Capitolo 5

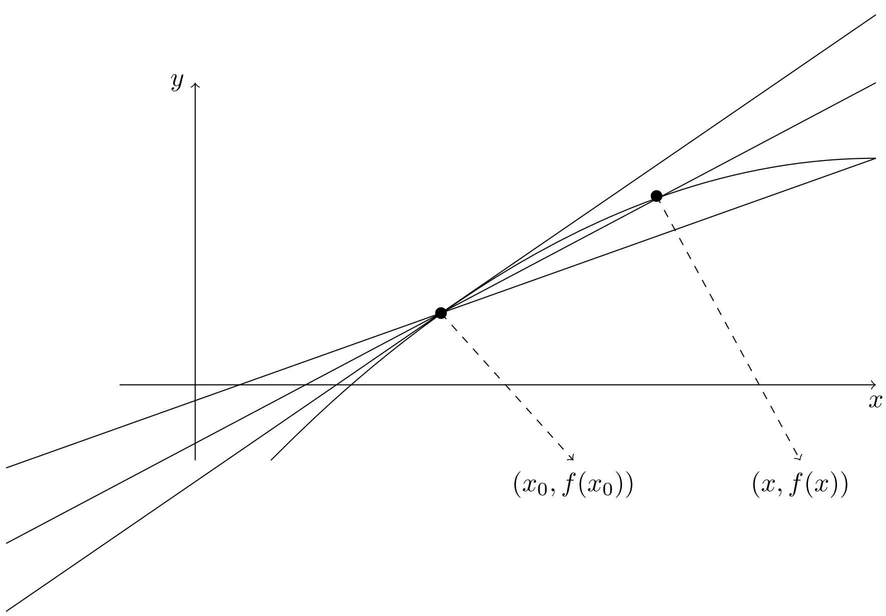
Derivate

In questo capitolo introdurremo la nozione di derivata di una funzione e ne studieremo le proprietà analitiche e geometriche.

5.1 Motivazioni

Descriviamo brevemente due problemi che sono di motivazione per l'introduzione del concetto di derivata di una funzione in un punto: il primo problema è di natura geometrica, mentre il secondo è di natura fisica.

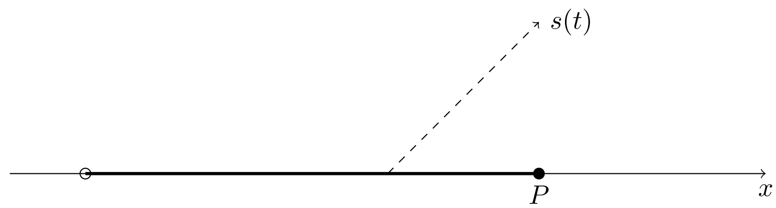
1. **La retta tangente al grafico di una funzione.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $x_0 \in]a, b[$.



Consideriamo la retta r congiungente i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ sul grafico di f. Al tendere di x a x_0, tale retta si approssima sempre più alla retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. In particolare, il coefficiente angolare m della retta tangente si otterrà come limite del coefficiente angolare della retta r al tendere di x a x_0: dunque possiamo scrivere

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. **La velocità di un punto in movimento.** Consideriamo sulla retta reale un punto P in movimento. Sia $s(t)$ la sua posizione rispetto all'origine al tempo t.



Fissato il tempo t_0, la quantità

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

può essere interpretata come la velocità media del punto P sull'intervallo di tempo $[t_0, t]$. Se t tende a t_0, la velocità media approssimerà la *velocità istantanea* di P al tempo t_0: dunque possiamo scrivere

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

3. I due problemi sopra esposti, seppur di natura totalmente diversa, portano a considerare la quantità

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

detta **rapporto incrementale di f in x_0**. In particolare, si è interessati al suo limite per $x \to x_0$.

5.2 Definizione di derivata e prime proprietà

1. Introduciamo la definizione precisa di derivata di una funzione in un punto.

Definizione 5.1 (Derivata in un punto). *Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Diciamo che f è* **derivabile** *in x_0 se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tale limite è detto la **derivata prima di f in x_0**.

Useremo la notazione

$$f'(x_0) \qquad \text{o} \qquad Df(x_0)$$

per indicare la derivata prima di f in x_0.

Ponendo $x - x_0 = h$, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e questa scrittura verrà spesso usata nel seguito.

Poniamo la seguente definizione.

Definizione 5.2 (Funzioni derivabili e derivata prima). *Siano I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f è derivabile su I se ammette derivata in ogni punto di I. La funzione $f' : I \to \mathbb{R}$ è detta la funzione* **derivata prima di** f.

Notiamo che la definizione di derivabilità può essere estesa al caso in cui I sia unione di intervalli aperti, intendendo che f sia derivabile su ognuno di essi.

2. In base a quanto detto nella sezione precedente, se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, la cui equazione è dunque

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Notiamo che se f è derivabile in x_0, possiamo scrivere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Geometricamente, tale relazione significa che il grafico $y = f(x)$ di f è ben approssimato dalla retta tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ vicino a x_0: infatti la distanza tra i due grafici in x data (a meno del segno) da

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

è molto più piccola della distanza $x - x_0$, tendendo il loro rapporto a zero. Dunque al *primo ordine* in x_0, **il grafico di f è approssimato da quello della retta tangente**.

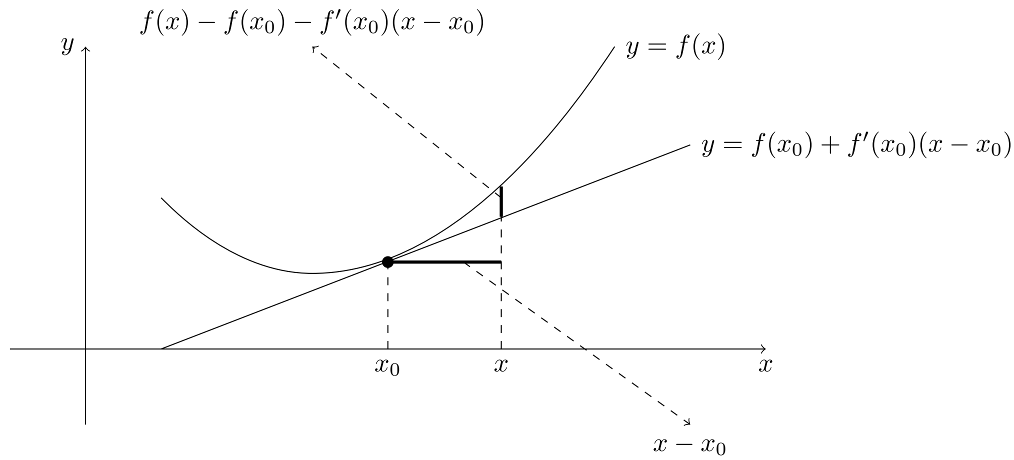
Analiticamente, possiamo scrivere

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + e(x)(x - x_0)$$

dove $\lim_{x \to x_0} e(x) = e(x_0) = 0$. Dunque, la formula analitica di f vicino a x_0 può essere approssimata tramite un polinomio di primo grado. Ad esempio si ha

$$x^3 = 1 + 3(x - 1) + e(x)(x - 1)$$

essendo, come vedremo tra poco, $(x^3)' = 3x^2$.



3. La derivata seconda di una funzione è definita, se esiste, come la derivata di f'. In questo modo poi si definiscono le derivate di ordine superiore.

   Definizione 5.3 (Derivate di ordine superiore). *Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Diciamo che f è derivabile n-volte in x_0 se f è derivabile $(n-1)$-volte in I e se la sua derivata di ordine $(n-1)$ è derivabile in x_0.*

   Useremo la notazione
   $$f^{(n)}(x_0) \qquad \text{o} \qquad D^n f(x_0)$$
   per indicare la derivata n-esima di f in x_0. Notiamo che la definizione di derivabilità di ordine n può essere estesa al caso in cui I sia unione di intervalli aperti, intendendo che f sia derivabile all'ordine n su ognuno di essi.

4. Spendiamo due parole sulle notazioni per il calcolo delle derivate introdotte da Newton e Leibnitz, a cui si attribuisce l'invenzione del calcolo infinitesimale. Leibinitz usò per le derivate i simboli
   $$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^n f}{dx^n}.$$
   La motivazione di tale notazione è di natura geometrica. Notiamo che detti $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$ gli incrementi che compaiono nel rapporto incrementale che definisce la derivata in un punto, si ha
   $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$
   Leibnitz introdusse la notazione
   $$f' = \frac{df}{dx}$$

pensando al fatto che per $x \to x_0$ gli incrementi Δf e Δx divenissero *infinitesimi*. Tale notazione è usata spesso in analisi matematica, anche perché rende molto intuitive delle regole di calcolo per le derivate. Alla scrittura viene dato però solo un valore formale, cioè non si pensa a df e dx come ad effettivi numeri evanescenti che risulterebbero difficili da definire.

Newton usò invece per le derivate i simboli

$$\dot{f}, \quad \ddot{f}, \quad \dddot{f}, \ldots$$

usando cioè dei punti sopra la f in numero pari all'ordine della derivata in questione. Tale notazione è usata spesso dai fisici, soprattutto se la variabile indipendente ha il significato fisico di tempo.

5. Verifichiamo la derivabilità di due funzioni molto semplici: le funzioni costanti e la funzione identità . A partire da esse, ed usando le regole di derivazione che esporremo più avanti, si ricavano le derivate di molte altre funzioni elementari.

Lemma 5.4. *Le funzioni costanti sono derivabili e hanno derivata nulla. La funzione identica $f(x) = x$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1$.*

Dimostrazione. Sia $f(x) = c$ una funzione costante: si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

Consideriamo la funzione identica: allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

■

6. Un'immediata ma importante conseguenza della derivabilità in un punto è la continuità della funzione nel punto in questione.

Teorema 5.5. *Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Per vedere la continuità di f in x_0, essendo x_0 d'accumulazione per I, basta vedere che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Notiamo che possiamo scrivere per $x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

■

Notiamo che l'implicazione inversa non è vera: ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = |x|$ è continua in $x = 0$, ma non ammette derivata dal momento che il limite

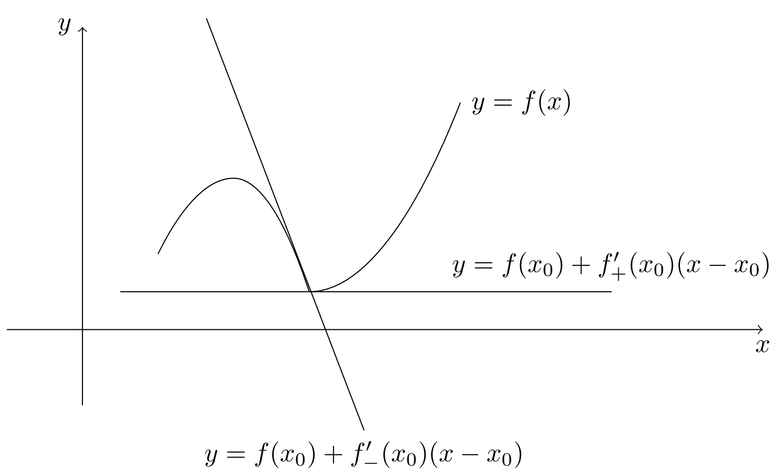
$$\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

non esiste. Esistono anche funzioni continue su intervalli aperti che non sono derivabili in nessun punto: il primo esempio è dovuto a Weierstrass.

7. Nel caso esistano finiti, diremo i seguenti limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

le **derivate destra e sinistra di f in x_0**. Esse si indicano con i simboli $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$. Se esse coincidono, allora f è derivabile in x_0 ed il loro valore comune è la derivata di f in x_0.

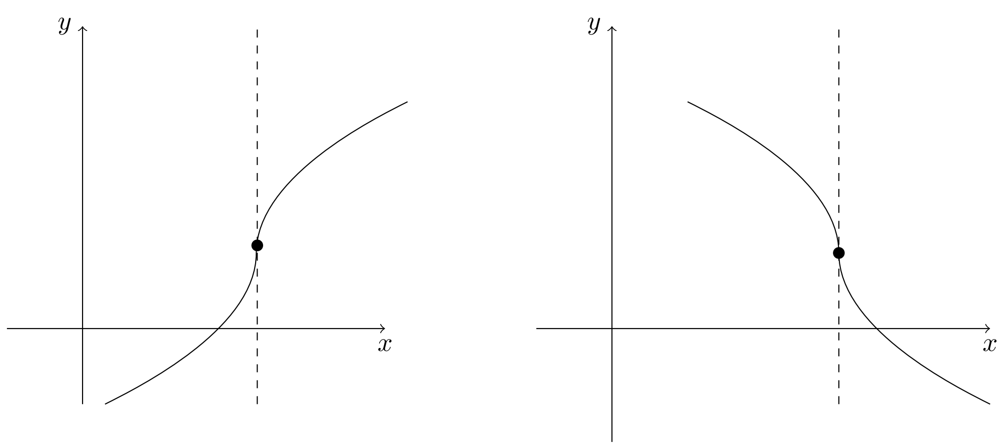


Se$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, abbiamo che f non è derivabile in x_0. Geometricamente si ha che il grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ ammette "due tangenti", una per il ramo a destra di x_0 di coefficiente angolare $f'_+(x_0)$ ed una per il ramo a sinistra di x_0 di coefficiente angolare $f'_-(x_0)$. Si dice che x_0 è un **punto angoloso** per f.

Grazie ai concetti di derivata destra e sinistra, possiamo estendere il concetto di derivabilità alle funzioni definite su intervalli chiusi del tipo $[a, b]$ ad esempio: dicendo che f è derivabile su $[a,b]$ si intende che f è derivabile nel senso usuale su $]a,b[$, mentre ammette derivate destra e sinistra in a e b rispettivamente.

8. Se il limite del rapporto incrementale esiste ma infinito, a norma della definizione la funzione non è derivabile in x_0. Nonostante ciò , l'informazione sul limite può essere utilizzata per trarre informazioni sulla tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

   Se
   $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty,$$
   allora la retta per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ tende a diventare verticale per x tendente a x_0: dunque x_0 si dice un **punto a tangente verticale**. Può capitare anche che solo uno tra i rami destro e sinistro ammetta tangente verticale, se ad esempio il limite del rapporto incrementale da destra vale $+\infty$ mentre da sinistra è finito.

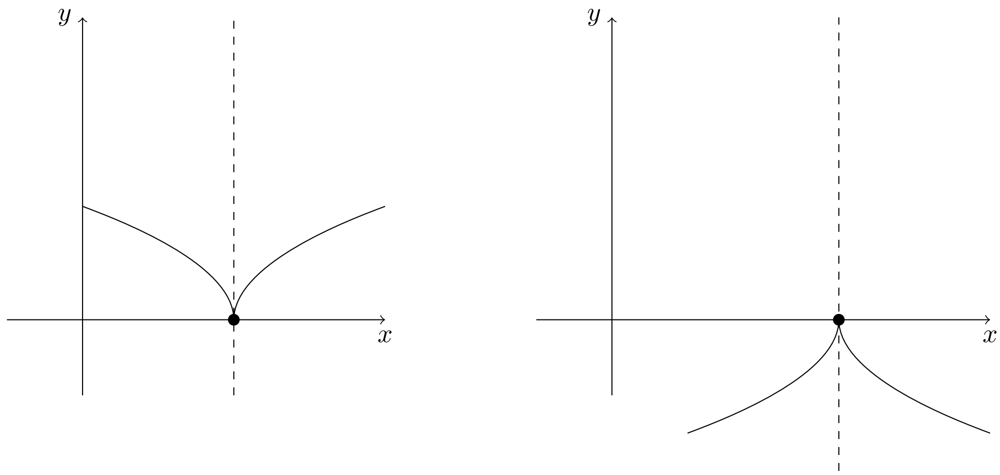


   Se
   $$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty,$$
   o
   $$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty,$$
   allora si dice che x_0 è una **cuspide** per f.

5.3 Regole di derivazione

In questa sezione ci occupiamo del rapporto tra l'operazione di derivata e le operazioni di somma, prodotto, quoziente, composizione ed inversa di funzioni.

1. Iniziamo con le operazioni di somma, prodotto e quoziente.



Teorema 5.6 (**Derivata di somme, prodotti e quozienti**). *Siano I un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0. Valgono i seguenti fatti.*

(a) La somma $f+g$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(b) Il prodotto fg è derivabile in x_0 e si ha

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(c) Sia $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Allora il quoziente f/g è derivabile in x_0 e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione.

(a) Consideriamo il rapporto incrementale di $(f+g)$ in x_0: si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

Avendosi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0) \in \mathbb{R},$$

si ha per il teorema della somma dei limiti che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

così che la tesi è dimostrata.

(b) Il rapporto incrementale di fg in x_0 può riscriversi nella forma

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

Prendendo il limite per $x \to x_0$, utilizzando le proprietà sulle somme e prodotti di limiti ed il fatto che g è continua in x_0 (dal momento che è derivabile in x_0) si ottiene

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

che è la tesi.

(c) Notiamo che

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].\end{aligned}$$

Mandando $x \to x_0$, utilizzando il fatto che g è continua in x_0 e che i limiti dei rapporti incrementali esistono, si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

che è la tesi.

■

Notiamo due conseguenze importanti della derivazione di un prodotto.

(a) Se $c \in \mathbb{R}$ e f è derivabile in x_0 si ha

$$(cf)'(x_0) = (c'f+cf')(x_0) = cf'(x_0).$$

Dunque le costanti possono essere portate fuori dal segno di derivata.

(b) La derivata del prodotto di tre funzioni derivabili in x_0 può essere calcolata nel seguente modo:

$$\begin{aligned}(fgh)'(x_0) &= [(fg)h]'(x_0) = (fg)'(x_0)h(x_0) + (fg)(x_0)h'(x_0)\\ &= [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)\\ &= f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0).\end{aligned}$$

Generalizzando, la derivata di una funzione prodotto $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$ con f_i derivabile in x_0 è data da

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \cdot f_n)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0)\cdots f_n(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0)f_3(x_0)\cdots f_n(x_0)\\ + \cdots + f_1(x_0)f_2(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f_n'(x_0).\end{aligned}$$

2. Grazie alla derivata di un prodotto, possiamo ricavare la derivata del monomio x^n con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$. Basta notare infatti che

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ volte}}$$

ed applicare la regola della derivazione del prodotto per ricavare che

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{5.1}$$

Grazie alla derivata di un quoziente, possiamo calcolare la derivata della funzione $x \mapsto \frac{1}{x^n}$: si ha infatti

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\frac{1}{x^{n+1}}.$$

Notiamo che

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

e dunque si ottiene la generalizzazione della (5.1) con l'esponente negativo: per ogni $m \in \mathbb{Z}$ (e $x \neq 0$ se m è negativo) si ha

$$(x^m)' = mx^{m-1}.$$

3. La derivata delle potenze e le regole di derivazione sopra viste, permettono di calcolare le derivate dei polinomi e delle funzioni razionali fratte. Grazie alla derivazione di somma e prodotti, abbiamo che i **polinomi** sono funzioni derivabili su $\mathbb{R}$ e

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

Dunque la derivata prima di un polinomio è ancora un polinomio. Ad esempio

$$(x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3.$$

Grazie alla regola di derivazione di un quoziente ed al fatto che i polinomi sono funzioni derivabili, ricaviamo che anche le **funzioni razionali fratte** sono derivabili nel loro dominio (unione di intervalli aperti) e che la loro derivata prima è ancora una funzione razionale fratta. Ad esempio si ha

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

4. Vediamo come si comporta la derivazione rispetto alla composizione di funzioni.

Teorema 5.7 (Derivata della funzione composta). *Siano I, J due intervalli aperti in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(I) \subseteq J$. Sia $x_0 \in I$ e supponiamo che f sia derivabile in x_0 e che g sia derivabile in $f(x_0)$. Allora la composizione $g \circ f$ è derivabile in x_0 e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Grazie alle ipotesi su f e g possiamo scrivere per ogni $x \in I$ e per ogni $z \in J$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + e(x)(x - x_0)$$

e

$$g(z) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(z - f(x_0)) + \tilde{e}(z)(z - f(x_0))$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} e(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{z \to f(x_0)} \tilde{e}(z) = 0.$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \tilde{e}(f(x))(f(x) - f(x_0)) \\ &= g'(f(x_0))[f'(x_0)(x - x_0) + e(x)(x - x_0)] + \tilde{e}(f(x))(f(x) - f(x_0)) \end{aligned}$$

da cui se $x \neq x_0$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))[f'(x_0) + e(x)] + \tilde{e}(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Prendendo il limite per $x \to x_0$ e tenendo conto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ grazie alla continuità di f, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

così che la tesi è dimostrata. ∎

La derivazione della funzione composta permette ad esempio di scrivere

$$[(1+x^2)^{99}]' = 99(1+x^2)^{98}(2x) = 198x(1+x^2)^{98}.$$

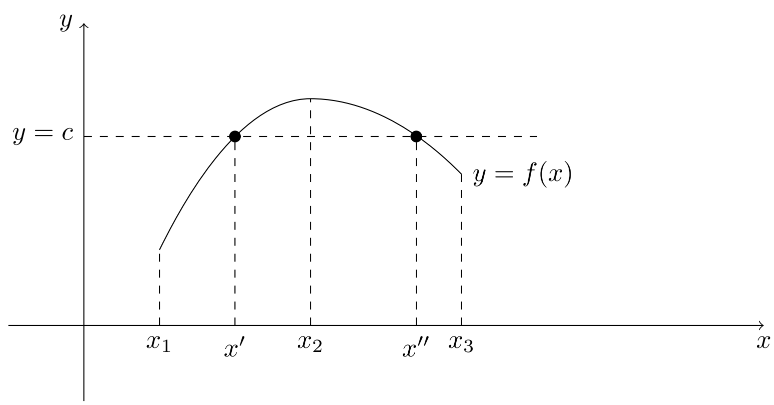
Infatti la funzione $x \mapsto (1+x^2)^{99}$ può essere vista come la composizione di $x \mapsto 1+x^2$ con $x \mapsto x^{99}$.

5. Vediamo come si comporta la derivazione passando all'inversa di una funzione. Notiamo innanzitutto che una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ risulta invertibile se e solo se f è strettamente monotona. Infatti, se f è strettamente monotona, l'invertibilità deriva subito dall'iniettività di f (non si utilizza la continuità della funzione). Viceversa, se f è invertibile e continua, essa deve essere necessariamente strettamente monotona. Infatti se per assurdo esistessero ad esempio $x_1 < x_2 < x_3$ con

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{e} \qquad f(x_2) > f(x_3)$$

detto

$$c \in \,]f(x_1), f(x_2)[\, \cap \,]f(x_3), f(x_2)[,$$



allora per il teorema dei valori intermedi esisterebbero $x' \in]x_1, x_2[$ e $x'' \in]x_2, x_3[$ tali che

$$f(x') = f(x'') = c$$

contro l'invertibilità di f.

Consideriamo dunque funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ continue e strettamente monotone. Notiamo che se I è aperto, allora

$$f(I) =]\inf_I f, \sup_I f[$$

è un intervallo aperto grazie al teorema dei valori intermedi. Dunque $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ rientra nella classe di funzioni di cui si può indagare la derivabilità .

Teorema 5.8 (Derivata della funzione inversa). *Siano I un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e sia f una funzione continua e strettamente monotona. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e che $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $f(x_0)$ e*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due passi.

(a) Dimostriamo innanzitutto che la funzione inversa f^{-1} è continua nel generico punto $y_1 \in f(I)$: ciò deriva dalla continuità e dalla stretta monotonia di f. Supponiamo che $y_1 = f(x_1)$, cioè $x_1 = f^{-1}(y_1)$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $]x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon[\subseteq I$. Per il teorema dei valori intermedi e poiché f è strettamente monotona, si ha che $f(]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[)$ è un intervallo aperto contenente y_1: sia $\delta > 0$ tale che

$$]y_1 - \delta, y_1 + \delta[\subseteq f(]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[).$$

Allora per ogni $y \in]y_1 - \delta, y_1 + \delta[$ si ha $y = f(x)$ con $x \in]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[$ da cui

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1)| = |x - x_1| < \varepsilon$$

e cioè f^{-1} è continua in y_1.

(b) Vediamo ora la derivabilità di f^{-1} in y_0. Sia $y \in]\inf_I f, \sup_I f[$: il rapporto incrementale

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

può scriversi nella forma

$$\left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}\right)^{-1}.$$

Se $y \to f(x_0)$, grazie alla continuità di f^{-1} si ha

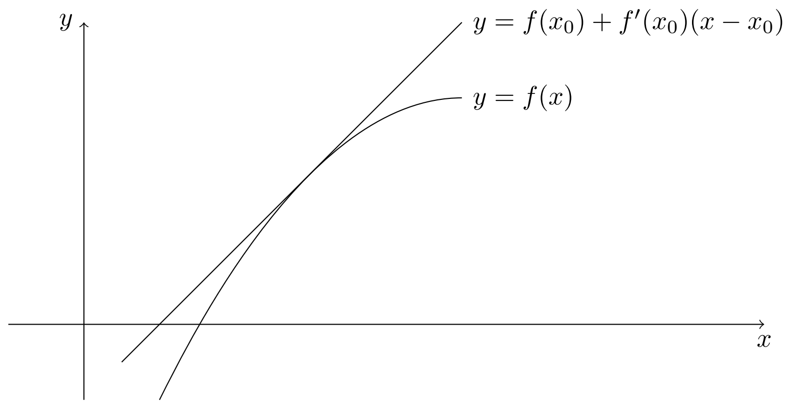
$$\lim_{y \to f(x_0)} f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x_0)) = x_0$$

e per il teorema di composizione dei limiti si ha $(f'(x_0) \neq 0)$

$$\lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = (f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

che è la tesi.

∎



6. Notiamo che il risultato del teorema della derivata della funzione inversa ammette un'interpretazione geometrica molto semplice.

   Il grafico della funzione inversa non è altro che il grafico di f descritto tramite la variabile y anziché la variabile x. La retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è data da
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
   Essendo $f'(x_0) \neq 0$, si ha allora
$$x = x_0 + \frac{1}{f'(x_0)}(y - f(x_0)).$$
   Questa è la descrizione della retta tangente tramite la variabile y: dunque essa coincide con la tangente a f^{-1} nel punto in questione che ha equazione
$$x = x_0 + (f^{-1})'(f(x_0))(y - f(x_0))$$
   da cui
$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

7. È conveniente indicare la variabile indipendente di f^{-1} con la variabile x: dal teorema della derivata della funzione inversa, abbiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile con derivata non nulla e se f è strettamente monotona, allora f^{-1} è derivabile su $f(I)$ e per ogni $x \in f(I)$
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$
   Questa sarà la forma che utilizzeremo nel seguito.

5.4 Derivate delle funzioni elementari

Grazie alle regole di derivazione viste nella sezione precedente, possiamo calcolare le derivate delle funzioni elementari e delle loro composizioni: di polinomi e funzioni razionali fratte ci siamo già occupati in precedenza e pertanto ci possiamo concentrare sulle classi restanti.

1. **Derivate delle funzioni trigonometriche.** Iniziamo con la funzione seno. Si ha che la derivata in $x_0 \in \mathbb{R}$ è data da

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}.$$

Poiché si ha $\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0(\cos h - 1) + \cos x_0 \sin h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} \right).\end{aligned}$$

Sappiamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = 0.$$

Ricaviamo dunque che

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0.$$

Essendo x_0 generico, ricaviamo che *la funzione seno è derivabile su* $\mathbb{R}$ *e la sua derivata è la funzione coseno*:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Passiamo alla funzione coseno: poiché si ha

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

allora per composizione si ha che la funzione coseno è derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua derivata vale

$$(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

Dunque *la funzione coseno è derivabile su* $\mathbb{R}$ *e la sua derivata è l'opposto della funzione seno*:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Grazie alla regola di derivazione di un quoziente, si ricava che la funzione tangente è derivabile sul suo dominio: si ha

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1.$$

Similmente si ragiona per la funzione cotangente.

2. **Derivate delle funzioni esponenziali e logaritmiche**. Consideriamo la funzione esponenziale $x \mapsto e^x$. Allora se $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

Essendo x_0 generico, ricaviamo che *la funzione esponenziale è derivabile su* $\mathbb{R}$ *e coincide con la sua derivata*:

$$(e^x)' = e^x.$$

Passiamo alla funzione logaritmo: se $x_0 > 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln x_0 + \ln(1 + \frac{h}{x_0}) - \ln x_0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{h}{x_0})}{h} = \frac{1}{x_0}.$$

Essendo x_0 generico, ricaviamo che *la funzione logaritmo è derivabile su* $]0, +\infty[$ *e la sua derivata è la funzione inverso*:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Notiamo che le derivate delle funzioni $x \mapsto a^x$ e $x \mapsto \log_a x$ si ricavano immediatamente: infatti dalla derivazione per composizione

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

e

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Infine ricaviamo subito la derivabilità delle funzioni seno e coseno iperbolico e le formule

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad \text{e} \qquad (\cosh x)' = \sinh x.$$

3. **Derivata della funzione potenza.** Notiamo che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ si ha

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Dalla derivazione per composizione si ha

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Dunque *la funzione potenza è derivabile su* $]0,+\infty[$ *e la sua derivata generalizza la derivata della potenza* n*-esima:*

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

In particolare ad esempio la funzione radice quadrata è derivabile su $]0,+\infty[$ e

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. **Derivate delle funzioni circolari inverse.** La funzione seno è invertibile su $]-\pi/2,\pi/2[$ ed ammette come inversa la funzione arcoseno. La funzione seno è derivabile su $]-\pi/2,\pi/2[$ e la sua derivata è non nulla poiché

$$(\sin x)' = \cos x \neq 0 \qquad \text{per } x \in]-\pi/2,\pi/2[.$$

Possiamo dunque applicare il teorema della derivata della funzione inversa: la funzione inversa arcsin è derivabile su $]-1,1[$ e la sua derivata vale (teniamo conto che il coseno di un numero $\alpha \in]-\pi/2,\pi/2[$ è positivo così che $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

In modo simile si ricava che la funzione arccos è derivabile su $]-1,1[$ e

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin\arccos x} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2\arccos x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Anche la funzione arcotangente è derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2\arctan x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Riassumendo si ha sui rispettivi domini di definizione

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. Notiamo che l'insieme dei polinomi e delle funzioni razionali fratte sono *chiusi* rispetto alla derivazione, nel senso che l'operazione di derivazione produce ancora polinomi o funzioni razionali fratte. Si ottengono funzioni razionali fratte derivando anche la funzione logaritmo e la funzione arcotangente. Se diciamo funzioni *algebriche* quelle ottenute dai polinomi attraverso le operazioni di somma, prodotto, divisione ed estrazioni di radici (cioè per composizione di funzioni razionali fratte e di potenze razionali), allora è facile realizzare dai risultati precedenti che anche il loro insieme è chiuso per l'operazione di derivazione. Funzioni algebriche si ottengono anche derivando le funzioni inverse circolari.

6. Concludiamo la sezione ritornando sulla questione dell' *opportunità* per l'analisi matematica della misura degli angoli in radianti per la definizione delle funzioni circolari. Se adottassimo la misura in gradi sessagesimali, ed indicassimo con $\widetilde{\sin}$ e $\widetilde{\cos}$ le funzioni circolari associate, avremmo

$$\left(\widetilde{\sin} x\right)' = \left(\sin \frac{\pi x}{180}\right)' = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180} = \frac{\pi}{180} \widetilde{\cos} x.$$

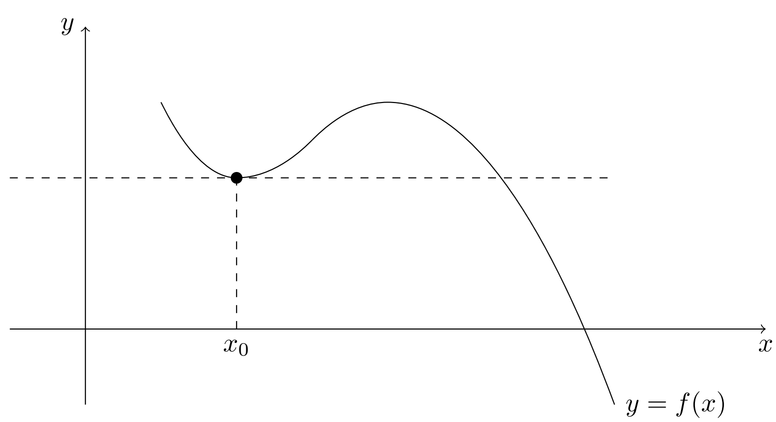
Dunque la funzione coseno non sarebbe più la derivata della funzione seno, comparendo un fattore $\frac{\pi}{180}$ nelle formule. Risulta dunque più utile adottare un sistema di misura degli angoli che comporti delle formule di derivazione più semplici.

5.5 Teoremi fondamentali sulle derivate

In questa sezione dimostreremo alcuni risultati fondamentali sulle derivate su cui si basano tutte le applicazioni geometriche ed analitiche del calcolo differenziale.

1. Il seguente risultato riguarda il comportamento della derivata in un punto di estremo locale.

Proposizione 5.9 (Condizione necessaria al primo ordine in un punto di estremo). *Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto di estremo locale per f. Supponiamo che f sia derivabile in x_0: allora si ha $f'(x_0) = 0$.*



Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo relativo: esiste dunque $\varepsilon > 0$ tale che $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$ e

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\; : f(x_0) \leq f(x).$$

Dunque per ogni $|h| < \varepsilon$ si ha

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0.$$

Sia $h \in]0, \varepsilon[$: dividendo per h si ha

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

da cui, prendendo il limite per $h \to 0^+$ e tenendo conto della derivabilità di f in x_0, si ottiene

$$f'(x_0) \geq 0.$$

D'altro canto, dividendo per $h \in] - \varepsilon, 0[$ si ha

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

da cui, prendendo il limite per $h \to 0^-$, si ottiene

$$f'(x_0) \leq 0.$$

Deduciamo dunque che $f'(x_0) = 0$, cioè la tesi è dimostrata. ∎

Geometricamente, possiamo interpretare la proposizione precedente dicendo che in un punto di estremo locale in cui f è derivabile, la tangente al suo grafico è orizzontale. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 5.10 (Punti critici o stazionari). *Siano I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che $x_0 \in I$ è* **punto critico** *o un* **punto stazionario** *di f se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.*

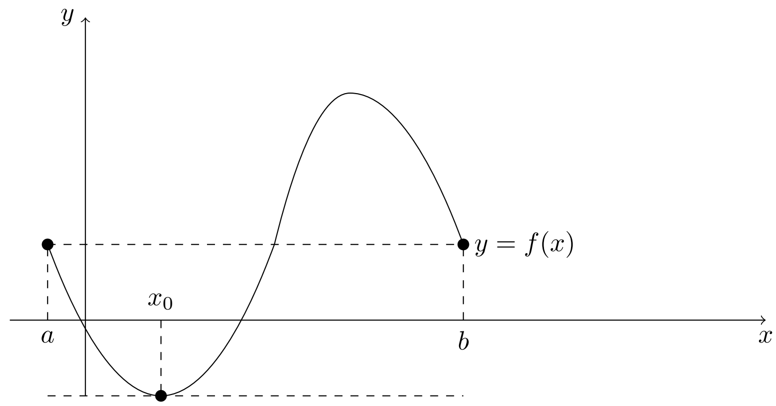
Possiamo dunque dire che gli estremi locali di una funzione derivabile vanno cercati *fra* gli zeri di f', cioè nell'insieme dei suoi punti critici. Non tutti i punti critici sono in generale punti di estremo locale: ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ ammette $x = 0$ come punto critico, ma esso non è evidentemente né un massimo né un minimo.

2. Un'immediata conseguenza della proposizione precedente è il seguente risultato dovuto a Rolle.

   Teorema 5.11 (Teorema di Rolle). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) = f(b)$. Se f è derivabile in $]a, b[$, allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

   Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su $[a, b]$. Distinguiamo due casi.

   (a) Se tali valori coincidono con il valore di f agli estremi, allora si ha che f è costante su $[a, b]$ e la sua derivata su $]a, b[$ è nulla: il teorema è dunque dimostrato, potendosi scegliere come x_0 un qualsiasi elemento di $]a, b[$.



(b) Supponiamo che il minimo di f sia più piccolo del valore di f agli estremi (il caso del massimo è simile), e sia $x_0 \in]a, b[$ un punto di minimo. Per la condizione necessaria al primo ordine in un punto di estremo, essendo f derivabile in x_0 si ha $f'(x_0) = 0$: la dimostrazione è dunque conclusa.

■

3. Una conseguenza del teorema precedente è il seguente risultato dovuto a Cauchy.

Teorema 5.12 (Teorema di Cauchy). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili su $]a, b[$ tali che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Allora $g(a) \neq g(b)$ ed esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Notiamo che non può essere $g(a) = g(b)$: infatti se così fosse, per il Teorema di Rolle esisterebbe $x' \in]a, b[$ con $g'(x') = 0$, contro l'ipotesi su g'. Consideriamo la funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ data da

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Notiamo che h è continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$ e tale che $h(a) = h(b)$ essendo

$$f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b).$$

Per il teorema di Rolle esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $h'(x_0) = 0$, cioè tale che

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0,$$

da cui la tesi. ∎

Il teorema di Cauchy è detto anche **teorema degli accrescimenti finiti**: infatti esso afferma che il rapporto tra gli *accrescimenti finiti* $f(b) - f(a)$ e $g(b) - g(a)$ delle funzioni f e g sull'intervallo $[a, b]$ uguaglia il rapporto tra le derivate f' e g' in un opportuno punto intermedio.

4. Una conseguenza importante del teorema di Cauchy è data dal seguente risultato.

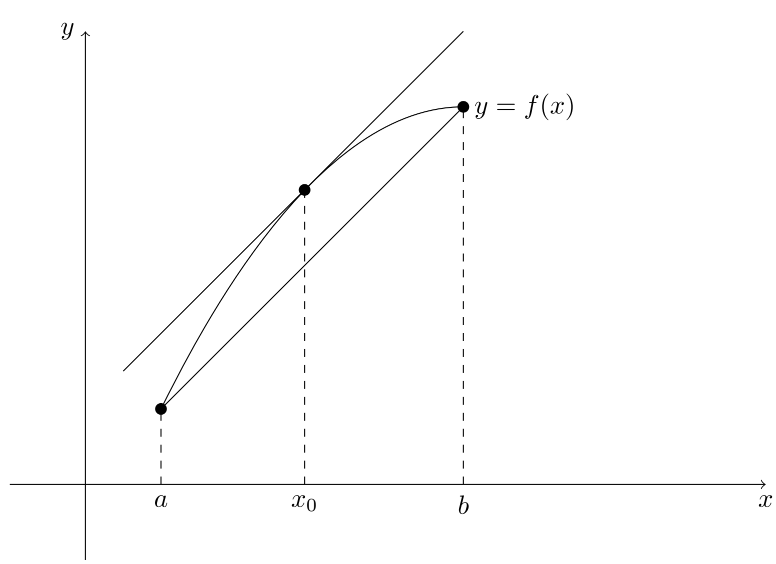
Teorema 5.13 (Teorema di Lagrange). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Cauchy alle funzioni f e $g(x) = x - a$ per ottenere l'esistenza di $x_0 \in]a, b[$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è la tesi. ∎



Il teorema di Lagrange ammette una semplice interpretazione geometrica: la retta tangente in x_0 al grafico di f ha la stessa inclinazione della retta congiungente gli estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Possiamo dunque dire che esiste all'interno dell'intervallo un punto in cui la tangente è inclinata come la retta secante passante per gli estremi.

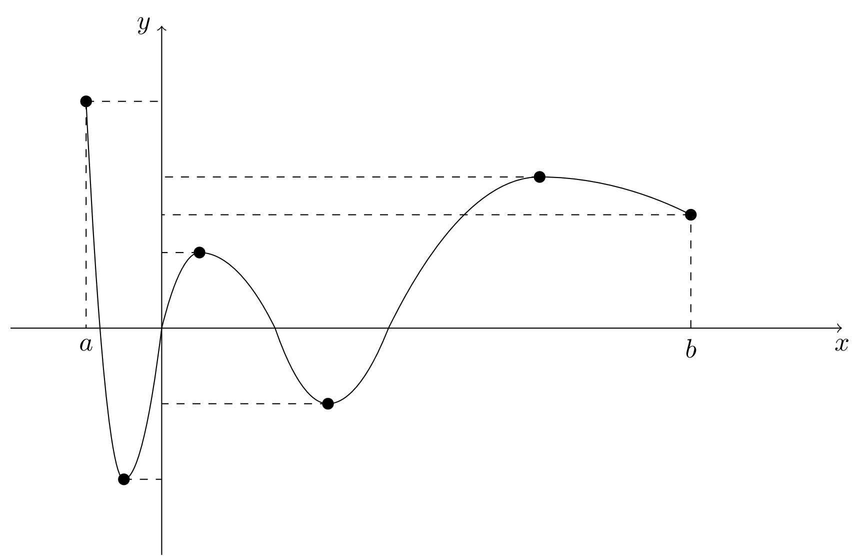
5.6 Alcune conseguenze dei teoremi fondamentali

In questa sezione stabiliremo alcune conseguenze dei teoremi fondamentali sulle derivate che hanno una grande importanza per lo studio delle proprietà analitiche e geometriche delle funzioni.

1. Iniziamo con delle semplici osservazioni sul calcolo del massimo e del minimo di una funzione definita su un intervallo. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Per il Teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su $[a, b]$. I punti di estremo possono trovarsi in $]a, b[$ oppure coincidere con gli estremi dell'intervallo. Se si trovano in $]a, b[$, grazie alla condizione necessaria al primo ordine nei punti di estremo, essi devono essere punti critici di f, cioè soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$. La determinazione del massimo e del minimo di f si può svolgere dunque nel seguente modo:

   (a) si determinano i punti critici $x_1, x_2, \dots$ di f in $]a, b[$, cioè si risolve $f'(x) = 0$ in $]a, b[$;

   (b) si confrontano i valori $f(a)$ e $f(b)$ con i valori di f nei punti critici, cioè $f(x_1), f(x_2), \dots$: il più grande è il valore di massimo, il più piccolo è il valore di minimo, i punti corrispondenti sono i punti di estremo cercati.



Esempio 5.14. Consideriamo ad esempio la funzione $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Poiché

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

si ha che i punti critici di f sono dati da $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. I valori corrispondenti sono $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$. Invece $f(-3) = -17$ e $f(2) = 3$. Dunque il minimo di f è -17 assunto in $x = -3$, mentre il massimo è 3 assunto nei punti -1 e 2.

Se f è definita su intervalli aperti o illimitati, i limiti di f agli estremi possono dare indicazioni sul sup o l'inf di f.

Esempio 5.15. Consideriamo la funzione precedente $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sull'intervallo $[-3, +\infty[$. Poiché

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si ha

$$\min_{[-3,+\infty[} f = -17 \qquad \sup_{[-3,+\infty[} f = +\infty$$

e -3 è un punto di minimo.

2. Analizziamo ora il rapporto tra monotonia e segno della derivata.

Proposizione 5.16 (Segno della derivata e monotonia). *Siano I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora f è crescente su I se e solo se $f' \geq 0$ su I. Similmente f è decrescente su I se e solo se $f' \leq 0$ su I.*

Dimostrazione. Vediamo la prima equivalenza. Supponiamo che f sia crescente su I. Allora per ogni $x \in I$ e per ogni $h \geq 0$ tale che $x + h \in I$ possiamo scrivere

$$f(x + h) \geq f(x).$$

Dunque si ha

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

cioè f' è non negativa.

Viceversa supponiamo che $f' \geq 0$ su I: per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha grazie al teorema di Lagrange

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

con $x_0 \in]x_1, x_2[$ punto opportuno. Essendo $f'(x_0) \geq 0$, si ricava

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

cioè

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Dunque f è crescente e la dimostrazione è conclusa. ∎

Notiamo che gli argomenti precedenti mostrano che se f' non si annulla mai su I, allora f è strettamente monotona.

3. Vediamo ora invece il rapporto tra convessità /concavità di una funzione ed il segno della derivata seconda. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 5.17 (Funzioni convesse e concave). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione.*

(a) Diciamo che f è **convessa** *su I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e $t \in]0,1[$ si ha*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

(b) Diciamo che f è **concava** *su I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e $t \in]0,1[$ si ha*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Possiamo giungere ad un'interpretazione geometrica delle funzioni convesse e concave nel seguente modo: la retta r che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ ha equazione

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Dunque la quantità

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

rappresenta la quota della retta r relativa al punto di ascissa

$$(1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

intermedio tra x_1 e x_2: infatti

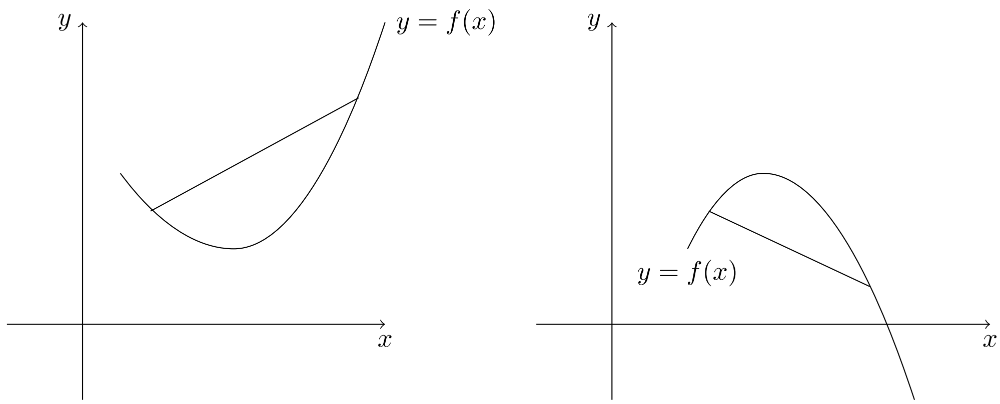
$$\begin{aligned} f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}((1-t)x_1 + tx_2 - x_1) &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}t(x_2 - x_1) \\ &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \end{aligned}$$

Dunque se f è convessa, il segmento che congiunge due punti del suo grafico si trova sempre sopra il grafico di f, mentre se f è concava, il segmento che congiunge due punti del suo grafico si trova sempre sotto il grafico di f.

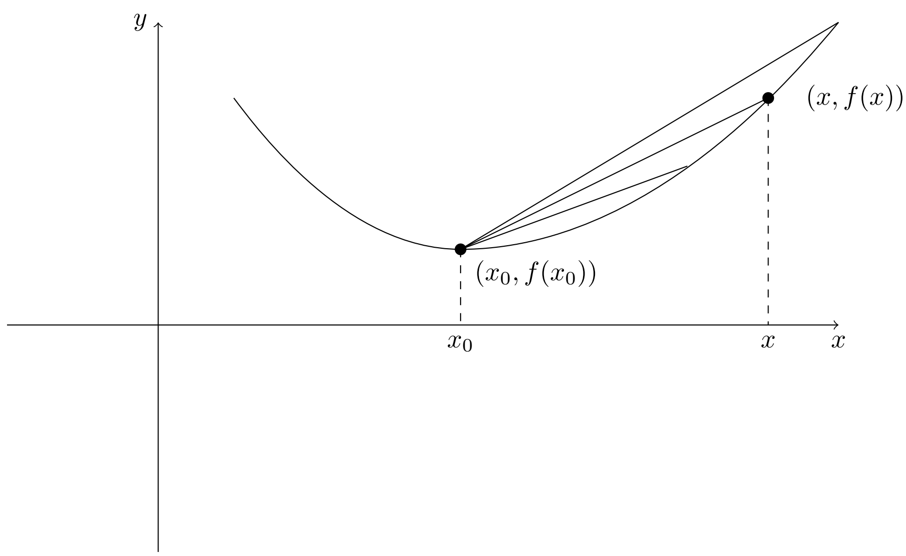
Possiamo dunque dire che f è convessa se e solo se l'insieme

$$epi(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \geq f(x)\},$$

detto l'*epigrafico* di f, è un insieme convesso nel senso della geometria elementare (cioè contiene il segmento che congiunge due qualsiasi elementi del suo bordo). Similmente f è concava se e solo se $epi(f)$ è concavo nel senso della geometria elementare.



L'analisi del grafico di $f : I \to \mathbb{R}$ mostra che essa è convessa su I se e solo se per ogni $x_0 \in I$ il coefficiente angolare $m(x)$ del segmento congiungente i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ è una funzione monotona crescente di x.



Ciò è equivalente alla seguente proprietà : detti

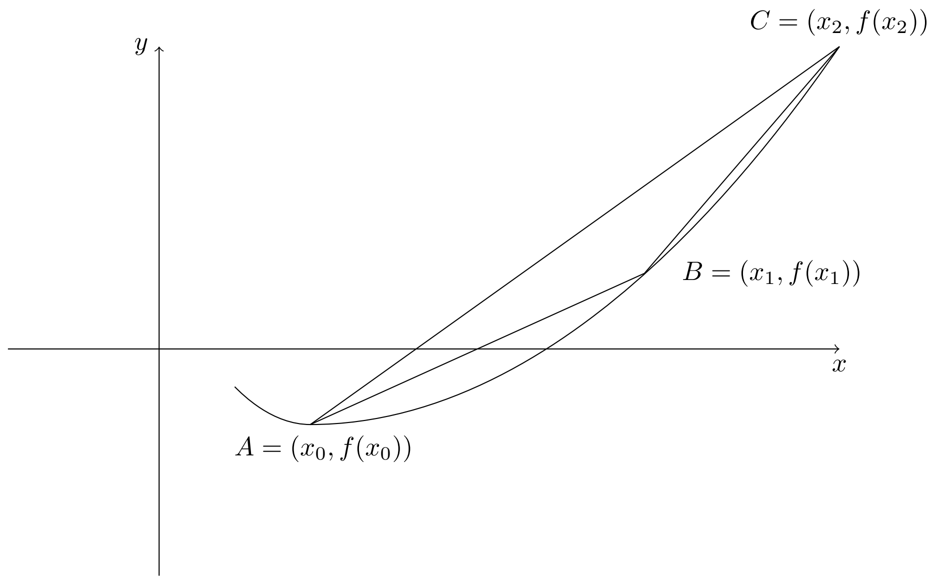
$$A = (x_0, f(x_0)) \qquad B = (x_1, f(x_1)) \qquad C = (x_2, f(x_2))$$

con $x_0 < x_1 < x_2$, allora si ha, indicando con m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} i coefficienti angolari delle rette corrispondenti,

$$m_{AB} \leq m_{AC} \leq m_{BC}$$

che risulta a sua volta equivalente a

$$m_{AB} \leq m_{BC}.$$



(a) Supponiamo che f sia derivabile su I: facendo tendere B ad A e C rispettivamente, troviamo che

$$f'(x_0) \leq m_{AC} \leq f'(x_2).$$

Essendo x_0, x_2 arbitrari, deduciamo che f' è monotona crescente su I.

(b) Viceversa, sia f' monotona crescente su I. Allora si ha per il Teorema di Lagrange

$$m_{AB} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x') \quad \text{e} \quad m_{BC} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x'')$$

con $x' \in]x_0, x_1[$ e $x'' \in]x_1, x_2[$ punti opportuni, da cui

$$m_{AB} = f'(x') \leq f'(x'') = m_{BC}.$$

Deve dunque essere $m_{AB} \leq m_{BC}$, cioè f è convessa su I.

Ragionamenti simili per le funzioni concave portano alla seguente conclusione.

Proposizione 5.18 (Segno della derivata seconda e convessità /concavità di una funzione). *Siano I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f è derivabile su I allora*

(a) f è convessa su I se e solo se f' è monotona crescente su I;

(b) f è concava su I se e solo se f' è monotona decrescente su I.

Se f è derivabile due volte su I, allora *(c) f è convessa su I se e solo se $f'' \geq 0$ su I;*

(d) f è concava su I se e solo se $f'' \leq 0$ su I.

Grazie alla proposizione precedente, abbiamo ad esempio che la funzione $x \mapsto arctanx$ risulta convessa su $]-\infty, 0[$ e concava su $]0, +\infty[$ essendo

$$(\arctan x)'' = -\frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

4. Passiamo ora a studiare alcune conseguenze analitiche del Teorema di Lagrange. Cominciamo con il seguente risultato.

Proposizione 5.19 (Derivata nulla). *Siano I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f' = 0$ su I. Allora f è costante.*

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione, basta vedere che per ogni $x_1, x_2 \in I$ si ha $f(x_1) = f(x_2)$. Per il teorema di Lagrange applicato a f sull'intervallo determinato da x_1 e x_2, si ha che esiste x_0 intermedio tra i due tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Essendo $f'(x_0) = 0$, si ha $f(x_2) - f(x_1) = 0$ e la tesi è dimostrata. ■

Il risultato precedente ha una chiara interpretazione geometrica. Una funzione con derivata nulla è tale che il suo grafico ammette sempre tangenti orizzontali: l'unico modo perché ciò accada è che il grafico stesso sia una retta orizzontale, cioè f sia costante.

Dalla proposizione precedente applicata a $f - g$ discende il seguente corollario che useremo nella teoria degli integrali.

Corollario 5.20. *Siano I un intervallo aperto e $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che $f' = g'$ su I. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $f = g + c$.*

5.7 La regola di De l'Hospital

La regola di De l'Hospital è utile per il calcolo dei limiti che si presentano nelle forme indeterminate

$$\frac{0}{0} \qquad \text{e} \qquad \frac{?}{\infty}.$$

La notazione $?/\infty$ indica che il denominatore ammette limite $+\infty$ o $-\infty$, mentre il numeratore potrebbe anche non ammettere limite.

1. La prima regola di De L'Hospital è la seguente.

Teorema 5.21 (**Forma** $0/0$, **caso I**). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

e che $g' \neq 0$ su $]a, b[$. Se esiste

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite per $x \to a$ del rapporto di f e g e si ha

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Notiamo che f e g possono essere estese con continuità ad $[a, b[$ ponendo

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Notiamo inoltre che si ha $g \neq 0$ su $]a, b[$: infatti se esistesse $x' \in]a, b[$ con $g(x') = 0$, per il Teorema di Rolle applicato a g su $[a, x']$ si dedurrebbe l'esistenza di $x'' \in]a, x'[$ con $g'(x'') = 0$, contro l'ipotesi su g'. Il rapporto tra f e g risulta dunque ben definito su $]a, b[$.

Per il Teorema di Cauchy possiamo scrivere per ogni $x \in]a, b[$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

dove $x_0 \in]a, x[$. Sia

$$l = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poiché se $x \to a$ si ha $x_0 \to a$, per composizione otteniamo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0 \to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = l$$

e la tesi è dimostrata. ∎

Chiaramente il teorema precedente vale anche per il limite per $x \to b$ nel caso in cui $f(b) = g(b) = 0$.

2. Un cambio di variabile porta al seguente risultato.

Teorema 5.22 (Forma $0/0$**, caso II).** *Siano* $a \in \mathbb{R}$ *e* $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili. Supponiamo che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

e che $g' \neq 0$ *su* $]a, +\infty[$*. Se esiste*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite per $x \to +\infty$ *del rapporto di* f *e* g *e si ha*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $a > 0$. Facciamo il cambiamento di variabile $x = \frac{1}{t}$: allora otteniamo due funzioni $\tilde{f}, \tilde{g} :]0, \frac{1}{a}[$ definite da

$$\tilde{f}(t) = f(1/t) \qquad \text{e} \qquad \tilde{g}(t) = g(1/t).$$

Notiamo che

$$\lim_{t\to 0} \tilde{f}(t) = \lim_{t\to 0} \tilde{g}(t) = 0$$

e che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Inoltre si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Infatti

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(1/t)}{-\frac{1}{t^2} g'(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Per la regola di De l'Hospital si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

così che la tesi è dimostrata. ∎

Il teorema precedente vale chiaramente anche nel caso del limite per $x \to -\infty$ sotto le analoghe ipotesi.

3. Vediamo ora i casi relativi alla forma $?/\infty$ di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 5.23 (Forma $?/\infty$, caso I). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che*

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \qquad o \qquad \lim_{x\to a} g(x) = -\infty,$$

e che $g' \neq 0$ su $]a, b[$. Se esiste

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite per $x \to a$ del rapporto di f e g e si ha

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Chiaramente, scambiando i ruoli di a e b, il risultato vale anche per $x \to b$. Operando il cambiamento di coordinate visto nella dimostrazione del Teorema 5.22, deduciamo infine anche la validità della seguente variante.

Teorema 5.24 (Forma $?/\infty$, caso II). *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che*

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty \qquad o \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty,$$

e che $g' \neq 0$ su $]a, +\infty[$. Se esiste

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite per $x \to +\infty$ del rapporto di f e g e si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Chiaramente, sotto le opportune ipotesi, vale anche il risultato per $x \to -\infty$.

4. Notiamo che se il limite del rapporto f'/g' non esiste, non è possibile concludere che il limite del rapporto f/g non esiste. Infatti basta considerare il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \sin x}{x}$$

che esiste e vale 1. D'altro canto, il limite da analizzare per la regola di De l'Hospital è

$$\lim_{x\to +\infty} (1 - \cos x)$$

ed esso non esiste.

5. La formula di De l'Hospital può essere utile per lo studio anche di forme indeterminate diverse da quelle menzionate nei teoremi corrispondenti.

   (a) **Forma** $0 \cdot \infty$. In tal caso si scrive

   $$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

   e l'ultimo limite si presenta nella forma $0/0$: se le ipotesi sono soddisfatte, è possibile applicare la corrispondente regola.

   (b) **Forma** $+\infty - \infty$. In tal caso si scrive

   $$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

   e la frazione tra parentesi quadre presenta una forma ∞/∞ trattabile sotto opportune ipotesi con la regola.

   (c) **Forme** 0^0**,** ∞^0 **e** 1^∞. Si presentano per espressioni del tipo $f(x)^{g(x)}$: si scrive (supponendo che le espressioni abbiano senso)

   $$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \ln f(x)}.$$

   Dunque grazie alla continuità della funzione esponenziale, basta studiare il limite dell'esponente, e cioè

   $$\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)$$

   che si presenta nella forma $0 \cdot \infty$ già trattata in un punto precedente. Se il limite esiste e vale $l \in \mathbb{R}$ ad esempio, il limite iniziale varrà e^l.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 5.25. Forma $0/0$. Studiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}.$$

Si ha che il limite delle derivate è

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$

per cui il limite iniziale vale 1.

Esempio 5.26. Forma ∞/∞. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}.$$

Il limite delle derivate è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1.$$

Esempio 5.27. Forma $0\cdot\infty$. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \qquad \text{con } \alpha > 0.$$

Il limite può essere scritto nella forma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$$

che è della forma ∞/∞. Si ha che il limite delle derivate è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$$

e dunque il limite iniziale vale zero anche se α è piccolissimo ma positivo.

Esempio 5.28. Forma $+\infty-\infty$. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right).$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$$

per cui il limite delle derivate vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}.$$

Si presenta ancora una forma $0/0$: possiamo applicare nuovamente la regola di De l'Hospital ottenendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x}$$

Tale limite non presenta più una forma indeterminata: il limite vale 0.

Esempio 5.29. Forma 0^0. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$$

per cui grazie ad un esempio precedente si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

Come visto nell'esempio 5.28, può capitare che applicando la regola di De l'Hospital il limite delle derivate si presenti ancora nella forma 0/0 o $?/\infty$. Si può (se le ipotesi lo consentono) applicare nuovamente la regola scrivendo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Se necessario si può passare alle derivate terze e così via.

6. Tramite la regola di De l'Hospital possiamo stabilire alcuni confronti tra infiniti molto utili nel calcolo dei limiti. Valgono i seguenti risultati:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha, \beta > 0,$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha > 0.$$

La seconda relazione deriva dal risultato dell'esempio 5.27 tramite il cambio di variabile $x = 1/t$: infatti si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1/t)}{\frac{1}{t^\alpha}} = -\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \ln t = 0.$$

Invece per la prima relazione, ponendo $e^{\beta x} = t$ si ottiene $x = \frac{1}{\beta}\ln t$ da cui

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{\beta}\ln t\right)^\alpha}{t} = \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{\beta}\ln t}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha = 0.$$

Possiamo dunque concludere la validità del seguente confronto tra infiniti.

Per $x \to +\infty$, la funzione esponenziale $e^{\beta x}$ con $\beta > 0$ è un infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza reale x^α con $\alpha > 0$. Inoltre la potenza reale x^α con $\alpha > 0$ è un infinito di ordine superiore rispetto alla funzione logaritmo $\ln x$.

5.8 Classificazione dei punti critici

In questa sezione daremo un criterio per decidere se un punto critico di una funzione è un massimo od un minimo locale.

1. Sarà utile nel seguito il seguente lemma.

   Lemma 5.30. *Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile $(n-1)$ volte in I e n volte in x_0 con*
$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$
   Allora si ha
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$
   Se f è derivabile n volte su I (e non solo in x_0), allora si ha per ogni $x \in I$ con $x \neq x_0$
$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}, \tag{5.3}$$
   essendo x_n un conveniente punto intermedio tra x_0 e x.

   Dimostrazione. Per il teorema di Cauchy possiamo scrivere per ogni $x \in I$ con $x \neq x_0$
$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f'(x_1)}{n(x_1-x_0)^{n-1}} \\ &= \frac{f'(x_1)-f'(x_0)}{n(x_1-x_0)^{n-1}} = \frac{f''(x_2)}{n(n-1)(x_2-x_0)^{n-2}} \\ &= \cdots = \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})}{n!(x_{n-1}-x_0)} = \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})-f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x_{n-1}-x_0)} \end{aligned} \tag{5.4}$$
   dove x_1 è intermedio tra x_0 e x, x_2 è intermedio tra x_0 e x_1,..., e x_{n-1} è intermedio tra x_0 e x_{n-2}. Notiamo che per definizione di derivata si ha
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = f^{(n)}(x_0).$$
   Dunque se $x \to x_0$, si ha $x_{n-1} \to x_0$ e per composizione si ha
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$
   Se f è derivabile n-volte su I, tornando alla (5.4) ed applicando il Teorema di Lagrange otteniamo
$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$$
   con x_n intermedio tra x e x_0: il lemma è così completamente dimostrato. ∎

2. Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato di classificazione dei punti critici di una funzione.

Teorema 5.31 (Classificazione dei punti critici: criterio della derivata n-esima). *Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile $(n-1)$ volte in I e n volte in x_0. Supponiamo che*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad e \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Valgono i seguenti fatti:

(a) se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo locale;

(b) se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale;

(c) se n è dispari, allora x_0 non è né un punto di massimo locale né un punto di minimo locale.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - f(x_0)$: grazie alle ipotesi, essendo

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad g^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

si ha che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Supponiamo che n sia pari e che $f^{(n)}(x_0) > 0$. Allora per il teorema di permanenza del segno si ha che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}$$

è positiva in $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap (I \setminus \{x_0\})$, essendo $\varepsilon > 0$ un numero positivo opportuno: essendo $(x - x_0)^n$ una quantità sempre maggiore o uguale a zero, deduciamo che

$$f(x) - f(x_0) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap (I \setminus \{x_0\}) \,.$$

Dunque x_0 è un punto di minimo locale (stretto) per f.

Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, un ragionamento simile mostra che x_0 è un massimo locale (stretto) di f.

Sia n dispari: allora si ha che $f(x) - f(x_0)$ cambia segno vicino a x_0 dal momento che $(x - x_0)^n$ cambia segno in un intorno di x_0 ed il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

ha un segno definito. Dunque x_0 non è né un massimo né un minimo locale per f, e la dimostrazione è conclusa.

■

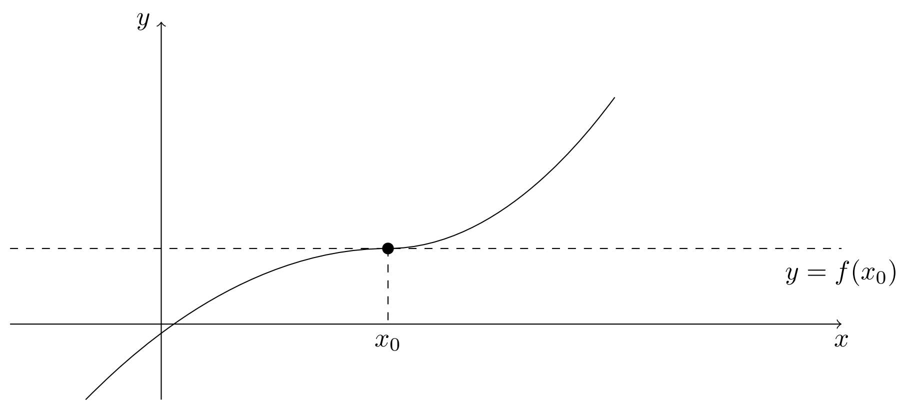
Nel caso n dispari, dalla relazione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

ricaviamo che il grafico di f attraversa la retta tangente $y = f(x_0)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$: infatti la quantità

$$f(x) - f(x_0)$$

cambia segno a seconda che $x < x_0$ o $x > x_0$.



Tali punti si dicono **punti di flesso** di f. Ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ ammette $x = 0$ come punto di flesso essendo $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 6 \neq 0$.

Osservazione 5.32. Il Teorema di classificazione risulta chiaro da un punto di vista geometrico nel caso in cui $n = 2$ e f risulta derivabile due volte su I con derivata seconda continua. In tal caso infatti, se fosse $f''(x_0) > 0$, grazie alla continuità di f'', risulterebbe che $f'' > 0$ in un conveniente intervallo J centrato in x_0. Dunque f risulta convessa su J, ed essendo la tangente in x_0 orizzontale, esso risulta di conseguenza un punto di minimo per f su J. Un discorso simile si può fare per il caso $f''(x_0) < 0$.

5.9 Polinomio di Taylor di una funzione

In questa sezione ci proponiamo di dimostrare che una funzione sufficientemente derivabile è approssimabile nelle vicinanze di un punto tramite polinomi di grado assegnato: stabiliremo anche una stima dell'errore che si commette nell'approssimazione, oltre a dare una interpretazione geometrica del risultato.

1. Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte su I: diciamo **polinomio di Taylor di grado n di f in x_0** il polinomio

$$p_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Un conto diretto mostra che $p_{x_0,n}(x)$ ammette in x_0 le derivate fino all'ordine n uguali a quelle di f. Se dunque consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - p_{x_0,n}(x)$$

si ha

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Applicando il Lemma 5.30 si ottiene

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_{x_0,n}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Concludiamo dunque che vale il seguente risultato.

Proposizione 5.33. *Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte in I. Allora si ha per ogni $x \in I$*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

2. La relazione

$$f(x) = p_{x_0,n}(x) + o((x - x_0)^n)$$

afferma che il polinomio di Taylor di grado n di f in x_0 approssima f nelle vicinanze di x_0 a meno di un infinitesimo di ordine maggiore di n. Da una punto di vista analitico, possiamo dunque dire che una funzione derivabile n-volte su un intervallo I è approssimabile nelle vicinanze di un qualsiasi suo punto tramite un'espressione polinomiale di grado n a meno di un piccolo errore infinitesimo di ordine maggiore di n. Ad esempio, se consideriamo la funzione esponenziale $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Così al quarto ordine possiamo scrivere ad esempio

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

3. Da un punto di vista geometrico, la relazione

$$f(x) = p_{x_0,n}(x) + o((x - x_0)^n)$$

può essere interpretata nel seguente modo: **il grafico di f è approssimato vicino a x_0 a meno di infinitesimi di ordine maggiore di n dal grafico di una curva di ordine n.**

(a) Se $n = 1$, si ottiene l'approssimazione del grafico di f al primo ordine tramite quello della retta tangente, essendo

$$p_{x_0,1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ed il grafico associato a $p_{x_0,1}(x)$ quello appunto della retta tangente.

(b) Se $n = 2$, si ottiene l'approssimazione del grafico di f al secondo ordine tramite quello di una *parabola* di equazione

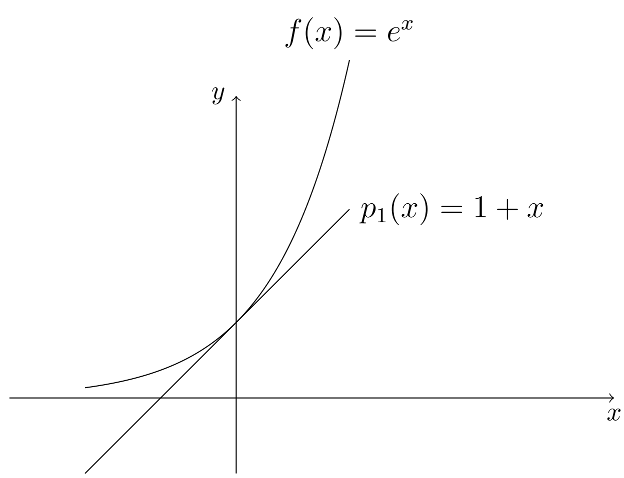
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2.$$

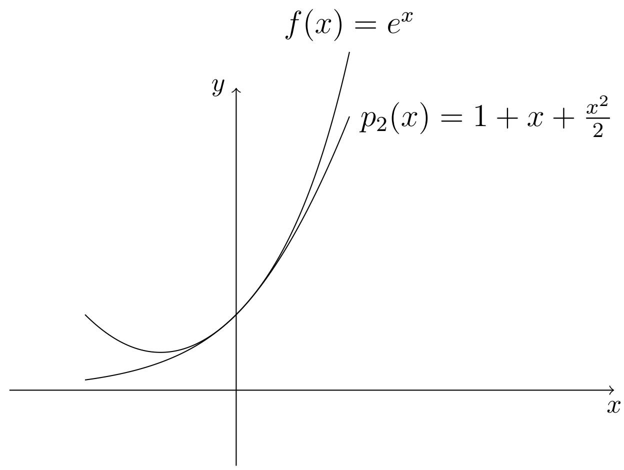
(c) Se $n = 3$, si ottiene l'approssimazione del grafico di f al terzo ordine tramite quello di una *cubica* di equazione

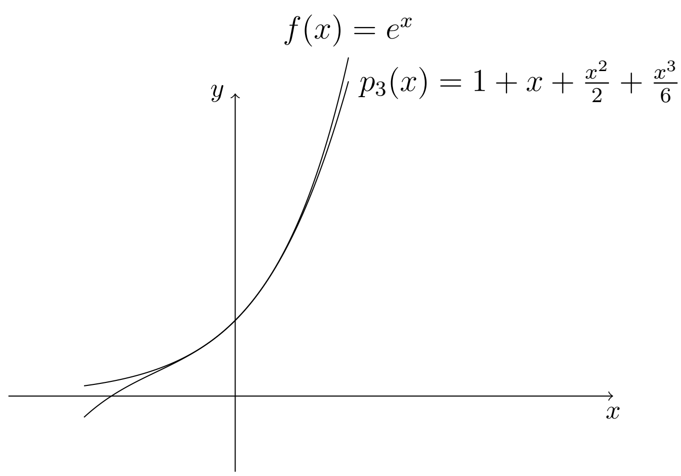
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Ad esempio il grafico $y = e^x$ della funzione esponenziale ammette vicino a $x = 0$ le seguenti approssimazioni ai primi tre ordini

$$y = 1 + x, \qquad y = 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{e} \qquad y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$







4. Cerchiamo ora di quantificare l'errore che si commette nell'approssimazione di f con il suo polinomio di Taylor.

Teorema 5.34 (**Polinomio di Taylor con il resto di Lagrange**). *Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile $(n+1)$-volte in I: allora possiamo scrivere per ogni $x \in I$*

$$f(x) = p_{x_0,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{5.5}$$

essendo x_{n+1} un conveniente punto intermedio tra x_0 e x.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - p_{x_0,n}(x).$$

Notiamo che per costruzione del polinomio di Taylor si ha

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

e $g^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ su I. Grazie al Lemma 5.30 si ha

$$\frac{f(x) - p_{x_0,n}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$$

con x_{n+1} un conveniente punto intermedio tra x_0 e x. Si ottiene dunque la tesi. ■

Il teorema precedente afferma che f può essere scritta come somma del suo polinomio di Taylor in x_0 di grado n e di un resto della forma

$$\frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

con x_{n+1} intermedio tra x_0 e x: tale termine è detto **resto in forma di Lagrange dell'approssimazione**. Dunque una stima dell'errore di approssimazione è data ad esempio da

$$\frac{\sup_I |f^{(n+1)}|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

La formula (5.5) viene detta anche lo **sviluppo di Taylor di** f **all'ordine** n su I.

5. Supponiamo che I contenga l'origine: allora il polinomio di Taylor relativo a $x = 0$ viene detto **polinomio di Mac Laurin** e si ha lo **sviluppo di Mac Laurin di** f **all'ordine** n

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}x^{n+1}$$

essendo x_{n+1} un conveniente punto intermedio tra 0 e x.

Consideriamo i polinomi di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.

(a) **Polinomi**. Notiamo che dato un polinomio $p(x)$ di grado n, il suo resto in forma di Lagrange associato al polinomio di Taylor/Mac Laurin di grado n è identicamente nullo, poiché la derivata di ordine $(n+1)$ si annulla. Concludiamo che *il polinomio di Taylor/Mac Laurin di grado n di $p(x)$ coincide con $p(x)$ stesso.*

(b) **Le funzioni razionali fratte.** La funzione razionale fratta $1/(1+x)$ ammette il seguente sviluppo all'ordine n

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

(c) **Le funzioni algebriche.** La funzione $(1+x)^\alpha$ ammette il seguente sviluppo al primo ordine

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x).$$

(d) **Le funzioni esponenziali e logaritmiche.** Valgono le seguenti approssimazioni con il polinomio di Mac Laurin di grado n

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

e

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

(e) **Le funzioni circolari**. Valgono le seguenti approssimazioni

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

e

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Per la funzione tangente si ha l'approssimazione al quinto ordine

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

La funzione arcotangente ammette invece l'approssimazione

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

(f) **Le funzioni iperboliche.** Valgono i seguenti sviluppi facilmente deducibili da quello di e^x e dalle definizioni di seno e coseno iperbolici:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

e

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

6. La conoscenza degli sviluppi sopra riportati semplifica notevolmente lo studio dei limiti delle funzioni: essi permettono di individuare gli infinitesimi principali per $x \to 0$ e dunque di concentrarci su di essi per il calcolo dei limiti dei rapporti come assicurato dalla teoria degli infinitesimi. Ad esempio calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x - \sin x - 2}{x^3}.$$

Il numeratore ammette lo sviluppo

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) - 2$$

per cui l'infinitesimo principale è dato da

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!} = \frac{x^3}{3}.$$

Dunque il limite diviene

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Esercizi

1. Trovare due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ non derivabili in un punto ma tali che la loro somma sia derivabile.

2. Trovare due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ non derivabili in un punto ma tali che il loro prodotto sia derivabile.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Dimostrare che f è derivabile su $\mathbb{R}$ ma con derivata prima discontinua in $x = 0$.

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile: dimostrare che f' assume su I tutti i valori intermedi tra $f'(a)$ e $f'(b)$ (Teorema di Darboux).

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$
Dimostrare che non esiste alcuna funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con $F' = f$ su $\mathbb{R}$.

6. Siano I un intervallo aperto, $x_0 \in I$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ continua su I e derivabile su $I \setminus \{x_0\}$. Supponiamo che
$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = a.$$
Dimostrare che f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = a$.

7. Siano I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esistono $\alpha, C > 0$ tali che per ogni $x_1, x_2 \in I$
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^{1+\alpha}.$$
Dimostrare che f è costante su I.

8. Siano I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dimostrare che f è lipschitziana di costante L su I se e solo se $\sup_I |f'| \leq L$.

9. Trovare una funzione lipschitziana su $\mathbb{R}$ ma non derivabile.