

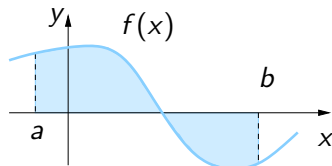
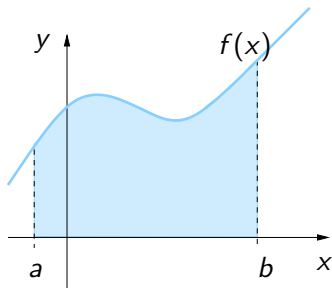
Integrazione definita

Sia $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato.

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Def. Trapezoide di f sull'intervallo $[a, b]$ è la regione di piano delimitata dall'asse $y = 0$, dalle rette $x = a$ e $x = b$ e dal grafico di f . Viene indicato con $\mathcal{T}(f; a, b)$.

$$\mathcal{T}(f; a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \min\{0, f(x)\} \leq y \leq \max\{0, f(x)\}\}$$



Integrale di Riemann

(Bernhard Riemann 1826-1866)

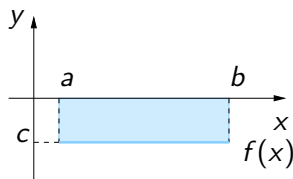
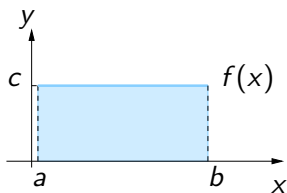
Obiettivo: calcolare l'area del trapezoide $\mathcal{T}(f; a, b)$.

1. f costante:

$\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$

$\mathcal{T}(f; a, b)$ è un rettangolo e la sua area è:

$$|c|(b - a) = \begin{cases} c(b - a) & \text{se } c \geq 0 \\ -c(b - a) & \text{se } c < 0 \end{cases}$$



Per ogni funzione f costante su $[a, b]$, si definisce

$$\int_I f = \int_{[a,b]} f = c(b - a)$$

e $\int_I f$ è detto **integrale definito di f su $I = [a, b]$** .

Attenzione: Se $c > 0$ allora l'area del trapezoide $\mathcal{T}(f; a, b)$ è $\int_I f$,
altrimenti se $c < 0$, l'area del trapezoide $\mathcal{T}(f; a, b)$ è $-\int_I f$.

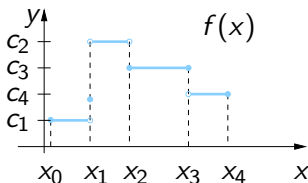
N.B. D'ora in poi parliamo di **integrale definito di f su $I = [a, b]$** , dissociato dall'area del trapezoide.

2. f funzione a scala

Def. Siano x_0, x_1, \dots, x_n (con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$) $(n+1)$ punti distinti e ordinati in $[a, b]$. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **funzione a scala** se esiste una suddivisione di $[a, b]$ in n sottointervalli, indotta dai punti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ed esistono delle costanti c_1, c_2, \dots, c_n , tali che

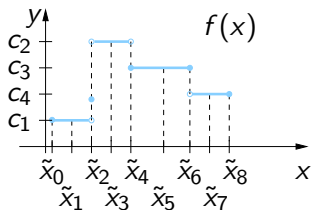
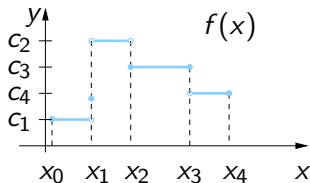
$$f(x) = c_k \quad \forall x \in (x_{k-1}, x_k) \quad \text{per } k = 1, \dots, n$$

(o equivalentemente $f|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k$ per $k = 1, \dots, n$)



Oss. Nei punti x_k la funzione f può assumere un qualsiasi valore finito reale, non necessariamente coincidente con c_k o c_{k+1} .

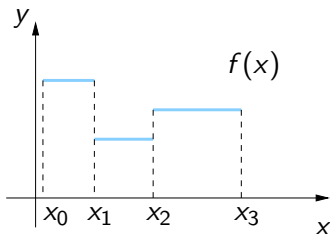
Oss. Se f è a scala per una suddivisione di $[a, b]$ indotta dai punti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, allora f è a scala anche per una suddivisione più fine $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$ che includa i punti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.



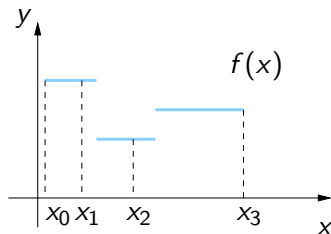
Date due funzioni a scala f e g associate a due suddivisioni differenti su $[a, b]$, è sempre possibile trovare una suddivisione di $[a, b]$ comune ad entrambe le funzioni.

Esempio Sia f a scala rispetto alla suddivisione indotta dai punti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e g a scala rispetto alla suddivisione indotta dai punti $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$. Allora entrambe sono a scala rispetto alla suddivisione indotta dall'unione $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \cup \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$.

Def. Una suddivisione di $[a, b]$ indotta dai punti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è detta **adattata** ad f se f è a scala rispetto a tale suddivisione.



adattata



non adattata

Def. Denotiamo con $\mathcal{S}([a, b]) = \{\text{funzioni a scala su } [a, b]\}$

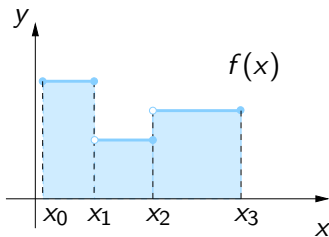
Def. Sia $f \in \mathcal{S}([a, b])$ e siano $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ i punti di una suddivisione adattata ad f t.c.

$$f|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k \quad \text{per } k = 1, \dots, n$$

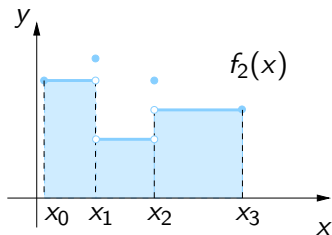
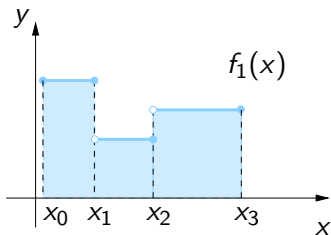
Si definisce

$$\int_I f = \int_{[a,b]} f = \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1})$$

e $\int_I f$ è detto **integrale definito** di f su $I = [a, b]$.



Oss. $\int_I f$ non dipende dal valore che f assume in un numero finito di punti:



Queste due funzioni hanno lo stesso integrale.

Teorema 1. Siano $f, g \in \mathcal{S}([a, b])$ t.c. $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Allora

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Dim. Siano $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ i punti di una suddivisione adattata sia a f che a g e siano $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k, \quad g|_{(x_{k-1}, x_k)} = d_k \quad \text{per } k = 1, \dots, n.$$

L'ipotesi $f(x) \leq g(x)$ vuol dire che $c_k \leq d_k$ per $k = 1, \dots, n$ e quindi

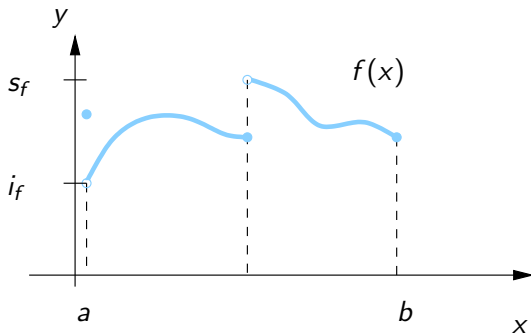
$$\int_I f = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n d_k(x_k - x_{k-1}) = \int_I g.$$



3. f limitata in $[a, b]$ (non necessariamente continua)

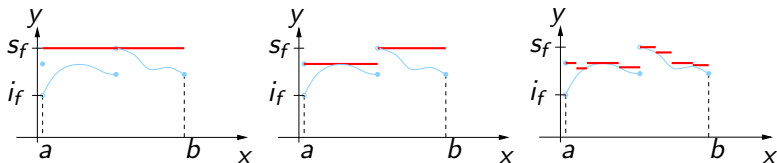
Siano $i_f = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$ e $s_f = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Se f è limitata, allora $i_f, s_f \in \mathbb{R}$



Funzioni a scala maggioranti

Def. $\mathcal{S}_f^+ = \{h \in \mathcal{S}([a, b]) : h(x) \geq f(x), \forall x \in [a, b]\}$ è l'insieme delle funzioni a scala che **maggiorano** f .



f è in azzurro, le funzioni a scala sono in rosso.

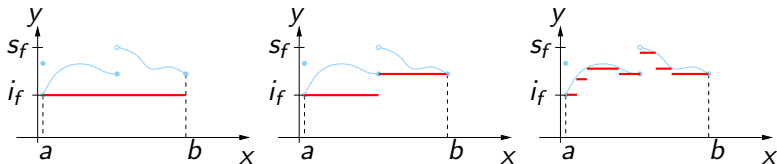
Oss. L'insieme \mathcal{S}_f^+ non è vuoto, contiene almeno la funzione costante $f(x) = s_f$ (grafico a sx).

Def. $I_f^+ = \left\{ \int_I h, h \in \mathcal{S}_f^+ \right\}$ I_f^+ è un sottoinsieme di \mathbb{R} .

\mathcal{S}_f^+ è un insieme di funzioni, I_f^+ è un insieme di numeri reali.

Funzioni a scala minoranti

Def. $\mathcal{S}_f^- = \{g \in \mathcal{S}([a, b]) : g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]\}$ è l'insieme delle funzioni a scala che **minorano** f .



f è in azzurro, le funzioni a scala sono in rosso.

Oss. L'insieme \mathcal{S}_f^- non è vuoto, contiene almeno la funzione costante $f(x) = i_f$ (nel grafico a sx).

Def. $I_f^- = \left\{ \int_I g, g \in \mathcal{S}_f^- \right\}$ I_f^- è un sottoinsieme di \mathbb{R} .

\mathcal{S}_f^- è un insieme di funzioni, I_f^- è un insieme di numeri

Integrale superiore e inferiore

Def. Si definisce **integrale superiore** di f su $I = [a, b]$ il numero reale

$$\overline{\int}_I f = \inf I_f^+ = \inf \left\{ \int_I h : h \in \mathcal{S}_f^+ \right\}$$

Def. Si definisce **integrale inferiore** di f su $I = [a, b]$ il numero reale

$$\underline{\int}_I f = \sup I_f^- = \sup \left\{ \int_I g : g \in \mathcal{S}_f^- \right\}$$

Teorema. Sia f limitata su I (I è intervallo chiuso e limitato in \mathbb{R}). Allora

$$\int_I f \leq \overline{\int_I f}$$

Dim. Consideriamo gli insiemi I_f^- e I_f^+ , ricordiamo che sono sottoinsiemi di \mathbb{R} , quindi per essi posso determinare inf e sup.

Sia $a \in I_f^-$ cioè $a = \int_I g$ con g a scala e $g(x) \leq f(x)$

e $b \in I_f^+$ cioè $b = \int_I h$ con h a scala e $h(x) \geq f(x)$

Poichè $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, per il Teorema 1 si ha:

$a = \int_I g \leq \int_I h = b$, ovvero $a \leq b, \forall a \in I_f^-, \forall b \in I_f^+$.

Per poter proseguire ci serve il seguente Lemma.

Lemma. Siano A e B due insiemi contenuti in \mathbb{R} tali che $a \leq b, \forall a \in A$ e $\forall b \in B$. Allora $\sup A \leq \inf B$.

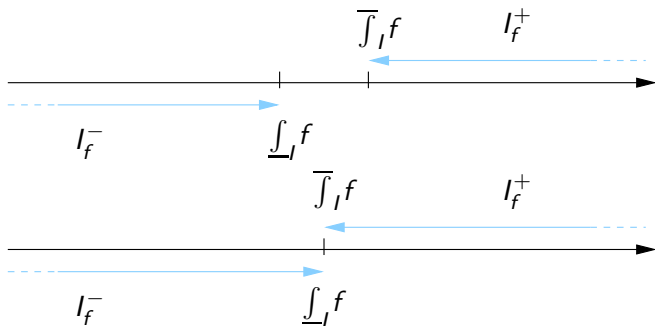
Dim. del Lemma. Sia $a \in A$, ogni $b \in B$ risulta maggiorante di A , per come sono stati presi A e B . Per definizione di sup, il sup di un insieme è il più piccolo dei maggioranti, quindi $\sup A \leq b, \forall b \in B$. Quest'ultima disuguaglianza dice anche che $\sup A$ è un minorante per B e, per definizione di inf di un insieme (inf è il più grande di tutti i minoranti) si ha $\sup A \leq \inf B$. \square

Continuiamo la dimostrazione del teorema. Per il Lemma, ponendo $A = I_f^-$ e $B = I_f^+$ abbiamo che $\sup I_f^- \leq \inf I_f^+$, ovvero (per la definizione di integrale superiore e inferiore)

$$\int_I f = \sup I_f^- \leq \inf I_f^+ = \overline{\int_I f}.$$

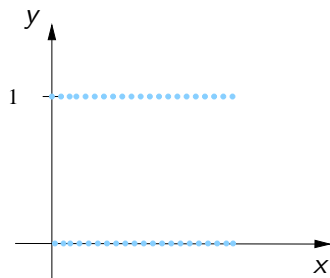
\square

Oss. Due possibili situazioni:



La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$$



In questo caso $\int_I f = \sup l_f^- = 0$ e $\overline{\int}_I f = \inf l_f^+ = 1$

Funzioni integrabili secondo Riemann

Def. Sia f limitata in $I = [a, b]$. Diciamo che f è integrabile secondo Riemann su I se l'integrale superiore ed inferiore di f coincidono, cioè $\int_I f = \overline{\int}_I f$.

Si definisce **integrale definito** di f su $[a, b]$ il valore

$$\int_I f = \int_I f = \overline{\int}_I f.$$

Si può utilizzare anche la notazione

$$\int_I f = \int_{[a,b]} f$$

Oss. f è integrabile secondo Riemann se I_f^- e I_f^+ sono due classi contigue in \mathbb{R} , per cui esiste unico l'elemento separatore.

Oss. La funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Riemann.

Proprietà 1.

Siano f e g due funzioni integrabili su $[a, b]$. Allora:

① f è integrabile su ogni sottointervallo $[c, d] \subset [a, b]$

② la funzione $|f|$ è integrabile su $[a, b]$

③ f^n è integrabile su $[a, b]$

④ fg è integrabile su $[a, b]$

⑤ $f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ e

$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$ sono integrabili su $[a, b]$

Def. Diciamo che f è **localmente integrabile** su $I \subseteq \mathbb{R}$ (I non necessariamente limitato) se f è integrabile su un qualsiasi intervallo chiuso e limitato contenuto in I .

Integrale per intervalli orientati

Def. Sia f localmente integrabile su I e siano $a, b \in I$. Si definisce integrale da a a b di f :

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{se } b > a \\ 0 & \text{se } a = b \\ - \int_{[b,a]} f & \text{se } b < a \end{cases}$$

Proprietà dell'integrale definito

Teorema. Siano f e g integrabili su un intervallo chiuso e limitato

I . Allora:

1) **Additività:** $\forall a, b, c \in I$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2) **Linearità:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a, b \in I$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

3) **Positività:** Se $f \geq 0$ in $[a, b] \subset I$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Inoltre, se f è continua, allora $\int_a^b f(x)dx = 0 \iff f \equiv 0$.

4) **Confronto:** Se $f \leq g$ in $[a, b] \subset I$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

5) **Maggiorazione:** $\forall a, b \in I$

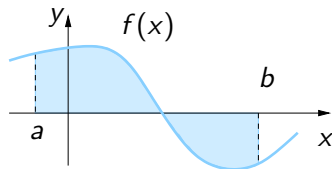
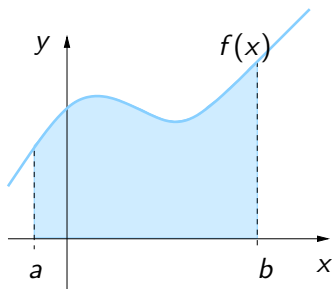
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Classe delle funzioni integrabili

Teorema. Sono integrabili secondo Riemann, su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ le seguenti funzioni:

- 1 le funzioni continue su $[a, b]$
- 2 le funzioni limitate su $[a, b]$ e discontinue in un numero finito di punti (discontinuità di tipo salto, eliminabile o seconda specie)
- 3 le funzioni monotone su $[a, b]$
- 4 le funzioni monotone a tratti su $[a, b]$ (ovvero per le quali esiste una suddivisione di $[a, b]$ t.c. f è monotona su ogni sottointervallo della suddivisione)

Area del trapezoide per una funzione integrabile



L'area del trapezoide $\mathcal{T}(f; a, b)$ è: $\int_a^b |f(x)| dx$

Media integrale

Def. Sia f integrabile su $[a, b]$. Definiamo **media integrale** (o **valor medio**) di f su $[a, b]$ il valore reale

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema della media integrale Sia f integrabile su $[a, b]$. Allora

$$\inf_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Inoltre se f è continua su $[a, b]$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $\int_a^b f(x) dx = f(c)$.

Dimostrazione del teorema della media integrale

Per definizione di inf e sup si ha

$$\inf_{a \leq x \leq b} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

e, applicando l'integrale ai tre termini della disuguaglianza si ha:

$$\int_a^b \underbrace{\left(\inf_{a \leq x \leq b} f(x) \right)}_{\text{costante}} dx = (b-a) \inf_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \underbrace{\left(\sup_{a \leq x \leq b} f(x) \right)}_{\text{costante}} dx = (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

Dividendo per $(b-a)$ si ha la tesi.

Se poi f è continua, per Weierstrass si ha $\inf f = \min f = m$, $\sup f = \max f = M$ e $m \leq \int_a^b f(x) dx \leq M$. Applicando il teorema dei valori intermedi a f sull'intervallo $[x_m, x_M]$ (x_m è un punto di minimo assoluto e x_M è un punto di massimo assoluto) allora f assume tutti i valori compresi tra m e M , ovvero

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Funzione integrale

Sia f definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e sia localmente integrabile su I . Sia $x_0 \in I$ fissato. Definiamo **Funzione integrale di f** la funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Oss. Per la definizione di integrale definito, si ha

$$F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt = 0.$$

Funzioni Lipschitziane

Def. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è **lipschitziana** se $\exists L \geq 0$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|, \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

o equivalentemente se $\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq L$, cioè f ha rapporti incrementali limitati da un numero reale positivo $L < +\infty$.

Es. $f(x) = ax + b$ (retta). Il rapporto incrementale costruito su due punti qualsiasi in \mathbb{R} , è $\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |a|$. Prendendo $L = |a|$, si ha f lips.

Es. $f(x) = x^2$ su $I = [-a, a]$, con $a \in \mathbb{R}^+$. Abbiamo:

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = \frac{|x_2^2 - x_1^2|}{|x_2 - x_1|} = |x_2 + x_1| \leq |x_1| + |x_2| \leq 2a$$

Prendendo $L = 2a$, si ha f lips.

$f(x) = x^2$ non è lips su tutto \mathbb{R} , in quanto la somma $|x_2 + x_1|$ non è limitata superiormente $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Es. $f(x) = \sqrt{x}$ su $[0, 1]$ non è lips.

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = \frac{|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}|}{|x_2 - x_1|} = \frac{1}{|\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}|}$$

Prendendo $x_1 = 0$ si ha

$\frac{|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}|}{|x_2 - x_1|} = \frac{1}{\sqrt{x_2}}$, che non è limitata superiormente per x_2 prossimi a zero.

Teorema. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, loc. integrabile su I e sia $F(x)$ una funzione integrale di f . Allora:

- 1) se $f \geq 0$ su I , allora F è crescente su I
- 2) se f è limitata su I , allora F è lips su I .

Dim. 1) Sia $f \geq 0$, e $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_2 > x_1$. Vogliamo provare che $F(x_2) \geq F(x_1)$.

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_{x_0}^{x_2} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_2} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geq 0 \text{ perchè } f \geq 0. \end{aligned}$$

Quindi F è crescente.

2). Sia f limitata (cioè $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M, \forall x \in I$). Siano $x_1, x_2 \in I$. Vogliamo provare che $\exists L > 0 : |F(x_2) - F(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$.

Prendiamo $x_2 > x_1$.

$$\begin{aligned} |F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} M dt = M(x_2 - x_1) = M|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Se invece $x_2 < x_1$, abbiamo:

$$\begin{aligned} |F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t) dt \right| \leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t)| dt \\ &\leq \int_{x_2}^{x_1} M dt = M(x_1 - x_2) = M|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

F risulta lips con costante $L = M$.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sia x_0 fissato in I e sia $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ una sua funzione integrale. Allora F è derivabile $\forall x \in I$ e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad , \forall x \in I$$

ovvero ogni funzione integrale di f è una primitiva di f .

Dim. Sia $x \in I$ e sia $\Delta x > 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_0}^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt \right) \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \end{aligned}$$

Per il teorema della media integrale $\exists z \in (x, x + \Delta x)$ t.c.

$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(z)$ e, poichè f è continua, si ha

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x).$$

Calcoliamo ora il limite del rapporto incrementale su F :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x) \end{aligned}$$

Concludiamo che F è derivabile in ogni punto $x \in I$ e

$$F'(x) = f(x).$$

Corollario. Se x_0 è un punto di salto per f allora x_0 è un punto angoloso per F .

Oss. Il teorema fondamentale del calcolo integrale può essere riscritto anche nella forma

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x).$$

Es. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^4} \int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2) dt$$

Abbiamo una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Non possiamo applicare Taylor, vediamo se possiamo applicare de l'Hopital.

Il limite si può riscrivere come $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{3x^4}$, dove $F(x)$ è una funzione integrale di f e poichè f è continua, allora F è derivabile. Calcoliamo il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{(3x^4)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + \sin(x^7)x^2}{12x^3} = \frac{2}{3}$$

Il limite del rapporto delle derivate esiste, quindi per il teorema di de l'Hopital, il limite dato ha valore $2/3$.



Il seguente teorema collega l'integrazione definita con l'integrazione indefinita.

Teorema. Sia f continua su $[a, b]$ e sia G una primitiva di f su $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Dim. Sia $F(x)$ la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Poichè $F(a) = 0$, si ha $F(x) = F(x) - F(a)$, $\forall x \in [a, b]$, e quindi

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a).$$

Ora sia G una primitiva qualsiasi, ricordiamo che $G(x) = F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = (G(b) - c) - (G(a) - c) = G(b) - G(a)$$

Oss. Più in generale, se G è una primitiva di f possiamo scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$$

Oss. Se $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, e f è continua, ricordiamo per il teorema fondamentale del calcolo integrale che $F'(x) = f(x)$, ovvero

$$F(x) = F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x F'(t)dt$$

o equivalentemente

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt$$

Regole di integrazione

Integrazione per parti

Se $f, g \in C^1([a, b])$, allora

$$\int_a^b f'g = fg \Big|_a^b - \int_a^b fg'$$

Integrazione per sostituzione

Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$. Sia $f(y)$ continua su $[a, b]$ e sia $F(y)$ una sua primitiva. Allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)dy$$

Se φ è biettiva, allora si ha anche

$$\int_a^b f(y)dy = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

Teorema. Sia $a \in \mathbb{R}^+$ e sia f integrabile su $[-a, a]$.

Se f è pari, allora $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Se f è dispari, allora $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Riferimenti bibliografici

Canuto, Tabacco. Cap 9.3, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9