \arg(z)$  **argomento** di  $z$

$\rho$  e  $\vartheta$  sono dette anche **coordinate polari** del punto  $z$  nel piano complesso.

Se conosco  $\rho$  e  $\theta$ , allora  $x = \rho \cos \vartheta$ ,  $y = \rho \sin \vartheta$ .

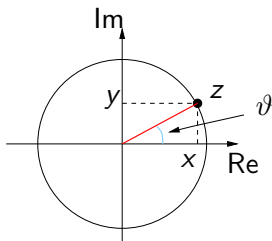


Se conosco  $x$  e  $y$ , allora  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\vartheta = \arctan(y/x)$ ,  
(per la regola della trigonometria che lega gli elementi di un  
triangolo rettangolo)

ma esistono **infiniti angoli** che individuano lo **stesso numero complesso  $z$** :  $\vartheta$ ,  $\vartheta + 2\pi$ ,  $\vartheta + 4\pi$ ,  $\vartheta - 2\pi$ , ..., in genere  $\vartheta + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Se si decide di scegliere  $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ , si pone:

$$\vartheta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{se } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{se } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{se } x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0, y < 0 \end{cases}$$



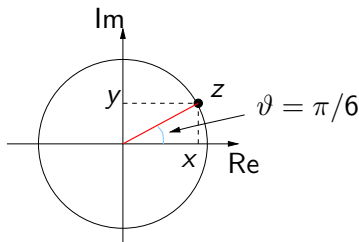
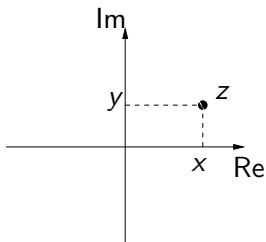
$\arg(0) = \mathbb{R}$ , infatti  $z = 0 = 0(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ ,  $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$ .

Si ha:

$$z = x + iy = \rho \cos \vartheta + i \rho \sin \vartheta = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

cartesiane  $\rightarrow$  polari

$$1) z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}. \quad \operatorname{Re} z = x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2}.$$



Allora:

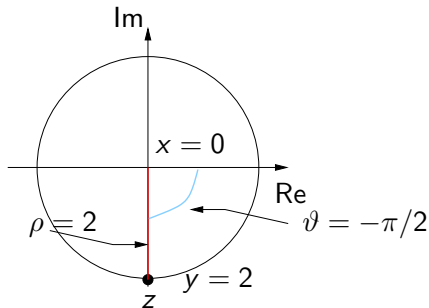
$$\vartheta = \frac{\pi}{6} \text{ e } \rho = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1$$

$$\text{Con la regola: } \vartheta = \arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

## polari $\rightarrow$ cartesiane

$$2) \rho = 2 \text{ e } \vartheta = -\frac{\pi}{2}$$

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2(0 - i) = -2i$$



# Esponenziale complesso

$\forall z \in \mathbb{C}$  si vuole definire l'**esponenziale** di  $z$ ,  $e^z \in \mathbb{C}$ , in modo da rispettare le proprietà classiche delle potenze.

$e$  è il numero di Eulero (a volte noto come numero di Nepero)

$e \simeq 2.718\dots$

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$  si definisce

$$e^z := e^{\operatorname{Re}z}(\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z)) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Esempi.

- $e^{(3-i)} = e^3(\cos(-1) + i \sin(-1)) = e^3(\cos(1) - i \sin(1))$
- $e^{-2} = e^{-2}(\cos(0) + i \sin(0))$
- $e^{2i\pi} = e^0(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = 1(1 + i0) = 1$
- $e^{i\vartheta} = e^0(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)) = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$

# Formula di Eulero (1707 - 1783)

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

Confrontando la forma trigonometrica di un numero complesso  $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  e la formula di Eulero  $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$  si ha

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$

detta **forma esponenziale** del numero complesso  $z$ .

**Oss.** Per  $\vartheta = \pi$  la formula di Eulero diventa:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

# Proprietà dell'esponenziale in $\mathbb{C}$

## Teorema.

- 1  $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- 2  $e^z \cdot e^{-z} = 1$
- 3  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}z} = \rho$
- 4  $|e^{i\vartheta}| = \sqrt{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} = 1 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$
- 5  $(e^z)^n = e^{nz} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- 6  $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- 7  $\overline{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta}$
- 8  $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

### Dimostrazione di 3. $|e^z| = e^{\operatorname{Re}z} = \rho$

Per definizione di esponenziale di un numero complesso si ha:

$$e^z = e^{\operatorname{Re}z}(\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z)) = \rho(\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z))$$

Poichè  $|\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z)| = |\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)| = 1$ , il

modulo di  $e^z$  è:

$$|e^z| = |e^{\operatorname{Re}z}(\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z))| = e^{\operatorname{Re}z}.$$

### Dimostrazione di 4. $|e^{i\vartheta}| = 1$

Se considero  $z = 0 + i\vartheta$ , si ha  $\operatorname{Re}z = 0$  e per la proprietà precedente  $e^z = e^0 = 1$ .

### Dimostrazione di 6. $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Per la proprietà 1.:  $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i}$

Quanto vale  $e^{2k\pi i}$ ?

$$e^{2k\pi i} = e^0(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = 1(1 + 0) = 1$$

Quindi  $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$ .

Un numero complesso  $z$  può essere espresso in una delle tre seguenti forme, **tutte equivalenti fra di loro**:

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{forma cartesiana} \\ &= \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) && \text{forma trigonometrica} \\ &= \rho e^{i\vartheta} && \text{forma esponenziale} \end{aligned}$$

A seconda del contesto in cui si lavora, si usa la forma piú adatta:

per **somma e sottrazione**: forma cartesiana

per **prodotto, divisione e potenza**: forma esponenziale.

# Operazioni con la forma esponenziale

La forma esponenziale dei numeri complessi è molto comoda per svolgere prodotti, divisioni e potenze di numeri complessi.

Siano  $z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}$ , si ha:

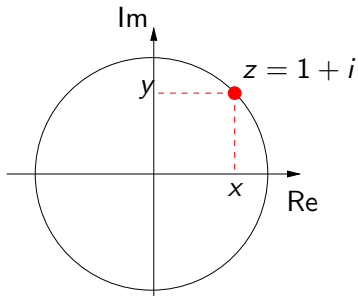
- $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$
- $(z_1)^n = \rho_1^n e^{in\vartheta_1}$

Es. Calcolare  $(1 + i)^6$ .

- 1 si trasforma  $z = 1 + i$  in forma trigonometrica e poi esponenziale
- 2 si calcola  $z^6$ , utilizzando la forma esponenziale
- 3 si trasforma il risultato nella forma cartesiana.

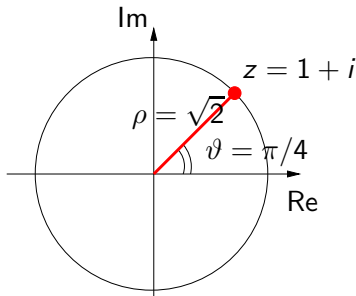
**Passo 1.:**  $(z = x + iy = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta})$

$$\begin{aligned} z &= (1 + i) \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$



**Passo 1.:**  $(z = x + iy = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta})$

$$\begin{aligned} z &= (1 + i) \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$



**Passo 2.:**

$$z^6 = (1 + i)^6 = \left( \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{3}{2}\pi} = 8 e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

**Passo 3.:**

$$8 e^{i\frac{3}{2}\pi} = -8i.$$

$$\text{Quindi } (1 + i)^6 = -8i$$

# Radice $n$ -sima di un numero complesso

Dato  $w \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , vogliamo calcolare tutti i numeri  $z \in \mathbb{C}$  per cui vale

$$z^n = w$$

**Def.** Diciamo che  $z \in \mathbb{C}$  è **radice  $n$ -sima** di  $w \in \mathbb{C}$  se vale  $z^n = w$ . L'obiettivo è calcolare le radici  $n$ -sime di un numero complesso  $w$  assegnato o, equivalentemente, risolvere l'equazione  $z^n - w = 0$ .

**Es.** Calcolare le radici **terze** di  $w = -8$ , ovvero risolvere l'equazione  $z^3 + 8 = 0$  in  $\mathbb{C}$ .

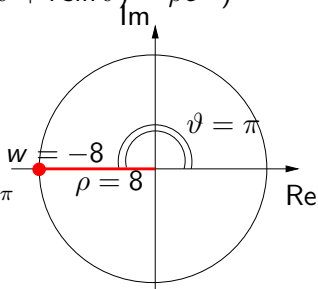
**N.B.** L'equazione  $x^3 + 8 = 0$  in  $\mathbb{R}$  ha una sola soluzione reale:  $x = -2$ .

Vedremo che l'equazione  $z^3 + 8 = 0$  in  $\mathbb{C}$  ha 3 soluzioni complesse.

1. Si trasforma  $w = -8$  in forma esponenziale
2. Si calcolano le radici complesse  $z_0, z_1, \dots, z_n$
3. Si trasformano i numeri trovati nella forma trigonometrica.

**Passo 1.:**  $(w = x + iy = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)) = \rho e^{i\vartheta}$

$$\begin{aligned}w &= -8 = -8 + 0i \\ &= 8(-1 + 0i) \\ &= 8(\cos \pi + i \sin \pi) = 8e^{i\pi}\end{aligned}$$



**Passo 2.:**

$$w = 8e^{i\pi} = 2^3 e^{3(i\pi/3)} = (2e^{i\pi/3})^3,$$

quindi ho trovato una radice  $z_0 = 2e^{i\pi/3}$ .

Ora ricordo la proprietà  $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z} : e^{i\pi} = e^{i\pi+2k\pi i}$ .

$$\begin{aligned}\text{Se prendo } k = 1, \text{ ho } w &= 8e^{i\pi} = 8e^{i\pi+2i\pi} \\ &= 8e^{i3\pi} = 2^3 e^{3(i\pi)} = (2e^{i\pi})^3,\end{aligned}$$

quindi anche  $z_1 = 2e^{i\pi}$  è una radice terza di  $w = -8$ .

Se prendo  $k = 2$ , ho

$$w = 8e^{i\pi} = 8e^{i\pi+4i\pi} = 8e^{i5\pi} = 2^3 e^{3(i5\pi/3)} = (2e^{i5\pi/3})^3,$$

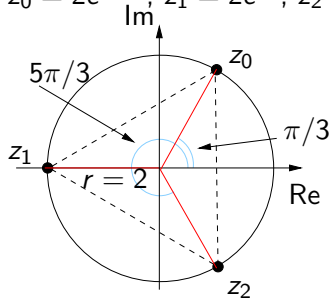
quindi anche  $z_2 = 2e^{i5\pi/3}$  è una radice terza di  $w = -8$ .

Per  $k = 3$ , ottengo lo stesso risultato ottenuto con  $k = 0$ ,

per  $k = -1$ , ho lo stesso risultato ottenuto con  $k = 2$ , ecc.

**Le uniche radici distinte sono 3:**

$$z_0 = 2e^{i\pi/3}, \quad z_1 = 2e^{i\pi}, \quad z_2 = 2e^{i5\pi/3},$$



**Passo 3.:**

$$z_0 = 2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_1 = 2e^{i\pi} = -2,$$

$$z_2 = 2e^{i5\pi/3} = 1 - \sqrt{3}i$$

# Formula generale

**Teorema.** Ogni numero complesso non nullo  $w$  ha esattamente  $n$  radici complesse  $n$ -sime distinte, ovvero l'equazione  $z^n = w$  ha  $n$  soluzioni distinte complesse.

Se  $w = \rho e^{i\vartheta}$ , le  $n$  radici  $n$ -sime di  $w$  hanno la forma:

$$z_k = r e^{i\varphi_k},$$

$$\text{dove } r = \sqrt[n]{\rho} \text{ e } \varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \text{ con } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Osservazione.** Le radici  $n$ -sime di  $w$  sono i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto nella circonferenza di centro  $0$  e raggio  $r$ . Ogni radice è ottenuta dalla precedente incrementando l'argomento  $\varphi_k$  di un angolo  $2\pi/n$ .

**Esercizio.** Calcolare le radici complesse **seste** dell'unità.

Si ha  $w = 1$ ,  $n = 6$ . Devo calcolare  $n = 6$  numeri complessi  $z_0, z_1, \dots, z_5$  della forma

$$z_k = r e^{i\varphi_k}, \text{ con } r = \sqrt[6]{\rho} \text{ e } \varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{6}, \text{ con } k = 0, 1, \dots, 5.$$

**Passo 1.** Individuo  $\rho$  e  $\vartheta$ :

$$w = 1 = \rho e^{i \cdot 0}, \text{ quindi } \rho = 1 \text{ e } \vartheta = 0$$

**Passo 2.** Calcolo:  $r = \sqrt[6]{\rho} = 1$

**Passo 3.** Calcolo gli angoli  $\varphi_k$ , con  $k = 0, \dots, 5$

$$\varphi_0 = \frac{0 + 0 \cdot 2\pi}{6} = 0, \quad \varphi_1 = \frac{0 + 1 \cdot 2\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

$$\varphi_2 = \frac{0 + 2 \cdot 2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \frac{0 + 3 \cdot 2\pi}{6} = \pi,$$

$$\varphi_4 = \frac{0 + 4 \cdot 2\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}, \quad \varphi_5 = \frac{0 + 5 \cdot 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}.$$

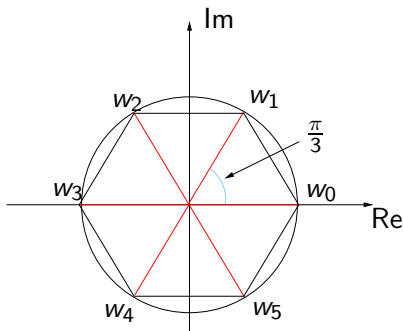
Le radici seste dell'unità sono:

$$z_0 = e^{i\varphi_0} = e^{i0} = 1,$$

$$z_1 = e^{i\varphi_1} = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{i\varphi_2} = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = e^{i\varphi_3} = e^{i\pi} = -1$$

$$z_4 = e^{i\varphi_4} = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_5 = e^{i\varphi_5} = e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



**Riferimento bibliografico:** Canuto Tabacco, cap.8, pag. 280-290

### Esercizi:

- 1) n.12, 13, 14, 15, 16, 18, 19. del cap. 8. Canuto-Tabacco.
- 2) tutti gli esercizi che ci sono nei temi d'esame assegnati in precedenza e che richiedono di determinare il luogo geometrico (o l'insieme) degli  $z \in \mathbb{C}$  che soddisfano una certa condizione.

### Esempio tratto dall'appello del 13/09/04:

Determinare il luogo geometrico degli  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$[|z - 2i| - 3](z - 2i) = 0$$

- 3) tutti gli esercizi che ci sono nei temi d'esame assegnati in precedenza e che richiedono il calcolo di radici di un numero complesso.

# Polinomi in campo complesso

Consideriamo una funzione  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Def.** Si dice che  $p$  è **polinomio** se si può scrivere

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

dove  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sono numeri complessi assegnati detti **coefficienti** del polinomio. Se  $a_n \neq 0$ , allora si dice che il polinomio è di grado  $n$ .

**Es.**  $p(z) = (3 + i)z^3 - iz^2 + 2$ .

Questo polinomio ha grado  $n = 3$  e i coefficienti sono:

$$a_3 = 3 + i, a_2 = -i, a_1 = 0, a_0 = 2$$

**Def.** Si chiama **radice** di  $p$  ogni numero complesso  $w$  tale che  $p(w) = 0$ .

**Es.**  $p(z) = z^2 - 7z + (1 - 7i)$ ,  $w = -i$  è una radice di  $p(z)$ .

Infatti, andando a sostituire  $z = -i$  nel polinomio e facendo i conti si ha:  $p(-i) = (-i)^2 - 7(-i) + (1 - 7i) = -1 + 7i + 1 - 7i = 0$



**Proposizione.** (Principio di identità dei polinomi)

Due polinomi  $p(z)$  e  $q(z)$  sono uguali se e solo se sono uguali i coefficienti delle potenze omologhe dei due.

**Es.**  $p(z) = (3 + i)z^3 - iz^2 + 2$  e  $q(z) = (3 + i)z^3 - z^2 + 2$  non sono uguali.

Infatti  $a_2 = -i$  per  $p$ , mentre  $a_2 = -1$  per  $q$ .

**Teorema (fondamentale dell'algebra).** Ogni polinomio di grado  $n$  ha esattamente  $n$  radici complesse  $w_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) e si può decomporre nel prodotto di  $n$  binomi del tipo  $(z - w_j)$ .

Si ha  $p(z) = a_n(z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_n)$ .

**Oss.** Le radici del polinomio possono essere non tutte distinte. Raggruppiamo le radici in modo da identificare fra loro quelle uguali,

chiamiamo **molteplicità di una radice** il numero di volte per cui quella radice si ripete (la indichiamo con  $\mu_j$ ),

siano  $d$  le radici distinte ( $d \leq n$ ),

allora si ha  $\mu_1 + \dots + \mu_d = n$ .

Es.

- $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ .  $w_1 = i$ ,  $w_2 = -i$ .

Ho 2 radici distinte semplici (ovvero con molteplicità 1);

- $z^5 + z^3 = z^3(z^2 + 1) = z \cdot z \cdot z \cdot (z - i) \cdot (z + i)$ .

$$w_1 = w_2 = w_3 = 0, w_4 = i, w_5 = -i.$$

Ho tre radici distinte, la prima di molteplicità 3, le altre due semplici. La somma delle molteplicità è  $3 + 1 + 1 = 5 = n$  (=grado del polinomio).

**Proposizione.** Si consideri un polinomio  $p(z)$  con coefficienti  $a_i \in \mathbb{R}$ . Se  $w$  è una radice (non reale), anche  $\overline{w}$  è una radice, con la stessa molteplicità.

Inoltre, se il grado del polinomio è dispari, vi è almeno una radice reale.

## OSSERVAZIONI

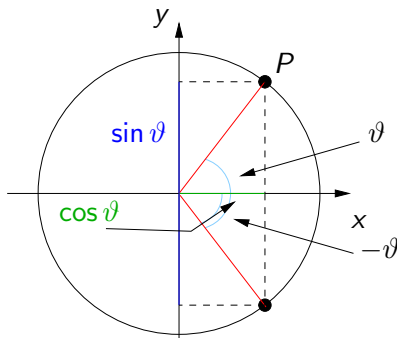
- 1  $z^3 = |z|^4$  (ovvero  $z^3 - |z|^4 = 0$ ) NON è una equazione di tipo polinomiale (in un polinomio compaiono solo potenze di  $z$ , qui invece c'è anche un modulo).
- 2 In una equazione di tipo non polinomiale si contano le radici distinte (ovvero senza la molteplicità). Quindi l'equazione  $z^3 = |z|^4$  ha 4 radici (distinte).

## Osservazioni su sin e cos

Considero la formula di Eulero:  $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$ , con  $\vartheta \in \mathbb{R}$ .

Riscrivo la formula con  $-\vartheta$  al posto di  $\vartheta$ :

$$e^{-i\vartheta} = \cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta) = \cos \vartheta - i \sin \vartheta$$



$$\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta, \quad \sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta.$$

# Osservazioni su sin e cos

Considero la formula di Eulero:  $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$ , con  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ,  
 $e^{-i\vartheta} = \cos \vartheta - i \sin \vartheta$

Sommo le due formule:

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2 \cos \vartheta, \quad \text{ovvero} \quad \cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

Sottraggo le due formule:

$$e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i \sin \vartheta, \quad \text{ovvero} \quad \sin \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

# Sin e Cos in campo complesso

Si estendono le formule date prima per  $\vartheta \in \mathbb{R}$  ad un qualsiasi  $z \in \mathbb{C}$ .

Diventano le definizioni di sin e cos su una variabile complessa.

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

## Riferimento bibliografico

Per il piano cartesiano: Canuto-Tabacco, sez. 1.5, pag. 22-24.

Per i numeri complessi: Canuto-Tabacco, sez. 8.3, pag 280-290.

## Esercizi:

vari esercizi dei temi d'esame.

n. 12 - 19 del cap. 8 del libro Canuto-Tabacco.

## Esercizio

Sapendo che una delle radici del polinomio

$p(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$ , ( $z \in \mathbb{C}$ ) è  $w_1 = 1 + i$ , calcolare le altre radici di  $p(z)$ .

## Esercizio

Risolvere l'equazione  $z^2 = |z|^4$ , con  $z \in \mathbb{C}$ .