Capitolo 6

Serie numeriche

Nel capitolo precedente abbiamo visto che sotto opportune condizioni su una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si ha lo sviluppo di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

È naturale domandarsi sotto quali condizioni la somma finita possa sostituirsi con una *somma infinita*, cioè mandare in un certo senso il grado del polinomio di Taylor all'infinito. Affinché la domanda sia ben posta, è necessario definire precisamente il concetto di somma infinita di numeri reali: di questo si occupa la teoria delle serie numeriche.

6.1 Definizione di serie numerica

Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, vogliamo dare un senso, se possibile, alla somma infinita

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots$$

1. Per dare un senso alla somma infinita, è naturale innanzitutto considerare le somme dei primi k termini:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_1 &= a_0 + a_1 \\ S_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_k &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

   Si pone la seguente definizione.

Definizione 6.1 (Serie numerica). *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Diciamo* **serie numerica** *associata alla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la coppia*

$$\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$$

che verrà indicata con il simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Il numero S_k è detto la **somma parziale k-esima** *o* **ridotta k-esima** *della serie. La successione $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è detta* **successione delle ridotte** *della serie.*

Se i numeri S_k convergono per $k \to \infty$ ad un numero $S \in \mathbb{R}$, sarà naturale considerare S come il valore della somma infinita degli a_n. Poniamo dunque la seguente definizione.

Definizione 6.2 (Serie convergenti, divergenti ed oscillanti). *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

la serie numerica associata. Sia $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la successione delle ridotte k-esime della serie.

(a) Diremo che la serie è **convergente** *e ammette per somma $S \in \mathbb{R}$ se*

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = S.$$

In tal caso scriveremo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

(b) Diremo che la serie **diverge positivamente** *se*

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = +\infty,$$

ed in tal caso scriveremo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(c) Diremo che la serie **diverge negativamente** *se*

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = -\infty,$$

ed in tal caso scriveremo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$.

(d) Diremo che la serie **oscilla** *o* **è oscillante** *se la successione $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ non ammette limite per $k \to \infty$.*

Per ogni $N \in \mathbb{N}$ indicheremo con $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ la serie associata alla successione $(a_n)_{n\geq N}$: si tratta della somma dei termini della successione da N in poi.

2. Diremo che due serie **hanno lo stesso carattere** se sono entrambe convergenti, o divergenti o oscillanti. Valgono le seguenti proprietà .

   (a) Il carattere di una serie non si altera moltiplicando tutti i termini per un coefficiente $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$; nel caso in cui la serie non sia oscillante, si ha
   $$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

   (b) Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ per ogni $N \in \mathbb{N}$. Dunque *il carattere di una serie non cambia se si omettono un numero finito di addendi.*

   (c) Date due serie non oscillanti $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, non divergenti in senso discorde, vale l'uguaglianza
   $$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

6.2 Alcuni esempi notevoli

Vediamo due esempi notevoli di serie numeriche: la serie geometrica e quella telescopica.

1. Consideriamo $q \in \mathbb{R}$ e la serie
   $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$
   cioè la somma infinita
   $$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$
   Tale serie è detta la **serie geometrica di ragione** q. Sappiamo che se $q \neq 1$ si ha
   $$S_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$
   Se invece $q = 1$, si ha banalmente $S_k = k + 1$. Dunque si ha
   $$\lim_{k\to\infty} S_k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$
   Abbiamo dunque il seguente risultato.

   Proposizione 6.3. *La serie geometrica di ragione $q \in \mathbb{R}$ è convergente se e solo se $|q| < 1$ ed in tal caso ha per somma $1/(1-q)$. Se $q \geq 1$ la serie diverge positivamente, mentre se $q \leq -1$ la serie oscilla.*

2. Consideriamo la serie
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\dots$$
cioè la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$
Notiamo che
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$
Dunque otteniamo
$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{k+1}.$$
Si ha allora $\lim_{k\to\infty}S_k=1$, così che la serie è convergente ed ha per somma 1. La serie considerata è un caso particolare di **serie telescopica**. Esse sono del tipo
$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_n-b_{n+1}).$$
Calcolare la ridotta k-esima della serie è semplice essendo
$$S_k=\sum_{n=0}^{k}(b_n-b_{n+1})=b_0-b_1+b_1-b_2+\dots+b_k-b_{k+1}=b_0-b_{k+1}.$$
Ricaviamo che S_k converge se e solo se la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l e si ha per somma
$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_n-b_{n+1})=b_0-l.$$

6.3 Criterio generale di convergenza

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ e detta $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la successione delle ridotte k-esime, poniamo per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $p\geq 1$
$$R_{n,p}:=S_{n+p}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}.$$

1. Vale il seguente *criterio generale di convergenza di una serie.*

   Proposizione 6.4. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali, e sia $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ la serie associata. Allora la serie è convergente se e solo se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $N\in\mathbb{N}$ tale che per ogni $n\geq N$ e $p\geq 1$ si ha*
$$|R_{n,p}|<\varepsilon.$$

Dimostrazione. La serie è convergente se e solo se la successione $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è convergente. In particolare dunque la convergenza della serie equivale al fatto che $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sia una successione di Cauchy. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ deve esistere N tale che per ogni $h, k \geq N$ si ha

$$|S_h - S_k| < \varepsilon.$$

Il risultato segue scegliendo allora $k = n \geq N$ e $h = n + p$. ■

Otteniamo come corollario la seguente condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica.

Corollario 6.5 (Condizione necessaria per la convergenza). *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Notiamo che scegliendo $p = 1$ si ha $R_{n,1} = a_{n+1}$. Dalla proposizione precedente, dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni $n \geq N$ si ha

$$|a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Questo significa precisamente che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ che è la tesi. ■

2. Il fatto che a_n sia infinitesima per $n \to \infty$ è **condizione necessaria ma non sufficiente** a garantire la convergenza della serie associata. Consideriamo ad esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che è detta la **serie armonica**. La serie non è convergente: infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$ si ha

$$R_{n,p} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}.$$

Fissato n, il secondo membro tende a 1 per $p \to +\infty$: questo significa che la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza non è soddisfatta (è violata per esempio scegliendo $\varepsilon = 1/2$). Possiamo dire non solo che la serie armonica non converge, ma affermare che essa diverge positivamente. Infatti la successione delle ridotte è monotona crescente e dunque ammette limite: non potendo essere tale limite finito, si ha che vale necessariamente $+\infty$.

6.4 Serie a termini non negativi

In questa sezione ci occupiamo delle serie **a termini non negativi** , cioè delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{con } a_n \geq 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Per esse è possibile stabilire dei criteri per dedurre il loro carattere.

1. La successione delle ridotte S_k risulta monotona crescente: infatti per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$S_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = a_{k+1} + \sum_{n=0}^{k} a_n = a_{k+1} + S_k \geq S_k.$$

   Dunque $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ risulta o convergente o divergente positivamente. Si ha dunque il seguente risultato.

   Proposizione 6.6. *Una serie a termini non negativi o è convergente o è divergente positivamente.*

2. Il primo criterio di convergenza per serie a termini non negativi è quello del confronto.

   Proposizione 6.7 (Criterio del confronto). *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini non negativi tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$*

$$a_n \leq b_n.$$

   Allora valgono i seguenti fatti.

   (a) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è convergente, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

   (b) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge positivamente, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge positivamente.

   Dimostrazione. Siano $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(S'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la successione delle ridotte k-esime delle due serie. Si ha chiaramente $0 \leq S_k \leq S'_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Inoltre sappiamo che le due successioni ammettono limite per $k \to \infty$ e che per confronto

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} S_k \leq \lim_{k \to \infty} S'_k.$$

   Se dunque $\lim_{k \to \infty} S'_k = S' \in \mathbb{R}$, anche $\lim_{k \to \infty} S_k \in \mathbb{R}$ ed il punto (a) è dimostrato. Se invece $\lim_{k \to \infty} S_k = +\infty$, anche $\lim_{k \to \infty} S'_k = +\infty$ ed il punto (b) è così dimostrato.
   ■

Esempio 6.8. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. Poiché si ha

$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

e la serie associata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ è convergente (serie geometrica di ragione $1/2$), si ricava per confronto che anche la serie iniziale è convergente.

3. Il seguente criterio è fondamentale nelle applicazioni.

Proposizione 6.9 (Criterio del confronto asintotico). *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ una serie a termini positivi. Se*

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty,$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Sia

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in]0, +\infty[.$$

Considerando $\varepsilon = \frac{l}{2}$, per la definizione di limite si ha che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$

$$l - \frac{1}{2}l < \frac{a_n}{b_n} < l + \frac{1}{2}l$$

da cui

$$\frac{l}{2}b_n < a_n < \frac{3l}{2}b_n.$$

Deduciamo allora che la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

è maggiorata dalla serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{3l}{2}b_n$$

e maggiora la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{l}{2}b_n.$$

La tesi discende allora dal criterio del confronto. ∎

4. Il criterio del confronto asintotico viene utilizzato nello studio delle serie modificando il termine generale a_n in un termine equivalente b_n la cui serie associata è più semplice da studiare. L'equivalenza verrà indicata con la scrittura $a_n \sim b_n$. Spesso è utile il confronto con la serie notevole

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Vedremo più avanti che essa converge se e solo se

$$\begin{cases} \alpha > 1 \text{ e per ogni } \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1. \end{cases}$$

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \sin \frac{1}{n} \right).$$

Si tratta di una serie a termini positivi. Inoltre si ha

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 - \sin \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Dunque la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ed è pertanto convergente.

5. Passiamo ora al criterio del rapporto.

Proposizione 6.10 (Criterio del rapporto). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Allora valgono i seguenti fatti.*

(a) Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

la serie è convergente.

(b) Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

la serie diverge positivamente.

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Per la definizione di limite, esistono $0 < \varepsilon < 1$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n \geq N$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \varepsilon.$$

Si ottiene dunque per ogni $n \geq N$

$$a_{n+1} < (1-\varepsilon)a_n < (1-\varepsilon)^2 a_{n-1} < \cdots < (1-\varepsilon)^{n+1-N} a_N$$

da cui

$$a_n \leq (1-\varepsilon)^{n-N} a_N.$$

Dunque la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ è maggiorata dalla serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_N}{(1-\varepsilon)^N}(1-\varepsilon)^n$$

che risulta convergente essendo geometrica di ragione $(1-\varepsilon) \in \,]0,1[$. Ricaviamo dunque che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ed il punto (a) è dimostrato.

Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Per la definizione di limite, esistono $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n \geq N$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 + \varepsilon.$$

Si ottiene dunque per ogni $n \geq N$

$$a_{n+1} > (1+\varepsilon)a_n > (1+\varepsilon)^2 a_{n-1} > \cdots > (1+\varepsilon)^{n+1-N} a_N$$

da cui

$$a_n \geq (1+\varepsilon)^{n-N} a_N.$$

Dunque la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ è minorata dalla serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_N}{(1+\varepsilon)^N}(1+\varepsilon)^n$$

che risulta divergente positivamente essendo geometrica di ragione $(1+\varepsilon) > 1$. Ricaviamo dunque che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge positivamente ed il punto (b) è dimostrato.

■

Esempio 6.11. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Dunque il limite del rapporto esiste e vale $1/e$: essendo tale valore minore di 1, per il criterio del rapporto la serie è convergente. Notiamo come conseguenza della condizione necessaria di convergenza che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Tale risultato non è di semplice verifica diretta.

Osservazione 6.12. Notiamo che il criterio del rapporto applicato alle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

produce come limite 1: nel primo caso la serie è convergente, mentre nel secondo diverge positivamente. Dunque concludiamo che *se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

nulla si può concludere sul carattere della serie.

6. Il criterio della radice n-esima è il seguente (omettiamo la dimostrazione).

Proposizione 6.13 (Criterio della radice n-esima). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Allora valgono i seguenti fatti.*

(a) Se

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

la serie è convergente.

(b) Se

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

la serie diverge positivamente.

Esempio 6.14. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \qquad x \geq 0.$$

Applicando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

per cui la serie risulta convergente.

Osservazione 6.15. Come nel caso del criterio del rapporto, si ha che *se*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

nulla si può concludere sul carattere della serie.

6.5 Serie a termini di segno alterno

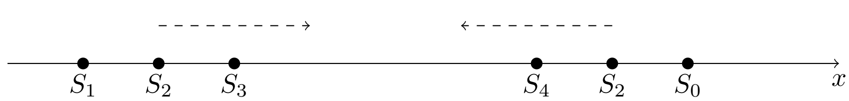
Le serie a termini di segno alterno sono quelle del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{con } a_n \geq 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Per esse vale il seguente criterio di convergenza.

Proposizione 6.16 (Criterio di Leibnitz). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie a termini di segno alterno. Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ed infinitesima, allora la serie converge.*

Dimostrazione. Consideriamo la successione $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ delle ridotte.



Notiamo che

$$S_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \cdots \geq S_{2n} \geq \ldots$$

e

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \ldots$$

cioè le ridotte di indice pari formano una successione decrescente mentre quelle di indice dispari formano una successione crescente. Infatti, essendo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente si ha

$$\begin{aligned} S_2 &= S_0 - a_1 + a_2 &\leq S_0 \\ S_4 &= S_2 - a_3 + a_4 &\leq S_2 \\ &\vdots \\ S_{2n+2} &= S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} &\leq S_{2n}. \end{aligned}$$

Similmente si prova che le ridotte di indice dispari formano una successione crescente. Notiamo poi che

$$S_1 \leq S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_0.$$

Siano S e S' i limiti delle due successioni di ridotte. Essendo a_n infinitesima, grazie alla relazione precedente si ha $S = S'$ e

$$S_1 \leq S \leq S_0,$$

cioè la successione delle ridotte converge a $S \in \mathbb{R}$. La serie è dunque convergente e la tesi è dimostrata. ■

Esempio 6.17. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Poiché la successione $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ed infinitesima, la serie risulta convergente grazie al criterio di Leibnitz.

6.6 Convergenza assoluta

Stabiliamo ora un criterio di convergenza per serie i cui termini non siano sottoposti a restrizioni di segno. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 6.18. *Diremo che una serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge assolutamente** *se converge la serie dei moduli dei suoi termini, cioè se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

1. Vale il seguente criterio.

   Proposizione 6.19. *Una serie convergente assolutamente è convergente.*

Dimostrazione. Vediamo che il criterio generale di convergenza è soddisfatto. Poiché la serie dei moduli $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ e $p \geq 1$ si ha

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Notiamo che

$$|R_{n,p}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

per cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ soddisfa il criterio generale di convergenza. La tesi è dunque dimostrata. ∎

2. Notiamo che una serie convergente non è necessariamente assolutamente convergente. Infatti la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$
risulta convergente per il criterio di Leibnitz, mentre la serie dei moduli risulta divergente essendo essa data dalla serie armonica.

6.7 Serie di Taylor

Abbiamo sviluppato tutti gli strumenti che ci permettono di completare lo studio dell'approssimazione di funzioni tramite polinomi affrontato in precedenza ed a cui abbiamo accennato all'inizio di questo capitolo.

1. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ che ammette le derivate di ogni ordine su I intervallo aperto può approssimarsi con polinomi di grado sempre più elevato: se $x_0 \in I$, si può scrivere per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{6.2}$$

essendo x_{n+1} un conveniente punto intermedio tra x_0 e x. Ci domandiamo sotto quali ipotesi su f possa scriversi per ogni $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

cioè scrivere $f(x)$ come somma di una serie. Se questo è possibile, diremo che f è **sviluppabile in serie di Taylor** su I. Se $x_0 = 0$, si parla di sviluppabilità in **serie di Mac-Laurin**.

2. Grazie all'uguaglianza (6.2) si ha che la sviluppabilità di f dipende dal comportamento del resto in forma di Lagrange dell'approssimazione e precisamente dal fatto che esso sia infinitesimo. Supponiamo ad esempio le derivate di f siano uniformemente limitate su I, cioè esista $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_I |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

   Allora il resto in forma di Lagrange ammette la seguente stima per ogni $x \in I$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   Il secondo membro tende a zero per $n \to \infty$: questo discende dal fatto che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

   è convergente (vedi l'Esempio 6.14) usando la condizione necessaria di convergenza.

   Vale dunque il seguente criterio di *sviluppabilità in serie di Taylor.*

   Proposizione 6.20 (Sviluppabilità in serie di Taylor). *Siano I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte su I e $x_0 \in I$. Supponiamo che le derivate di f su I siano uniformemente limitate. Allora f è sviluppabile in serie di Taylor su I, cioè per ogni $x \in I$ possiamo scrivere*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

3. Risultano sviluppabili in serie di Mac-Laurin su $\mathbb{R}$ ad esempio la funzione esponenziale e quelle circolari. Infatti si ha

$$D_n(e^x) = e^x$$

   per cui su ogni intervallo limitato I contenente l'origine si ha $sup_{x \in I}|D_n(e^x)| \leq M$ con $M > 0$. Dunque possiamo scrivere per ogni $x \in I$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

   Essendo I arbitrario, si ha che lo sviluppo precedente vale per ogni $x \in \mathbb{R}$. Similmente, tenendo conto che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |D_n(\sin x)| = 1 \qquad \text{e} \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} |(D_n \cos x)| = 1$$

si ha la validità degli sviluppi in serie di Mac-Laurin

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4. Non tutte le funzioni infinitamente derivabili su un intervallo sono sviluppabili in serie di Taylor: esistono esempi di funzioni tali che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

non sia convergente su I ed anche esempi in cui essa è convergente su I ma con somma diversa da $f(x)$.

Esercizi

1. Mostrare che le conclusioni del criterio del rapporto valgono sotto le relazioni
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \text{e} \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

2. Mostrare che le conclusioni del criterio della radice n-esima valgono sotto le relazioni
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \qquad \text{e} \qquad \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1.$$

3. Trovare due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ a termini non negativi che siano rispettivamente convergente e divergente e tali che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1.$$

4. Dimostrare la seguente variante del criterio del confronto asintotico.

   (a) Se
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty,$$
   allora se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

   (b) Se
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0,$$
   allora se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge positivamente anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge positivamente.

5. Dimostrare il seguente criterio dovuto a Cauchy.

   Criterio di Condensazione di Cauchy. Sia a_n positivo e decrescente. Posto $b_n = 2^n a_{2^n}$, si ha che le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ha lo stesso carattere.

6. Applicare il criterio di condensazione di Cauchy per dedurre il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$
al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7. Trovare una successione positiva ed infinitesima $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ non converge.

8. Dimostrare la seguente relazione dovuta ad Abel. Dati $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ numeri reali (o complessi) e posto
$$a_i' = a_{i+1} - a_i \qquad \text{e} \qquad B_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i$$
si ha
$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = a_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_i' B_i.$$

9. Dimostrare il seguente criterio di Abel-Dirichlet: siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente ed infinitesima e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata (B_i è la ridotta i-esima della serie $\sum_n b_n$). Allora la serie $\sum_n a_n b_n$ risulta convergente.

10. Verificare che il criterio di Leibnitz è un caso particolare del criterio di Abel-Dirichlet.

11. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente ed infinitesima. Verificare che le serie
$$\sum_n a_n \sin(n\vartheta) \qquad \text{e} \qquad \sum_n a_n \cos(n\vartheta)$$
sono convergenti per $\vartheta \neq 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. (Suggerimento: per calcolare $\sum_{k=1}^n \sin(k\vartheta))$ o $\sum_{k=1}^n \cos(k\vartheta))$ per applicare il criterio di Abel-Dirichlet, calcolare $\sum_{k=1}^n e^{ik\vartheta}$ e dividere poi in parte reale e parte immaginaria.)

12. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$
ammette le derivate di ogni ordine ma non è sviluppabile in serie di Mac Laurin in nessun intorno di $x = 0$.