

Capitolo 8

Equazioni differenziali ordinarie

8.1 Formulazione del problema

In questa sezione formuleremo matematicamente il problema delle equazioni differenziali ordinarie e faremo alcune osservazioni elementari introduttive.

1. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione in cui l'incognita è una funzione di una variabile reale: essa stabilisce un legame tra tale funzione incognita e le sue derivate. Equazioni differenziali ordinarie sono ad esempio

$$y'(x) = x + \arctan y(x)$$

e

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \sin t.$$

Nella prima, l'incognita è una funzione $y(x)$ tale che la sua derivata nel punto x generico del suo dominio sia uguale a x sommato all'arcotangente del valore $y(x)$ stesso. Si dice che essa è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, perché la funzione incognita vi compare derivata una volta. Essendo chiaro che la variabile indipendente è x , si usa indicare l'equazione anche nella forma

$$y' = x + \arctan y.$$

Nella seconda equazione, l'incognita è una funzione $z(t)$ tale che derivata due volte, sommata a due volte la sua derivata prima e sommata a lei stessa dà come risultato $\sin t$. È un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che si può scrivere nella forma

$$z'' + 2z' + z = \sin t$$

omettendo la dipendenza da t .

2. Il problema della primitiva può essere visto come una particolare equazione differenziale: infatti trovare la primitiva di f equivale proprio a risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x).$$

Essendo la primitiva (su un intervallo) definita a meno di una costante, vediamo che in generale un'equazione differenziale del primo ordine ammette infinite soluzioni: dunque per determinare una precisa soluzione occorre assegnare una condizione ulteriore, ad esempio il valore della funzione in un punto. Similmente per un'equazione del secondo ordine sono necessarie in generale due condizioni per determinarne una soluzione precisa. In generale per un'equazione di ordine n , sono necessarie n condizioni.

3. Concludendo, un'equazione differenziale ordinaria è una equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Si dice che essa ha ordine n poiché la derivata massima che vi compare è quella n -esima. Per determinare una fra le funzioni che soddisfano all'equazione, si richiede che la funzione e le sue derivate fino all'ordine $n - 1$ in un punto x_0 assumano alcuni valori assegnati. Dunque nelle applicazioni si incontra il problema

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

che si dice **problema di Cauchy associato all'equazione differenziale**. Non ci occuperemo dello studio del problema dell'esistenza e dell'unicità della soluzione di un problema di Cauchy generale, poiché esso richiede strumenti avanzati. Il risultato è che, sotto condizioni generali su f , problemi del tipo

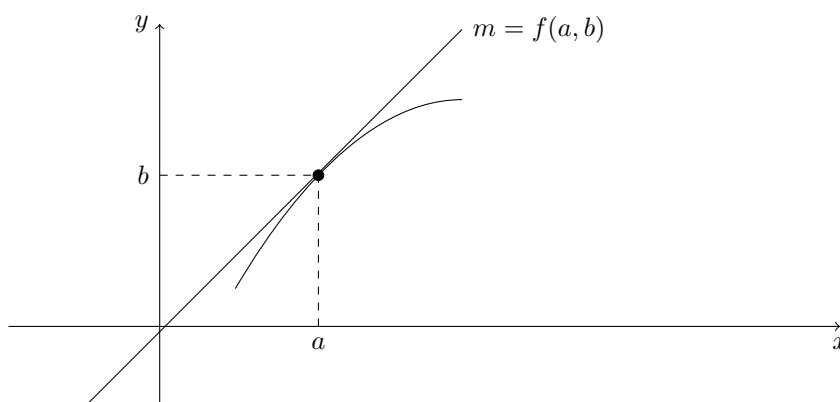
$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ammettono una ed una sola soluzione $y(x)$ definita in un intervallo sufficientemente piccolo contenente x_0 . L'equazione precedente si dice **equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale**. Nel seguito ci limiteremo allo studio e alla risoluzione di alcuni tipi di equazioni che ricorrono spesso nelle applicazioni.

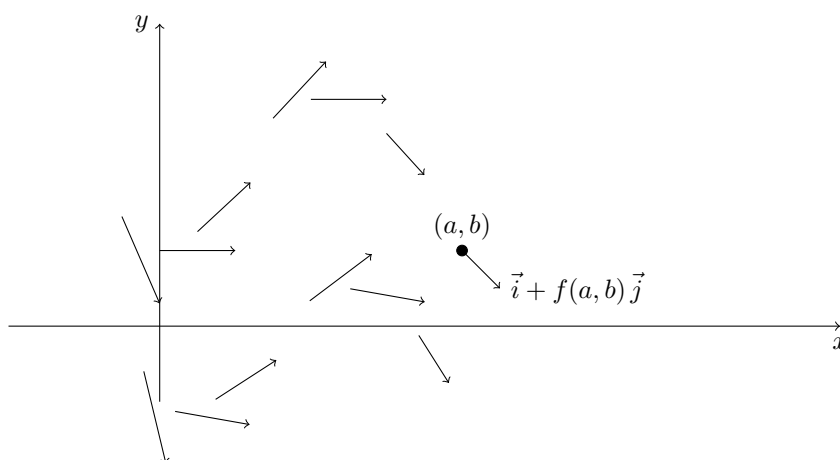
4. Possiamo dare un'interpretazione geometrica alle equazioni del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

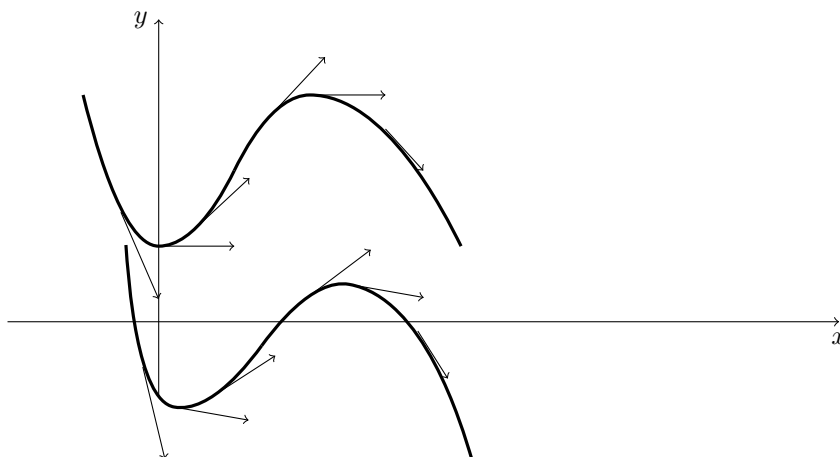
ed al teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy associato nel seguente modo. Supponiamo per semplicità che f sia definita in ogni punto (a, b) del piano (estendere le considerazioni al caso in cui f sia definita solo su un sottoinsieme del piano è facile). La funzione $y(x)$ è soluzione dell'equazione se il suo grafico, in ogni punto x in cui è definita, ammette retta tangente con coefficiente angolare dato da $f(x, y(x))$: se dunque il grafico passa per il punto del piano (a, b) , allora si ha che la tangente per $x = a$ alla curva ha coefficiente angolare $m = f(a, b)$.



Se dunque, in ogni punto (a, b) del piano, disegniamo un vettore inclinato come la retta di coefficiente angolare $f(a, b)$, cioè ad esempio disegniamo il vettore $\vec{i} + f(a, b)\vec{j}$,



allora trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ significa trovare le curve che sono punto per punto tangenti a tali vettori.



Le soluzioni del problema di Cauchy sono le curve che passano per il punto (x_0, y_0) . Affermare dunque che il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione per ogni x_0 e y_0 assegnati, significa geometricamente che per ogni punto (x_0, y_0) passa una ed una sola curva soluzione: dunque tali curve riempiono tutto il piano e non si intersecano mai.

5. Il problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in forma normale emerge in modo naturale in fisica. Supponiamo infatti che un punto P di massa m si muova lungo una retta soggetto ad una forza F dipendente dalla sua posizione, dalla sua velocità ed eventualmente dal tempo. Se $x(t)$ indica la sua posizione a tempo t , un ragionamento simile a quello visto in precedenza relativo all'interpretazione di $\dot{x}(t)$ come velocità istantanea di P porta a considerare

$$\ddot{x}(t)$$

come la sua *accelerazione istantanea*. Dunque la seconda legge di Newton afferma che il moto è governato dalla relazione

$$m\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

cioè da un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine in forma normale. Ad esempio, se P è soggetto ad una forza elastica $F = -kx$, si ha l'equazione

$$\ddot{x} = -kx,$$

essendo k la costante della molla. Essendo il moto completamente determinato dal fatto di conoscere posizione e velocità di P all'istante iniziale t_0 , la sua comprensione porta al problema di Cauchy

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0. \end{cases}$$

8.2 Equazioni a variabili separabili

Si tratta di equazioni del tipo

$$(8.1) \quad y' = f(y)g(x)$$

dove f, g sono funzioni continue definite su due intervalli I e J . Il problema di Cauchy associato è

$$(8.2) \quad \begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $x_0 \in J$ e $y_0 \in I$.

1. Per risolvere il problema di Cauchy (8.2), seguiamo un *procedimento formale* molto usato nelle applicazioni (esso può giustificarsi pienamente anche da un punto di vista teorico, ma non ce ne occuperemo): ponendo $y' = dy/dx$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

possiamo scrivere

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x) dx.$$

Integrando ambo i membri, arriviamo a

$$(8.3) \quad H(y) = G(x) + c,$$

dove H è una primitiva di $1/f$, G è una primitiva di g e $c \in \mathbb{R}$. Questa relazione definisce in forma implicita la soluzione y in funzione di x . La costante c si determina sostituendo la condizione iniziale: si ha

$$H(y_0) = G(x_0) + c \implies c = H(y_0) - G(x_0).$$

Il procedimento di risoluzione giustifica il nome di *equazioni a variabili separabili*: esse si risolvono tramite due integrazioni nelle variabili y e x separatamente.

2. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 8.1. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y \\ y(2) = 7. \end{cases}$$

Si ha $\frac{dy}{dx} = e^y$

$$\frac{dy}{e^y} = dx$$

da cui

$$-e^{-y} = x + c.$$

Tramite la condizione iniziale si ha

$$c = -e^{-7} - 2.$$

Otteniamo dunque

$$-e^{-y} = x - e^{-7} - 2$$

da cui

$$e^{-y} = e^{-7} + 2 - x$$

ed infine

$$y = -\ln(e^{-7} + 2 - x).$$

Esempio 8.2. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \sin t \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Qui l'incognita è una funzione $x(t)$. Ponendo $x' = dx/dt$ si ha

$$\frac{dx}{x} = \sin t \, dt$$

da cui

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \sin t \, dt$$

e quindi

$$\ln x = -\cos t + c.$$

Poiché $x(0) = 1$ si ha

$$\ln 1 = -1 + c$$

da cui $c = 1$. Otteniamo dunque

$$\ln x = 1 - \cos t$$

da cui

$$x(t) = e^{1-\cos t}.$$

Esempio 8.3. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy \sin y \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Notiamo che la funzione $y(x) = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale e soddisfa anche la condizione iniziale: per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, abbiamo che $y(x) = 0$ è la funzione che stiamo cercando.

8.3 Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui

Si tratta di equazioni del tipo

$$(8.4) \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

dove $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue definite su un intervallo I . Il problema di Cauchy associato è

$$(8.5) \quad \begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

1. Vediamo come risolvere il problema di Cauchy (8.5). Sia A una primitiva di a su I . Allora

$$e^{A(x)} [y'(x) + a(x)y(x)] = e^{A(x)} b(x).$$

Ma si ha

$$e^{A(x)} [y'(x) + a(x)y(x)] = [e^{A(x)} y(x)]'$$

per cui

$$[e^{A(x)} y(x)]' = e^{A(x)} b(x).$$

Integrando da x_0 a x si ottiene

$$e^{A(x)} y(x) - e^{A(x_0)} y(x_0) = \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds,$$

da cui, tenendo conto che $y(x_0) = y_0$, si ottiene

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[e^{A(x_0)} y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds \right].$$

Se supponiamo che $A(x_0) = 0$, cioè scegliamo come A la primitiva di a che vale 0 in x_0 , otteniamo la formula

$$(8.6) \quad y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds \right].$$

2. Riassumendo, la **formula risolutiva per il problema di Cauchy** (8.5) è data da

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds \right]$$

dove A è la primitiva di a su I che vale 0 in x_0 , cioè

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(s) ds.$$

3. Se poniamo $y_0 = c$ nella formula (8.6), al variare di $c \in \mathbb{R}$ otteniamo chiaramente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (8.4) (in questo caso $A(x)$ può essere una *qualunque* primitiva di $a(x)$).
4. Vediamo un esempio.

Esempio 8.4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = e^x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Si ha $a(x) = 2$ e $b(x) = e^x$. Dunque

$$A(x) = \int_1^x 2 ds = [2s]_1^x = 2(x-1).$$

Si ottiene

$$y(x) = e^{-2(x-1)} \left[3 + \int_1^x e^{2(s-1)} e^s ds \right].$$

Dunque

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2(x-1)} \left[3 + \int_1^x e^{3s-2} ds \right] = e^{-2(x-1)} \left[3 + \left[\frac{e^{3s-2}}{3} \right]_1^x \right] \\ &= e^{-2(x-1)} \left[3 + \frac{e^{3x-2}}{3} - \frac{e}{3} \right]. \end{aligned}$$

8.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Sono le equazioni della forma

$$(8.7) \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua. Tenendo conto degli esempi sulla molla e sul campo elettrico visti prima, la funzione $f(x)$ si dice *termine forzante* dell'equazione. L'equazione

$$(8.8) \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

si dice l'equazione omogenea associata alla precedente. Il problema di Cauchy associato è della forma

$$(8.9) \quad \begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

1. Per risolvere le equazioni (8.7), facciamo la seguente osservazione fondamentale: se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione, allora la differenza $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (8.8). Infatti si ha

$$\begin{aligned} & v''(x) + av'(x) + bv(x) \\ &= (y_1(x) - y_2(x))'' + a(y_1(x) - y_2(x))' + b(y_1(x) - y_2(x)) \\ &= [y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)] - [y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)] = f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Dunque la generica soluzione dell'equazione può esprimersi nella forma

$$y(x) = \tilde{y}(x) + (\text{soluzione generica dell'omogenea associata}),$$

dove $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. Dunque la **strategia** per risolvere il problema di Cauchy (8.9) per equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti è la seguente.

- (a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
 - (b) Determinare una soluzione particolare \tilde{y} dell'equazione di partenza.
 - (c) Determinare le costanti generiche che compaiono utilizzando le condizioni iniziali.
2. Consideriamo l'**equazione omogenea**

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Per trovarne tutte le soluzioni, si considera il **polinomio caratteristico**

$$P(z) = z^2 + az + b$$

e si pongono diverse alternative.

- (a) **Se P ammette due radici reali e distinte λ_1 e λ_2** (caso $a^2 - 4b > 0$), la soluzione generica dell'equazione omogenea è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- (b) **Se P ammette una sola radice reale λ di molteplicità due** (caso $a^2 - 4b = 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Se P ammette due radici complesse coniugate $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (caso $a^2 - 4b < 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 8.5. Data l'equazione

$$y'' - 4y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 4$ ammette le soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Esempio 8.6. Data l'equazione

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 2z + 1$ ammette come soluzione doppia $\lambda = 1$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

Esempio 8.7. Data l'equazione

$$y'' + y' + y = 0$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + z + 1$ ammette come soluzioni $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right].$$

3. La **determinazione di una soluzione particolare** \tilde{y} dell'equazione (8.7) è in generale un problema difficile. Esso può semplificarsi se il termine forzante $f(x)$ è della forma

$$(8.10) \quad f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

o

$$(8.11) \quad f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

dove R_k è un polinomio di grado k . Esempi di termini forzanti di questo tipo sono

$$f(x) = x^2 e^x, \quad f(x) = x, \quad f(x) = \sin 2x$$

oppure

$$f(x) = x^3 e^{2x} \cos 3x.$$

Per trovare una soluzione particolare, si considera il numero complesso

$$\tilde{z} = \alpha + i\beta$$

e si pongono due alternative.

- (a) Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ dell'equazione omogenea associata, allora esiste una soluzione particolare della forma

$$e^{\alpha x} [Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x)],$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k .

- (b) Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ con molteplicità h , allora esiste una soluzione particolare dell'equazione è della forma

$$x^h e^{\alpha x} [Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x)]$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k .

I polinomi generici Q_k e S_k si determinano sostituendo direttamente nell'equazione ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 8.8. Consideriamo l'equazione

$$y'' - 2y = 2e^x.$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ che ammette come radici $z = \pm\sqrt{2}$. Il termine forzante $f(x) = 2e^x$ è della forma (8.10) con la scelta $k = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 1$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione della forma

$$\tilde{y}(x) = ce^x.$$

Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere

$$ce^x - 2ce^x = 2e^x,$$

da cui $c = -2$. Concludiamo che una soluzione particolare è $\tilde{y}(x) = -2e^x$.

Esempio 8.9. Consideriamo l'equazione

$$(8.12) \quad y'' + 4y = 2 + \sin 2x.$$

Il termine forzante $f(x) = 2 + \sin 2x$ è somma di due termini forzanti

$$f_1(x) = 2 \quad \text{e} \quad f_2(x) = \sin 2x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione, grazie alla sua linearità, basta trovare due soluzioni particolari relative a f_1 e f_2 e sommarle tra loro, cioè basta trovare $\tilde{y}_1(x)$ e $\tilde{y}_2(x)$ tali che

$$(8.13) \quad \tilde{y}_1''(x) + 4\tilde{y}_1(x) = 2$$

e

$$(8.14) \quad \tilde{y}_2''(x) + 4\tilde{y}_2(x) = \sin 2x$$

e considerare $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$. Per quanto riguarda $f_1(x) = 2$, esso è del tipo (8.10) con $k = \alpha = \beta = 0$. Si ha $\tilde{z} = 0$, che non è radice del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Dunque esiste una soluzione particolare $\tilde{y}_1(x)$ di (8.13) della forma

$$\tilde{y}_1(x) = c.$$

Sostituendo in (8.13) si ricava

$$4c = 2 \implies c = \frac{1}{2}$$

cioè $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}$. Per quanto riguarda $f_2(x) = \sin 2x$, esso è della forma (8.11) con $k = \alpha = 0$ e $\beta = 2$. Dunque $\tilde{z} = 2i$, che è radice di molteplicità uno del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Esiste allora una soluzione particolare \tilde{y}_2 di (8.14) della forma

$$\tilde{y}_2(x) = x [c \cos 2x + d \sin 2x].$$

Dunque

$$\tilde{y}_2'(x) = c \cos 2x + d \sin 2x + x [-2c \sin 2x + 2d \cos 2x].$$

e

$$\tilde{y}_2''(x) = -4c \sin 2x + 4d \cos 2x + x [-4c \cos 2x - 4d \sin 2x].$$

Sostituendo in (8.14) si ha

$$-4c \sin 2x + 4d \cos 2x = \sin 2x$$

da cui

$$c = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad d = 0.$$

Si ha dunque

$$\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{4}x \cos 2x.$$

In conclusione, una soluzione particolare dell'equazione (8.12) è data da

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \cos 2x.$$

4. Vediamo un esempio di risoluzione di un problema di Cauchy seguendo la strategia vista al punto 1. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'' - 2y = 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ e

$$z^2 - 2 = 0 \implies z = \pm\sqrt{2}.$$

Si hanno due radici reali distinte $z_1 = \sqrt{2}$ e $z_2 = -\sqrt{2}$. La soluzione generica dell'equazione omogenea associata è data da

$$c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare: il termine forzante $f(x) = 2$ è della forma particolare considerata al punto precedente con la scelta $k = \alpha = \beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 0$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione particolare \tilde{y} della forma

$$\tilde{y}(x) = c.$$

Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere

$$-2c = 2,$$

cioè $c = -1$. Abbiamo dunque che la soluzione generica dell'equazione completa è

$$y(x) = -1 + c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Le costanti c_1, c_2 si determinano attraverso le condizioni iniziali. Poiché $y'(x) = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x}$, otteniamo da $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$

$$\begin{cases} -1 + c_1 + c_2 = -1 \\ \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La soluzione del problema è

$$y(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x} \right].$$

8.5 Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti

Si tratta di equazioni del tipo

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x),$$

dove $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

1. **La risoluzione di equazioni di questo tipo è analoga a quanto già visto per le equazioni di ordine due.** Si ha che le generica soluzione è della forma

$$y(x) = \tilde{y}(x) + (\text{soluzione generica dell'omogenea associata}),$$

dove $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. La soluzione generica dell'omogenea associata dipende da n costanti che vengono determinate attraverso le condizioni iniziali del problema.

2. La **generica soluzione dell'omogenea associata** si trova considerando il polinomio caratteristico

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$

Esso ha in generale n radici: a differenza che nel caso $n = 2$, tali soluzioni possono avere molteplicità $h > 2$. Per scrivere la generica soluzione dell'equazione omogenea, si procede come segue.

- (a) Si individuano tutte le radici di $P(z)$.
- (b) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice di $P(z)$ di molteplicità h , ad essa è associata una soluzione della forma

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{h-1} x^{h-1}) e^{\lambda x},$$

dove c_0, c_1, \dots, c_{h-1} sono costanti generiche.

- (c) Se $\alpha \pm i\beta$ è una coppia di radici complesse coniugate di $P(z)$ con molteplicità h , allora ad essa è associata una soluzione della forma

$$e^{\alpha x} \left[(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_{h-1} x^{h-1}) \cos(\beta x) + (f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_{h-1} x^{h-1}) \sin(\beta x) \right],$$

dove $d_0, d_1, \dots, d_{h-1}, f_0, f_1, \dots, f_{h-1}$ sono costanti generiche.

- (d) La generica soluzione dell'equazione omogenea è data dalla somma delle soluzioni dei punti (a) e (b), al variare di tutte le radici di $P(z)$.

Esempio 8.10. Consideriamo ad esempio l'equazione

$$y'''' - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Il polinomio caratteristico è

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4$$

che si può fattorizzare nel seguente modo

$$P(z) = (z - 1)^2(z^2 + 4).$$

Dunque le radici di $P(z)$ sono $\lambda = 1$ con molteplicità 2, e la coppia di radici complesse coniugate $\pm 2i$. Dunque la generica soluzione dell'equazione è data da

$$y(x) = (c_0 + c_1x)e^x + d_0 \cos 2x + f_0 \sin 2x,$$

con $c_0, c_1, d_0, f_0 \in \mathbb{R}$.

3. Come nel caso $n = 2$, la determinazione di una soluzione particolare dell'equazione diviene semplice se il termine forzante è del tipo

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

o

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

dove R_k è un polinomio di grado k . In tal caso si considera il numero complesso $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ e si procede come segue.

- (a) Se \tilde{z} non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ dell'equazione omogenea associata, allora esiste una soluzione particolare della forma

$$e^{\alpha x} [Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x)],$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k .

- (b) Se \tilde{z} è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ di molteplicità h , allora esiste una soluzione particolare dell'equazione della forma

$$x^h e^{\alpha x} [Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x)]$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k .

I polinomi generici Q_k e S_k si determinano sostituendo nell'equazione ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 8.11. Consideriamo l'equazione

$$y'''' - 2y'''' + 5y'' - 8y' + 4y = e^{2x}$$

e determiniamone una soluzione particolare: si ha $\tilde{z} = 2$, ed esso non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$, le cui radici sono, per quanto visto all'esempio precedente, $z = 1$ e $z = \pm 2i$. Dunque l'equazione ammette una soluzione particolare della forma $\tilde{y}(x) = ce^{2x}$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$(16c - 16c + 20c - 16c + 4c)e^{2x} = e^{2x}$$

da cui $c = 1/8$. Dunque una soluzione particolare è data da $\tilde{y}(x) = \frac{1}{8}e^{2x}$. La soluzione generale dell'equazione è data dunque da

$$y(x) = \frac{1}{8}e^{2x} + (c_0 + c_1x)e^x + d_0 \cos 2x + f_0 \sin 2x,$$

dove c_0, c_1, d_0, f_0 sono generiche costanti.

Esercizi

1. Dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

non ammette soluzioni.

2. Dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni.

3. Trovare una soluzione del problema

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$. (Suggerimento: derivando la prima equazione si ottiene $x'' = x' + y'$, per cui si può sostituire nella seconda...)

4. Trovare la funzione $z(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ che risolve il problema

$$\begin{cases} z'(t) = iz(t) \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

5. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$. (Suggerimento: scrivi $z(t) = x(t) + iy(t)$ e trova l'equazione corrispondente per z .)