

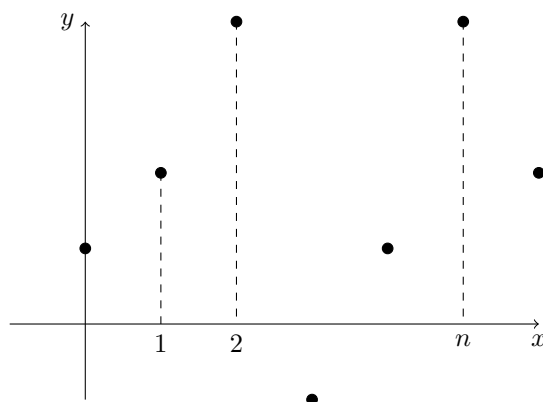
3.1 Successioni

Diciamo **successione** di numeri reali ogni funzione da \mathbb{N} in \mathbb{R}

$$\begin{aligned} a &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto a(n). \end{aligned}$$

Si scrive solitamente a_n al posto di $a(n)$ e si indica la successione con i simboli $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Da un punto di vista geometrico, essendo una successione una particolare funzione, il grafico associato è composto di una quantità infinita di punti.



Un'altra utile rappresentazione geometrica di una successione consiste nel pensarla come un insieme di punti

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \dots\}$$

in \mathbb{R} indicizzati dall'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali.



2. Essendo delle funzioni speciali, possiamo particolareggiare alle successioni molte nozioni introdotte in precedenza. Ad esempio si dice che una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è **limitata** se esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq M.$$

Geometricamente, ciò significa che l'insieme dei punti della successione è contenuta nell'intervallo limitato $[-M, M]$. Una successione si dice **monotona crescente** se per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq a_{n+1}$$

e si dice **monotona decrescente** se per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geq a_{n+1}.$$

Geometricamente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente se al crescere di n i punti della successione si spostano a destra (eventualmente rimanendo fermi) sulla retta reale. Similmente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente se al crescere di n i punti della successione si spostano a sinistra (eventualmente rimanendo fermi) sulla retta reale.

3. La teoria dei limiti può applicarsi alle successioni per n tendente a $+\infty$: infatti $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione di \mathbb{N} . Si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

essendo chiaro che l'infinito menzionato è quello positivo. Si usa la seguente nomenclatura.

Definizione 3.1. *Si dice che la successione di numeri reali $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$*

- (a) **converge** se esiste finito $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;
- (b) **diverge positivamente** se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;
- (c) **diverge negativamente** se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$;
- (d) **oscilla** se non esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ si scrive spesso

$$a_n \rightarrow a.$$

Esempio 3.2. In base al limite notevole, sappiamo ad esempio che è convergente la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e precisamente essa converge ad e per $n \rightarrow \infty$. Esempi di successioni divergenti sono

$$a_n = n^2 \quad \text{e} \quad b_n = -n^3.$$

Un esempio di successione oscillante è invece $a_n = (-1)^n$.

4. Valgono per le successioni tutti i concetti e le proprietà visti in precedenza nella teoria dei limiti per funzioni di variabile reale: ad esempio valgono i risultati sulla somma ed il prodotto dei limiti, i teoremi del confronto, i teoremi di esistenza dei limiti per successioni monotone e così via. In particolare vale la seguente proposizione.

Lemma 3.3. *Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente. Allora $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata.*

Dimostrazione. Per il teorema di locale limitatezza, esistono $M > 0$ ed un intorno U di $+\infty$ tale che per ogni $n \in U$

$$|a_n| \leq M.$$

Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $]N, +\infty] \subseteq U$: dunque per $n > N$ si ha $|a_n| \leq M$. Poniamo

$$\widetilde{M} = \max \{M, |a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|\}.$$

Allora si ha per ogni n

$$|a_n| \leq \widetilde{M}$$

cioè la successione è limitata. La dimostrazione è completa. ■

5. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione. Consideriamo una successione di numeri naturali $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ e la successione

$$\{a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}\}.$$

La nuova successione $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è detta una **sottosuccessione** della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ad esempio data la successione

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

la successione

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$$

è la sottosuccessione ottenuta considerando solo gli indici pari. Geometricamente, una sottosuccessione di una successione data è semplicemente un suo campionamento.

È chiaro che se una successione è convergente a $l \in \mathbb{R}$, allora ogni sua sottosuccessione converge ancora ad l . Se la successione diverge, ogni sua sottosuccessione è divergente. Se invece una successione è oscillante, potrebbero esistere sottosuccessioni convergenti: questo è il caso ad esempio di

$$a_n = (-1)^n.$$

Si ha che la successione non converge, ma risultano convergenti le sottosuccessioni date dagli indici pari e dispari. Infatti la prima converge a 1 mentre la seconda a -1 .

Teorema 3.4 (Teorema di Bolzano-Weierstrass). *Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora essa ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Per ipotesi, si ha $a_n \in I = [-M, M]$ con $M > 0$ opportuno. Poniamo $I_0 = I$ e $n_0 = 0$. Dividiamo I_0 in due intervalli chiusi di uguale ampiezza: almeno uno dei due intervalli, diciamolo I_1 , contiene infiniti elementi della successione. Sia n_1 un

indice tale che $a_{n_1} \in I_1$. Dividiamo I_1 in due sottointervalli chiusi di ugual ampiezza: almeno uno dei due, diciamolo I_2 contiene infiniti elementi della successione. Sia $n_2 > n_1$ tale che $a_{n_2} \in I_2$. Proseguiamo in questo modo costruendo

$$I_1 \supset I_2 \cdots \supset I_k \supset \dots$$

famiglia di intervalli chiusi inclusi uno nel successivo ed individuando

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

indici tali che $a_{n_k} \in I_k$. Notiamo che I_k è un intervallo di ampiezza $(2M)/2^k$ e che $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_{n_k} \in I_k$ per ogni k .

Per il principio degli intervalli inclusi di Cantor, esiste $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$. Essendo

$$|a_{n_k} - x_0| \leq \frac{2M}{2^k}$$

ricaviamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k} - x_0| = 0$$

cioè $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $x_0 \in I$. La tesi è dunque dimostrata. ■

6. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 3.5 (Successione di Cauchy). Diciamo che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq N$ e $n \geq N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 3.6. Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.

Dimostrazione. Sia $a_n \rightarrow x_0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che per ogni $n \geq N$

$$|a_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se dunque $n, m \geq N$ si ha

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - x_0| + |x_0 - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

cioè la successione è di Cauchy.

Viceversa, sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Innanzitutto $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata. Infatti, fissando $\varepsilon = 1$, troviamo N tale che per $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| \leq 1.$$

Dunque in particolare per $n \geq N$

$$|a_n - a_N| \leq 1.$$

Sia $I = [-M, M]$ così grande da contenere a_0, a_1, \dots, a_N e l'intervallo centrato in a_N e di raggio 1: la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è allora tutta contenuta in I e pertanto risulta limitata.

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $x_0 \in \mathbb{R}$. Vediamo che tutta la successione converge a x_0 . Essendo la successione di Cauchy, dato $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che per $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esiste inoltre $K > 0$ con $n_K \geq N$ e tale che per $k \geq K$

$$|a_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora per $n \geq N$ abbiamo

$$|a_n - x_0| \leq |a_n - a_{n_K}| + |a_{n_K} - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

cioè $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0 . ■

7. Le nozioni di estremi superiore/inferiore e di punti di accumulazione per un insieme possono riformularsi in termini di successioni.

Lemma 3.7. *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Valgono i seguenti fatti.*

- (a) $x_0 = \sup E$ se e solo se x_0 è un maggiorante per E e se esiste $a_n \in E$ con $a_n \rightarrow x_0$.
- (b) $x_0 = \inf E$ se e solo se x_0 è un minorante per E e se esiste $a_n \in E$ con $a_n \rightarrow x_0$.

Dimostrazione. Vediamo il punto (a) nel caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$, gli altri casi essendo del tutto simili. Supponiamo che $x_0 = \sup E$. Allora x_0 è maggiorante per E . Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $a_n \in E$ tale che

$$x_0 - \frac{1}{n+1} < a_n.$$

Essendo $a_n \leq x_0$, ricaviamo per confronto che $a_n \rightarrow x_0$.

Supponiamo viceversa che x_0 sia un maggiorante per E e che esista $a_n \in E$ con $a_n \rightarrow x_0$. Per ogni $\varepsilon > 0$, si ha per n sufficientemente grande

$$x_0 - \varepsilon < a_n.$$

Dunque, grazie alla caratterizzazione del sup di un insieme, deduciamo $x_0 = \sup E$.

■

Lemma 3.8. *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora x_0 è di accumulazione per E se e solo se esiste $a_n \in E$ con $a_n \neq x_0$ e $a_n \rightarrow x_0$.*

Dimostrazione. Trattiamo il caso $x_0 \in \mathbb{R}$, i casi $x_0 = \pm\infty$ essendo analoghi. Sia x_0 di accumulazione per E . Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\left] -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right[\cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Detto a_n un elemento di tale intersezione, $a_n \neq x_0$ e $a_n \rightarrow x_0$.

Supponiamo viceversa che esista $a_n \in E$ con $a_n \neq x_0$ e $a_n \rightarrow x_0$. Allora per ogni $\delta > 0$ si ha per n grande

$$x_0 - \delta < a_n < x_0 + \delta$$

così che

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset,$$

cioè x_0 è di accumulazione per E . ■

8. Le successioni sono utili anche nello studio dei limiti per funzioni di variabile reale. Se f ammette limite l per $x \rightarrow x_0$, allora si ha che $f(x)$ risulta sempre più prossimo a l al tendere di x a x_0 . Dunque se $a_n \in E$, $a_n \neq x_0$ e $a_n \rightarrow x_0$, si ha che $f(a_n)$ approssima sempre più l , cioè

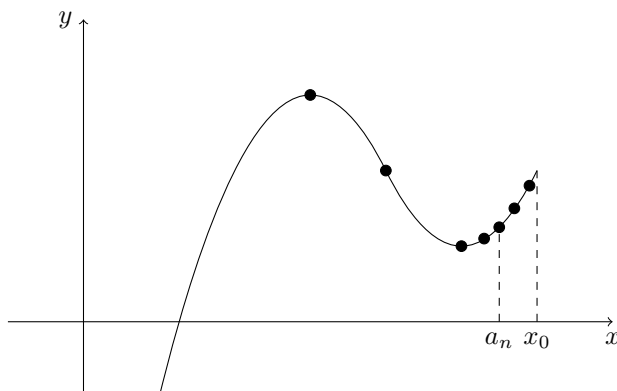
$$f(a_n) \rightarrow l.$$

Viceversa, se lungo ogni successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n \in E$, $a_n \neq x_0$ e $a_n \rightarrow x_0$, si ha $f(a_n) \rightarrow l$, allora indipendentemente dal modo in cui ci si avvicina a x_0 il valore di f si stabilizza a l . Dunque il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ esiste e vale l .

Otteniamo dunque il seguente risultato.

Proposizione 3.9 (Limiti di funzione e successioni). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per E . Allora f ammette limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a x_0 se e solo se per ogni successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendente a x_0 con $a_n \in E$ e $a_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$f(a_n) \rightarrow l.$$



9. La proposizione precedente fornisce un metodo per verificare che il limite di una funzione non esiste: basta trovare due successioni tendenti a x_0 lungo cui f converge a due limiti diversi. Ad esempio, possiamo vedere che le funzioni seno e coseno non ammettono limite per $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$. Infatti si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos((2n+1)\pi) = -1.$$

Esistendo due successioni diverse che tendono $+\infty$ lungo le quali la funzione coseno ammette limiti diversi, concludiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ non esiste.

3.2 Teoremi sulle funzioni continue

In questa sezione dimostriamo alcuni teoremi fondamentali sulle funzioni che dipendono solo dalla continuità e non dalla loro forma analitica specifica.

1. Iniziamo con il seguente teorema.

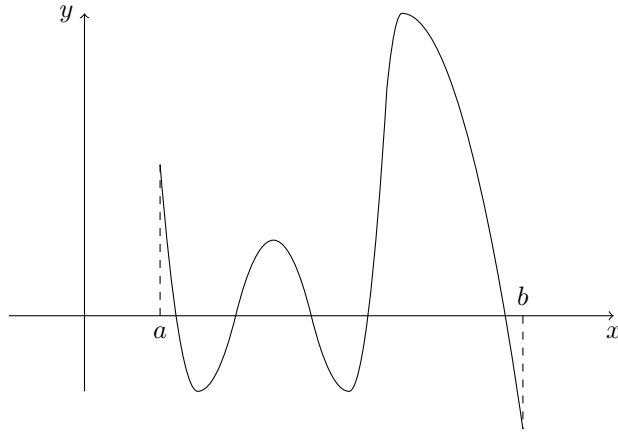
Teorema 3.10 (Teorema degli zeri). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Per la continuità di f e per il teorema della permanenza del segno, esiste $\varepsilon > 0$ tale che f è positiva su $[a, a + \varepsilon]$ e negativa su $[b - \varepsilon, b]$. Consideriamo l'insieme

$$E := \{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\}.$$

Notiamo che E è non vuoto essendo $a \in E$ e che $b - \varepsilon$ è un maggiorante per E . Sia $x_0 := \sup E$. Chiaramente $x_0 \in]a, b[$. Vediamo che $f(x_0) = 0$. Infatti, essendo per n grande $x_0 + \frac{1}{n} \in]a, b[\setminus E$ si ha, grazie alla continuità di f ,

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \leq 0.$$



D'altro canto, essendo $x_0 = \sup E$, esiste $a_n \in E$ con $a_n \rightarrow x_0$: si ha allora

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq 0.$$

Dunque $f(x_0) = 0$ e la tesi è dimostrata. ■

2. Come corollario abbiamo il seguente risultato.

Teorema 3.11 (Teorema dei valori intermedi). *Siano I un intervallo in \mathbb{R} e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$. In particolare $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Se $\inf_I f = \sup_I f$, allora f è costante su I e non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora $\inf_I f < \sup_I f$ e sia $k \in]\inf_I f, \sup_I f[$. Per definizione di sup e inf esistono $a, b \in I$ tali che

$$f(a) < k < f(b).$$

Possiamo supporre $a < b$ (il caso $b > a$ essendo simile). Consideriamo la funzione continua $g(x) = f(x) - k$ ristretta all'intervallo $[a, b] \subseteq I$. Notiamo che $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$: dunque per il teorema degli zeri esiste $c \in]a, b[$ tale che $g(c) = 0$. Ma allora si ha $f(c) = k$, cioè k è un valore assunto da f su I .

Concludiamo che $f(I)$ è uguale ad uno dei seguenti intervalli

$$] \inf_I f, \sup_I f[, \quad [\inf_I f, \sup_I f[, \quad] \inf_I f, \sup_I f], \quad [\inf_I f, \sup_I f].$$

Il teorema è dunque dimostrato. ■

Vediamo ora una conseguenza di natura algebrica del teorema dei valori intermedi.

Proposizione 3.12. *Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado dispari. Allora $p(x)$ ammette almeno una radice.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $p(x) = x^{2k+1} + a_1x^{2k} + \dots + a_{2k}x + a_{2k+1}$, con $k \geq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$. Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

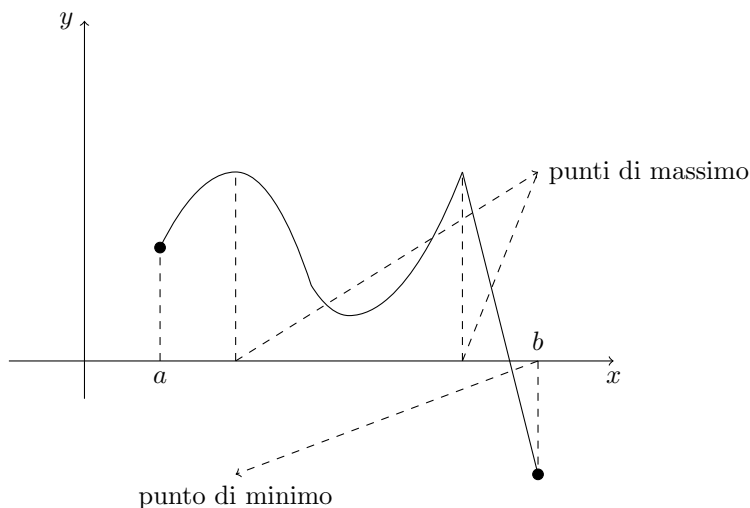
Concludiamo che

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} p(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} p(x) = +\infty.$$

Essendo $p(x)$ una funzione continua, per il teorema dei valori intermedi esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(x_0) = 0$, così che la dimostrazione è conclusa. ■

3. Il seguente teorema si occupa del massimo e del minimo di funzioni continue.

Teorema 3.13 (Teorema di Weierstrass). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo su $[a, b]$.*



Dimostrazione. Vediamo l'esistenza del punto di massimo, il ragionamento per il minimo essendo del tutto simile. Consideriamo l'insieme non vuoto

$$D = f([a, b])$$

e sia $M = \sup D$. Sappiamo che esiste $a_n \in D$ con $a_n \rightarrow M$. Per definizione di D esiste $x_n \in [a, b]$ tale che $a_n = f(x_n)$. Grazie al teorema di Bolzano-Weierstrass,

esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $c \in [a, b]$. Vediamo che c è un punto di massimo per f . Poiché per la continuità di f

$$f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}),$$

deduciamo che

$$M = f(c).$$

Dunque, essendo $M = \sup D$, si ha $f(x) \leq f(c)$ per ogni $x \in [a, b]$, cioè c è un punto di massimo per f . ■

4. Combinando il teorema dei valori intermedi con il teorema di Weierstrass, possiamo dire che ogni funzione continua f definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il suo minimo ed il suo massimo, cioè

$$f([a, b]) = [\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f].$$

3.3 Continuità uniforme

In questa sezione ci occuperemo dei concetti di continuità uniforme e di lipschitzianità di una funzione.

1. Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $x_0 \in E$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap E : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

In termini analitici, come sappiamo, ciò significa che se $x \in E$ dista da x_0 meno di δ , allora $f(x)$ dista da $f(x_0)$ meno di ε . Tale δ risulta a priori dipendente da x_0 : potrebbe risultare che, considerando $\tilde{x}_0 \in E$ diverso da x_0 , non sia più vero che se $x \in E$ dista da \tilde{x}_0 meno di δ , allora $f(x)$ dista da $f(\tilde{x}_0)$ meno di ε .

Esempio 3.14. Consideriamo la funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$. Seguendo la definizione di continuità in $x_0 = 0$, si ha che in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ si può scegliere $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Tale valore di δ non va però bene se $\tilde{x}_0 = n$ con $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande: si ha infatti che se

$$x = n + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

si ha

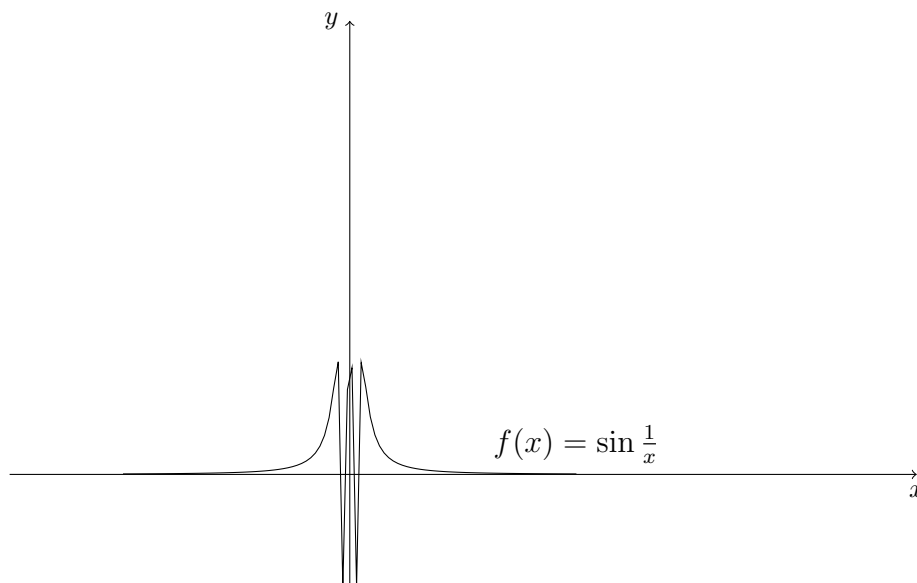
$$|f(x) - f(x_0)| = \left(n + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right)^2 - n^2 = n\sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4} > n\sqrt{\varepsilon} \rightarrow +\infty.$$

Esempio 3.15. Consideriamo la funzione continua $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

Sia δ il valore corrispondente a $\varepsilon < 1$ nel punto $x_0 = 1$. Chiaramente tale δ non va bene per i punti $\tilde{x}_0 \in]0, \delta[$ in cui $g(\tilde{x}_0) = 1$, dal momento che esiste $x \in]0, \delta[$ tale che $g(x) = -1$, così che

$$|g(x) - g(\tilde{x}_0)| = 2 > \varepsilon.$$



2. Le funzioni continue per cui δ corrispondente a ε per un punto $x_0 \in E$ va bene anche per tutti gli altri i punti di E si dicono uniformemente continue.

Definizione 3.16 (Continuità uniforme). Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è **uniformemente continua** su E se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, x_0 \in E$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Chiaramente una funzione uniformemente continua su E è anche continua su E . Il viceversa non è vero come mostrano i controesempi sopra illustrati. Vale però il seguente risultato.

Teorema 3.17 (Teorema di Heine). Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua su $[a, b]$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo: supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistano $x, z \in [a, b]$ con $|x - z| < \delta$ ma $|f(x) - f(z)| > \varepsilon$. Consideriamo δ

della forma $\delta = \frac{1}{n+1}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $x_n, z_n \in [a, b]$ con $|x_n - z_n| < \frac{1}{n+1}$ ma $|f(x_n) - f(z_n)| > \varepsilon$.

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esistono $c \in [a, b]$ e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sottosuccessione di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow c$. Poiché

$$|z_{n_k} - c| \leq |z_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| \leq \frac{1}{n_k + 1} + |x_{n_k} - c|,$$

deduciamo che $z_{n_k} \rightarrow c$. Possiamo dunque scrivere grazie alla continuità di f

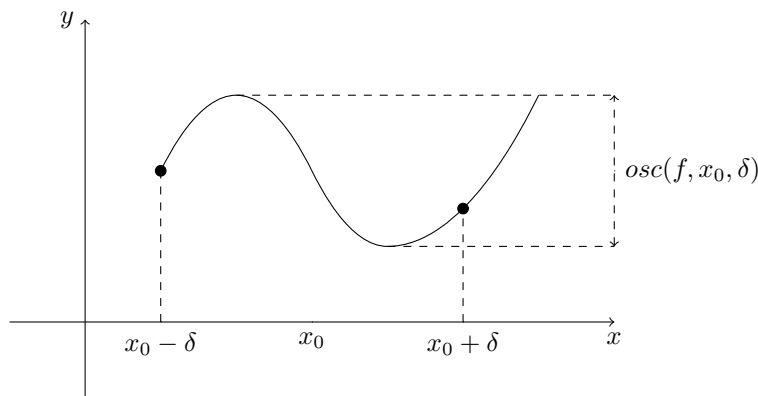
$$\varepsilon < \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(z_{n_k})| = |f(c) - f(c)| = 0$$

che è assurdo. La tesi è dunque dimostrata. ■

3. Possiamo interpretare geometricamente la nozione di continuità uniforme in termini di *oscillazione di una funzione*. Siano $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in E$ e $\delta > 0$: poniamo

$$\text{osc}(f, x_0, \delta) := \sup_{E \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[} f - \inf_{E \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[} f.$$

Diciamo $\text{osc}(f, x_0, \delta)$ l'oscillazione di f sull'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.



Possiamo dunque dire che se $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua, allora per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ tale che per ogni $x_0 \in E$ si abbia

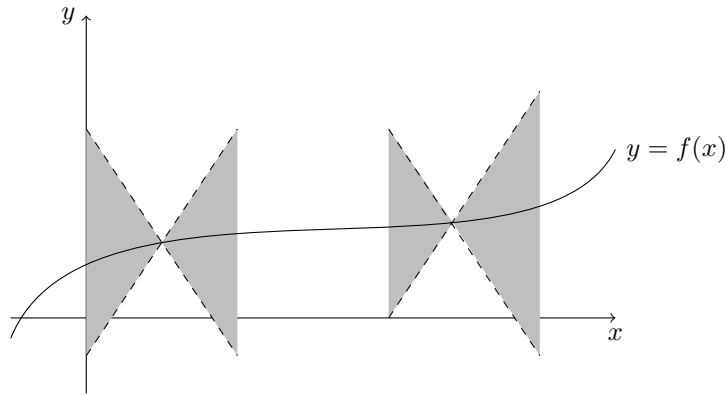
$$\text{osc}(f, x_0, \delta) \leq \varepsilon.$$

Dunque l'oscillazione di f su tutti gli intervalli di ampiezza δ e centrati in punti di E risulta minore o uguale a ε .

4. Una classe importante di funzioni che sono uniformemente continue è quella delle funzioni lipschitziane.

Definizione 3.18 (Funzione lipschitziana). Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è lipschitziana su E di costante $L > 0$ se per ogni $x_1, x_2 \in E$ si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$



Se f è lipschitziana di costante $L > 0$ e $x_0 \in E$, per ogni $x \in E$ si ha

$$f(x_0) - L|x - x_0| \leq f(x) \leq f(x_0) + L|x - x_0|.$$

Geometricamente ciò significa che il grafico di f si trova tra i due “coni” determinati dalle spezzate $y = f(x_0) + L|x - x_0|$ e $y = f(x_0) - L|x - x_0|$ con vertice in x_0 .

Esempio 3.19. Risulta lipschitziana di costante 7 la funzione affine $f(x) = 7x + 5$. Infatti

$$|f(x) - f(x')| = |7x + 5 - 7x' - 5| = 7|x - x'|.$$

Il seguente risultato lega lipschitzianità ed uniforme continuità.

Proposizione 3.20. Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora f è uniformemente continua su E .

Dimostrazione. Sia $L > 0$ la costante di Lipschitz di f . Dato $\varepsilon > 0$, scegliendo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ si ha per $x, x_0 \in E$ con $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

La tesi è dunque dimostrata. ■

Esercizi

1. Dimostrare la continuità della funzione radice n -esima usando la sua monotonia.
2. Dimostrare che se $E \subseteq \mathbb{R}$ ha infiniti elementi, allora E ammette almeno un punto di accumulazione.
3. Siano $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per E e $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Dimostrare che per ogni intorno V di l si ha $V \cap f(E) \neq \emptyset$. Trovare un esempio in cui l non è di accumulazione per $f(E)$.
4. Trovare una coppia di funzioni $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tali che la somma ammette limite per $x \rightarrow x_0$ ma tali che i limiti di f e g prese singolarmente non esistono. Stessa cosa poi per il prodotto.
5. Trovare una coppia di funzioni $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ componibili e tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) \neq \lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} g(y).$$

6. Trovare un esempio di funzioni $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ con $f < g$ su E tali che esiste x_0 di accumulazione per E con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
7. Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$.
8. Dimostrare che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è l'estremo superiore di f su E se e solo se
 - (a) per ogni $x \in E$ si ha $f(x) \leq l$;
 - (b) per ogni $l' < l$ esiste $x \in E$ tale che $l' < f(x)$.

Dimostrare similmente che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è l'estremo inferiore di f su E se e solo se

- (a) per ogni $x \in E$ si ha $l \leq f(x)$;
- (b) per ogni $l' > l$ esiste $x \in E$ tale che $f(x) < l'$.

9. Siano $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f < g$ su E . Dimostrare che

$$\inf_E f \leq \inf_E g \quad \text{e} \quad \sup_E f \leq \sup_E g.$$

Mostrare con esempi che le precedenti relazioni possono valere con il segno dell'uguaglianza.

10. Siano $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Dimostrare che

$$\inf_E f + \inf_E g \leq \inf_E (f + g) \quad \text{e} \quad \sup_E (f + g) \leq \sup_E f + \sup_E g.$$

Mostrare con esempi che le precedenti relazioni possono valere con il segno di disuguaglianza stretta.

11. Siano I un intervallo e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona. Dimostrare che l'insieme dei punti in cui f non è continua è al più numerabile. (*Suggerimento:* fissato $n > 0$, mostrare che l'insieme dei punti E_n in cui il salto è maggiore di $1/n$ è finito; concludere notando che l'insieme di discontinuità è dato da $\cup_n E_n$).

12. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per E se e solo se esiste una successione (a_n) tale che $a_n \in E$, $a_n \neq x_0$ e $a_n \rightarrow x_0$.
13. Siano $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$. Dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se per ogni successione (a_n) tale che $a_n \in E$ e $a_n \rightarrow x_0$ si ha $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$.
14. Diciamo sottosuccessione di una successione (a_n) ogni successione della forma (a_{n_k}) , dove $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Dimostrare che una successione ammette limite $l \in \mathbb{R}$ se e solo se ogni sua sottosuccessione converge a l .
15. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ che soddisfa la proprietà

$$\sup_{U \cap [a, b]} f = \sup_{[a, b]} f$$

per ogni intorno U di x_0 . Tale punto è detto *un punto di Weierstrass di f* . Dimostrare inoltre che se f è continua in x_0 , allora x_0 è un punto di massimo di f .

16. Dimostrare che la funzione $x \rightarrow \sqrt{x}$ non è lipschitziana su $[0, 1]$.
17. Dimostrare che per ogni $L > 0$ esiste un intervallo I tale per cui la funzione $x \mapsto x^2$ non è lipschitziana di costante L .