Funzioni integrabili non elementarmente

Alcune funzioni sono integrabili in senso indefinito, cioè sono la derivata di una primitiva, ma la loro primitiva non è esprimibile in termini di funzioni elementari. Diciamo allora che queste funzioni sono integrabili ma non elementarmente .

Esempi:

$$\frac{\sin(x)}{x}, \ \frac{\cos(x)}{x}, \ \frac{e^x}{x}, \ e^{x^2}, \ e^{-x^2}, \ \frac{\log x}{1+x}, \ \cos(x^2), \ \sin(x^2), \ \frac{\cos(x)}{x^2}, \ \frac{\sin(x)}{x^2}$$

sono tutte funzioni integrabili non elementarmente, non possiamo scrivere le loro primitive in termini di funzioni elementari, ma possiamo scrivere la funzione integrale associata, che è una primitiva:

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo contenuto nel dominio di f. Scelto $x_0 \in I$, una primitiva di f è

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in I.$$

Esempio.

$f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$. Esprimo una qualsiasi primitiva di f come funzione integrale.

Possiamo prendere $x_0 = 1/2 (\neq 0)$. Una primitiva di f è

$$F(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Non aggiungo la costante dell'integrazione indefinita perchè questo è un integrale definito e la scelta del punto $x_0 = 1/2$ fissa una e una sola tra tutte le primitive possibili: quella che in $x = 1/2$ vale 0.