Capitolo 2

Equazioni differenziali ordinarie

2.1 Formulazione del problema

In questa sezione formuleremo matematicamente il problema delle equazioni differenziali ordinarie e faremo alcune osservazioni elementari introduttive.

1. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione in cui l'incognita è una funzione di una variabile reale: essa stabilisce un legame tra tale funzione incognita e le sue derivate. Equazioni differenziali ordinarie sono ad esempio

   $$y'(x) = x + \arctan y(x)$$

   e

   $$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \sin t.$$

   Nella prima, l'incognita è una funzione $y(x)$ tale che la sua derivata nel punto x generico del suo dominio sia uguale a x sommato all'arcotangente del valore $y(x)$ stesso. Si dice che essa è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, perché la funzione incognita vi compare derivata una volta. Essendo chiaro che la variabile indipendente è x, si usa indicare l'equazione anche nella forma

   $$y' = x + \arctan y.$$

   Nella seconda equazione, l'incognita è una funzione $z(t)$ tale che derivata due volte, sommata a due volte la sua derivata prima e sommata a lei stessa dà come risultato $\sin t$. È un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che si può scrivere nella forma

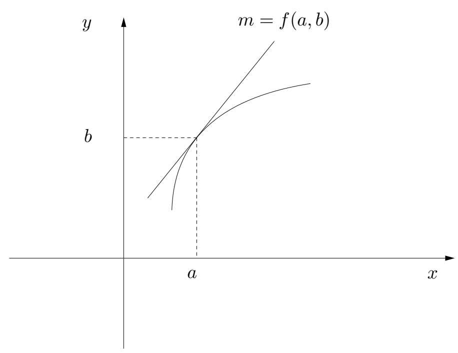
   $$z'' + 2z' + z = \sin t$$

   omettendo la dipendenza da t.

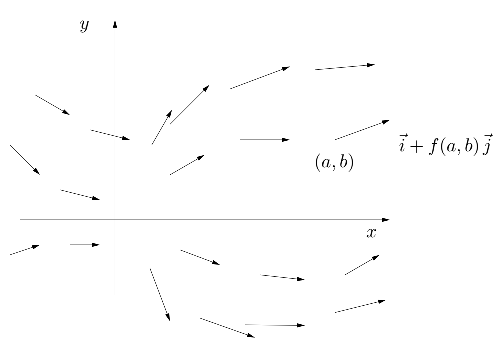
2. Il problema della primitiva può essere visto come una particolare equazione differenziale: infatti trovare la primitiva di f equivale proprio a risolvere l'equazione differenziale
$$y'(x) = f(x).$$
Essendo la primitiva (su un intervallo) definita a meno di una costante, vediamo che in generale un'equazione differenziale del primo ordine ammette infinite soluzioni: dunque per determinare una precisa soluzione occorre assegnare una condizione ulteriore, ad esempio il valore della funzione in un punto. Similmente per un'equazione del secondo ordine sono necessarie in generale due condizioni per determinarne una soluzione precisa. In generale per un'equazione di ordine n, sono necessarie n condizioni.

3. Concludendo, un'equazione differenziale ordinaria è una equazione del tipo
$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$
Si dice che essa ha ordine n poiché la derivata massima che vi compare è quella n-esima. Per determinare una fra le funzioni che soddisfano all'equazione, si richiede che la funzione e le sue derivate fino all'ordine $n-1$ in un punto x_0 assumano alcuni valori assegnati. Dunque nelle applicazioni si incontra il problema
$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$
che si dice **problema di Cauchy associato all'equazione differenziale**. Non ci occuperemo dello studio del problema dell'esistenza e dell'unicità della soluzione di un problema di Cauchy generale, poiché esso richiede strumenti avanzati. Il risultato è che, sotto condizioni generali su f, problemi del tipo
$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$
ammettono una ed una sola soluzione $y(x)$ definita in un intervallo sufficientemente piccolo contenente x_0. L'equazione precedente si dice **equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale**. Nel seguito ci limiteremo allo studio e alla risoluzione di alcuni tipi di equazioni che ricorrono spesso nelle applicazioni.

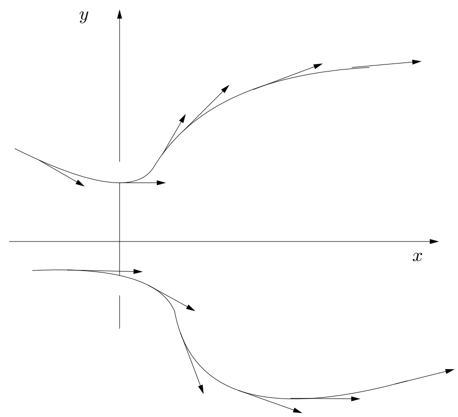
4. Possiamo dare un'interpretazione geometrica alle equazioni del primo ordine in forma normale
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
ed al teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy associato nel seguente modo. Supponiamo per semplicità che f sia definita in ogni punto (a, b) del piano (estendere le considerazioni al caso in cui f sia definita solo su un sottoinsieme del piano è facile). La funzione $y(x)$ è soluzione dell'equazione se il suo grafico, in ogni punto x in cui è definita, ammette retta tangente con coefficiente angolare dato da $f(x, y(x))$: se dunque il grafico passa per il punto del piano (a, b), allora si ha che la tangente per $x = a$ alla curva ha coefficiente angolare $m = f(a, b)$.



Se dunque, in ogni punto (a, b) del piano, disegnamo un vettore inclinato come la retta di coefficiente angolare $f(a, b)$, cioè ad esempio disegnamo il vettore $\vec{i} + f(a, b)\,\vec{j}$,



allora trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ significa trovare le curve che sono punto per punto tangenti a tali vettori.



Le soluzioni del problema di Cauchy sono le curve che passano per il punto (x_0, y_0). Affermare dunque che il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione per ogni x_0 e y_0 assegnati, significa geometricamente che per ogni punto (x_0, y_0) passa una ed una sola curva soluzione: dunque tali curve riempiono tutto il piano e non si intersecano mai.

2.2 Motivazioni

Prima di passare allo studio dei metodi di risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali ordinarie, vediamo alcuni problemi in cui esse intervengono in modo naturale.

1. **Svuotamento di un serbatoio.** Supponiamo di avere un serbatoio a forma di parallelepipedo di base A e altezza L, riempito d'acqua fino ad un livello h. Pratichiamo un foro di sezione a sulla sua base. L'acqua esce dal foro con una velocità pari a $\sqrt{2gh}$, dove $g = 9,8 m/s^2$ è l'accelerazione di gravità . Man mano che l'acqua defluisce, il suo livello h si abbassa, e la velocità di fuoriuscita diminuisce. Sia $h(t)$ il livello dell'acqua al tempo t. Vale la relazione
$$\frac{Ah(t) - Ah(t+\varepsilon)}{\varepsilon} \sim a\sqrt{2gh(t)}$$
che per $\varepsilon \to 0$ fornisce
$$-Ah'(t) = a\sqrt{2gh(t)}$$
da cui
$$h'(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)}.$$
Otteniamo una relazione tra la funzione $h(t)$ e la sua derivata prima $h'(t)$. Inoltre all'istante iniziale $t = 0$, abbiamo che $h(0)$ è precisamente il livello iniziale noto dell'acqua. L'equazione rientra nella categoria delle **equazioni a variabili separabili**: per risolverla si possono applicare i metodi che vedremo più avanti.

2. **Caduta di un grave.** Consideriamo un punto materiale di massa m soggetto alla sua forza peso e che possa muoversi solo in verticale. Se $z(t)$ indica la sua quota al tempo t, dalla seconda legge di Newton ricaviamo l'equazione differenziale
$$mz''(t) = -mg.$$
e cioè
$$z''(t) = -g.$$
Si tratta di una semplice equazione differenziale del secondo ordine. Per risolverla basta integrare due volte ottenendo
$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + at + b,$$
dove $a, b \in \mathbb{R}$. Dunque la generica soluzione dipende da due costanti: questo è in accordo con il fatto che $z(t)$ è completamente determinata conoscendo quota e velocità all'istante iniziale del punto materiale.

3. **Punto soggetto a forza elastica.** Supponiamo che un punto materiale P di massa m sia attaccato ad una molla di rigidità k. Se la molla è fissata nell'origine di un sistema unidimensionale, e $u(t)$ è la posizione del punto al tempo t, la molla esercita su P una forza pari a $-ku(t)$. Dunque per la seconda legge di Newton ricaviamo l'equazione differenziale
$$mu''(t) = -ku(t).$$
Questa si complica se assumiamo che sul punto P agisca anche una forza di attrito proporzionale alla velocità : otteniamo che
$$mu''(t) = -\alpha u'(t) - ku(t).$$
Se poniamo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e $\gamma = \frac{\alpha}{m}$ l'equazione può scriversi nella forma
$$u''(t) + \gamma u'(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$
Si tratta di un'equazione del secondo ordine **lineare omogenea a coefficienti costanti**. La soluzione dipenderà dalla posizione e velocità iniziali del punto: dunque dobbiamo aspettarci che la generica funzione che soddisfa l'equazione dipenda da due costanti.

Vedremo più avanti un metodo per risolvere tale equazione. Vediamo però ora come delle intuizioni fisiche possano guidarci ad indovinare alcune soluzioni.

Nel caso $\gamma = 0$, si ha l'equazione
$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$
Supponiamo, tanto per fissare le idee, che la massa del punto e la costante della molla siano tali che $\omega_0 = 5$. Allora l'equazione diviene
$$u''(t) + 25u(t) = 0.$$

Poiché ci aspettiamo che il sistema ammetta un moto oscillatorio, proviamo a vedere quali soluzioni l'equazione ammette della forma $A\cos(\alpha t)$. A ha a che fare con l'*ampiezza* dell'oscillazione, mentre α ha a che fare con il *periodo* dell'oscillazione. Se imponiamo a questa oscillazione di essere una soluzione dell'equazione, si ottiene che per ogni t deve essere

$$-A\alpha^2\cos(\alpha t) + 25A\cos(\alpha t) = 0$$

e cioè

$$A(25-\alpha^2)\cos(\alpha t) = 0.$$

La relazione è soddisfatta (per ogni t) se e solo se

$$A(25-\alpha^2) = 0.$$

Otteniamo allora che $A = 0$ oppure $\alpha = \pm 5$. Per $A = 0$ non c'è oscillazione, e dunque il risultato non è particolarmente interessante. Nel caso $\alpha = \pm 5$, otteniamo una cosa molto interessante: l'unico moto oscillatorio del tipo $A\cos(\alpha t)$ ammesso dal sistema ha come frequenza proprio 5, cioè $A\cos(5t)$.

Si vede subito che anche oscillazioni della forma $u(t) = B\sin(5t)$ sono ammesse dal sistema, così che una famiglia di soluzioni è data da

$$u(t) = A\cos 5t + B\sin 5t$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Essendo dipendente da due parametri, essa è la generica soluzione del problema: infatti il moto si determina attraverso due condizioni (posizione e velocità iniziali). Notiamo una cosa importante: $\pm 5i$ (che dimenticando l'unità immaginaria i forniscono la frequenza di oscillazione della soluzione) sono le radici del polinomio $p(z) = z^2 + 25$, che si chiama polinomio caratteristico dell'equazione.

Consideriamo il caso $\gamma \neq 0$: per fissare le idee supporremo $\omega_0 = 5$ e $\gamma = 4$: dunque l'equazione diviene

$$u''(t) + 4u'(t) + 25u(t) = 0.$$

Poiché agisce una forza di attrito, dobbiamo aspettarci uno smorzamento: l'ampiezza delle oscillazioni dovrebbe decrescere nel tempo. Se cerchiamo soluzioni della forma $u(t) = A(t)\cos(\alpha t)$ otteniamo con un conto diretto

$$u'(t) = A'(t)\cos(\alpha t) - \alpha A(t)\sin(\alpha t)$$

e

$$u''(t) = A''(t)\cos(\alpha t) - 2\alpha A'(t)\sin(\alpha t) - \alpha^2 A(t)\cos(\alpha t).$$

Dunque affinché $u(t) = A(t)\cos(\alpha t)$ sia soluzione dell'equazione deve essere

$$\begin{aligned} u''(t) + 4u'(t) + 25u(t) = \cos(\alpha t)\left[A''(t) - \alpha^2 A(t) + 4A'(t) + 25A(t)\right] \\ + \sin(\alpha t)\left[-2\alpha A'(t) - 4\alpha A(t)\right] = 0. \end{aligned}$$

Annulliamo le espressioni tra parentesi. Si ha

$$-2\alpha A'(t) - 4\alpha A(t) = 0$$

e se $\alpha \neq 0$ si ha

$$A'(t) + 2A(t) = 0.$$

Una possibile scelta può essere $A(t) = Ce^{-2t}$. Nota che $A(t)$ è decrescente nel tempo, e questo ce lo aspettavamo. Sostituendo $A(t)$ nell'altra parentesi quadra, si ottiene

$$Ce^{-2t}\left[-4 - \alpha^2 + 25\right] = 0$$

da cui $\alpha^2 = 21$. Dunque otteniamo che il sistema ammette oscillazioni smorzate del tipo

$$u(t) = Ce^{-2t}\cos\left(\sqrt{21}t\right)$$

o più in generale (ragionando su $u(t) = B(t)\sin(\alpha t)$)

$$u(t) = e^{-2t}\left[C_1\cos\left(\sqrt{21}t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{21}t\right)\right].$$

Notiamo che $-2 \pm i\sqrt{21}$ (tali numeri complessi racchiudono proprio le informazioni su smorzamento e frequenza d'oscillazione della soluzione) sono le radici del polinomio caratteristico $p(z) = z^2 + 4z + 25$.

4. **Punto soggetto a forza elastica e forza esterna.** Al sistema studiato al punto precedente, aggiungiamo una forza esterna oscillante del tipo $F\cos(\omega t)$. Otteniamo l'equazione

$$u''(t) + \gamma u'(t) + \omega_0^2 u(t) = F\cos(\omega t).$$

A differenza dell'equazione del punto precedente, il secondo membro è non nullo. La forza $F\cos(\omega t)$ genererà oscillazioni che andranno a sovrapporsi a quelle naturali del sistema. Si parla dunque di **oscillazioni forzate**.

Consideriamo il caso particolare

$$u''(t) + 25u(t) = \cos(4t).$$

Vediamo che il sistema ammette oscillazioni proprio a frequenza uguale a 4, cioè quella del termine forzante. Se cerchiamo infatti soluzioni della forma $u(t) = A\cos(4t)$ otteniamo che deve essere

$$-16A + 25A = 1$$

da cui

$$A = \frac{1}{9}.$$

Dunque abbiamo oscillazioni della forma

$$u(t) = \frac{1}{9}\cos(4t)$$

a cui vanno a sovrapporsi le oscillazioni interne viste al punto precedente: dunque la soluzione generale (dipendente giustamente da due parametri) è

$$u(t) = \frac{1}{9}\cos(4t) + A\cos 5t + B\sin 5t$$

Se la forza esterna fosse a frequenza pari a 5, cioè se l'equazione fosse

$$u''(t) + 25u(t) = \cos(5t),$$

le oscillazioni generate interagirebbero perfettamente in accordo con quelle interne, producendo un effetto di **risonanza**. Ci aspettiamo delle oscillazioni di ampiezza sempre più ampia (nota che cercando soluzioni della forma $u(t) = A\cos(5t)$ si arriva ad un'equazione impossibile, perché $5i$ è radice del polinomio caratteristico).

5. **Carica puntiforme soggetta ad un campo elettrico oscillante.** Supponiamo di avere una carica puntiforme q di massa m libera di muoversi in una prefissata direzione e supponiamo che $E\cos(\omega t)$ sia la componente lungo tale direzione di un campo elettrico oscillante nel tempo che agisce sulla carica. Supponiamo che la carica sia soggetta ad una forza di richiamo di tipo elastico di costante k, e supponiamo che ci sia anche uno smorzamento (attrito) di coefficiente α. Dalla legge di Newton ricaviamo che se $u(t)$ è la posizione della carica al tempo t, u risolve l'equazione differenziale
$$mu''(t) = qE\cos(\omega t) - \alpha u'(t) - ku(t).$$
Ponendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e $\gamma = \frac{\alpha}{m}$ e $F = \frac{qE}{m}$ si ottiene
$$u''(t) + \gamma u'(t) + \omega_0^2 u(t) = F\cos(\omega t).$$
Dunque u soddisfa all'equazione delle oscillazioni forzate: il termine forzante è fornito dal campo elettrico che agisce sulla carica.

Questo esempio mostra una cosa molto importante: **fenomeni fisici diversi possono tradursi nella stessa equazione differenziale**, cioè nello stesso problema matematico. Risolvendo l'equazione, possiamo capire contemporaneamente diversi fenomeni apparentemente molto lontani (molle o cariche investite da campo elettrico).

2.3 Equazioni a variabili separabili

Si tratta di equazioni del tipo

$$y' = f(y)g(x) \tag{2.1}$$

dove f, g sono funzioni continue definite su due intervalli I e J. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

con $x_0 \in J$ e $y_0 \in I$.

1. Per risolvere il problema di Cauchy (2.2), seguiamo un *procedimento formale* molto usato nelle applicazioni (esso può giustificarsi pienamente anche da un punto di vista teorico, ma non ce ne occuperemo): ponendo $y' = dy/dx$
$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$
possiamo scrivere
$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\,dx.$$
Integrando ambo i membri, tenendo conto della condizione iniziale si ha
$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(z)}\,dz = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds. \tag{2.3}$$
Questa relazione definisce in forma implicita la soluzione y in funzione di x. Il procedimento di risoluzione giustifica il nome di *equazioni a variabili separabili*: esse si risolvono tramite due integrazioni nelle variabili y e x separatamente.

2. Il metodo pone qualche difficoltà se $f(y_0) = 0$, perché la formula prevederebbe di integrare una funzione con un asintoto verticale: ma in tal caso si vede subito che il problema di Cauchy è banale, perché la soluzione è data dalla funzione costante $y(x) = y_0$.

3. Se lasciamo y_0 generico in (2.3), cioè lo poniamo uguale ad una costante c, al variare di c si ottengono chiaramente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (2.1).

4. Vediamo alcuni esempi.

   Esempio 2.1. Risolviamo il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = e^y \\ y(2) = 7. \end{cases}$$
Si ha $\frac{dy}{dx} = e^y$
$$\frac{dy}{e^y} = dx$$
da cui
$$\int_7^y \frac{1}{e^z}\,dz = \int_2^x ds$$
da cui
$$\left[-e^{-z}\right]_7^y = x - 2$$
$$-e^{-y} + e^{-7} = x - 2$$
$$e^{-y} = e^{-7} + 2 - x$$
ed infine
$$y = -\ln\left(e^{-7} + 2 - x\right).$$

Esempio 2.2. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \sin t \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Qui l'incognita è una funzione $x(t)$. Ponendo $x' = dx/dt$ si ha

$$\frac{dx}{x} = \sin t \, dt$$

da cui

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \int \sin t \, dt$$

e quindi

$$\ln x = -\cos t + c.$$

Poiché $x(0) = 1$ si ha

$$\ln 1 = -1 + c$$

da cui $c = 1$. Otteniano dunque

$$\ln x = 1 - \cos t$$

da cui

$$x(t) = e^{1-\cos t}.$$

Esempio 2.3. L'equazione dello svuotamento di un serbatoio è a variabili separabili. Da

$$h'(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)},$$

ponendo $h' = dh/dt$ si ha

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{a\sqrt{2g}}{A} \, dt$$

e dunque

$$\int_{h_0}^{h} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^t -\frac{a\sqrt{2g}}{A} \, ds,$$

dove h_0 è il livello iniziale dell'acqua. Si ottiene

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(-\frac{a\sqrt{2g}}{A}t + 2\sqrt{h_0}\right)^2.$$

2.4 Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui

Si tratta di equazioni del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{2.4}$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue definite su un intervallo I. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

1. Vediamo come risolvere il problema di Cauchy (2.5). Sia A una primitiva di a su I. Allora
$$e^{A(x)}\left[y'(x) + a(x)y(x)\right] = e^{A(x)}b(x).$$
Ma si ha
$$e^{A(x)}\left[y'(x) + a(x)y(x)\right] = \left[e^{A(x)}y(x)\right]'$$
per cui
$$\left[e^{A(x)}y(x)\right]' = e^{A(x)}b(x).$$
Integrando da x_0 a x si ottiene
$$e^{A(x)}y(x) - e^{A(x_0)}y(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds,$$
da cui, tenendo conto che $y(x_0) = y_0$, si ottiene
$$y(x) = e^{-A(x)}\left[e^{A(x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds\right].$$
Se supponiamo che $A(x_0) = 0$, cioè scegliamo come A la primitiva di a che vale 0 in x_0, otteniamo la formula
$$y(x) = e^{-A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds\right]. \tag{2.6}$$

2. Riassumendo, la **formula risolutiva per il problema di Cauchy** (2.5) è data da
$$y(x) = e^{-A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds\right]$$
dove A è la primitiva di a su I che vale 0 in x_0, cioè
$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds.$$

3. Se poniamo $y_0 = c$ nella formula (2.6), al variare di $c \in \mathbb{R}$ otteniamo chiaramente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (2.4) (in questo caso $A(x)$ può essere una *qualunque* primitiva di $a(x)$).

4. Vediamo un esempio.

   Esempio 2.4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + 2y = e^x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$
   Si ha $a(x) = 2$ e $b(x) = e^x$. Dunque
$$A(x) = \int_1^x 2\,ds = [2s]_1^x = 2(x-1).$$
   Si ottiene
$$y(x) = e^{-2(x-1)}\left[3 + \int_1^x e^{2(s-1)}e^s\,ds\right].$$
   Dunque
$$\begin{aligned} y(x) =& e^{-2(x-1)}\left[3 + \int_1^x e^{3s-2}\,ds\right] = e^{-2(x-1)}\left[3 + \left[\frac{e^{3s-2}}{3}\right]_1^x\right] \\ =& e^{-2(x-1)}\left[3 + \frac{e^{3x-2}}{3} - \frac{e}{3}\right]. \end{aligned}$$

2.5 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Sono le equazioni della forma
$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \tag{2.7}$$
dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Tenendo conto degli esempi sulla molla e sul campo elettrico visti prima, la funzione $f(x)$ si dice *termine forzante* dell'equazione. L'equazione
$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \tag{2.8}$$
si dice l'equazione omogenea associata alla precedente. Il problema di Cauchy associato è della forma
$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{2.9}$$
dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

1. Per risolvere le equazioni (2.7), facciamo la seguente osservazione fondamentale: se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione, allora la differenza $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (2.8). Infatti si ha

$$\begin{aligned} & v''(x) + av'(x) + bv(x) \\ =& (y_1(x) - y_2(x))'' + a(y_1(x) - y_2(x))' + b(y_1(x) - y_2(x)) \\ =& [y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)] - [y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)] = f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

   Dunque la generica soluzione dell'equazione può esprimersi nella forma

$$y(x) = \tilde{y}(x) + (\text{soluzione generica dell'omogenea associata}),$$

   dove $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. Dunque la **strategia** per risolvere il problema di Cauchy (2.9) per equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti è la seguente.

   (a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
   (b) Determinare una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione di partenza.
   (c) Determinare le costanti generiche che compaiono utilizzando le condizioni iniziali.

2. Consideriamo l'**equazione omogenea**

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

   Per trovarne tutte le soluzioni, si considera il **polinomio caratteristico**

$$P(z) = z^2 + az + b$$

   e si pongono diverse alternative.

   (a) **Se P ammette due radici reali e distinte** λ_1 e λ_2 (caso $a^2 - 4b > 0$), la soluzione generica dell'equazione omogenea è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

   dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) **Se P ammette una sola radice reale λ di molteplicità due** (caso $a^2 - 4b = 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$$

   dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) **Se P ammette due radici complesse coniugate** $\alpha+i\beta$ e $\alpha-i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (caso $a^2 - 4b < 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 2.5. Data l'equazione

$$y'' - 4y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 4$ ammette le soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Esempio 2.6. Data l'equazione

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 2z + 1$ ammette come soluzione doppia $\lambda = 1$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

Esempio 2.7. Data l'equazione

$$y'' + y' + y = 0$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + z + 1$ ammette come soluzioni $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right].$$

3. La **determinazione di una soluzione particolare** $\tilde{y}$ dell'equazione (2.7) è in generale un problema difficile. Esso può semplificarsi se il termine forzante $f(x)$ è della forma

$$f(x) = R_k(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \tag{2.10}$$

o

$$f(x) = R_k(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{2.11}$$

dove R_k è un polinomio di grado k. Esempi di termini forzanti di questo tipo sono

$$f(x) = x^2 e^x, \quad f(x) = x, \quad f(x) = \sin 2x$$

oppure

$$f(x) = x^3 e^{2x} \cos 3x.$$

Per trovare una soluzione particolare, si considera il numero complesso

$$\tilde{z} = \alpha + i\beta$$

e si pongono due alternative.

(a) Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ dell'equazione omogenea associata, allora esiste una soluzione particolare della forma

$$e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

(b) Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ con molteplicità h, allora esiste una soluzione particolare dell'equazione è della forma

$$x^h e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right]$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

I polinomi generici Q_k e S_k si determinano sostituendo direttamente nell'equazione ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 2.8. Consideriamo l'equazione

$$y'' - 2y = 2e^x.$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ che ammette come radici $z = \pm\sqrt{2}$. Il termine forzante $f(x) = 2e^x$ è della forma (2.10) con la scelta $k = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 1$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione della forma

$$\tilde{y}(x) = ce^x.$$

Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere

$$ce^x - 2ce^x = 2e^x,$$

da cui $c = -2$. Concludiamo che una soluzione particolare è $\tilde{y}(x) = -2e^x$.

Esempio 2.9. Consideriamo l'equazione

$$y'' + 4y = 2 + \sin 2x. \tag{2.12}$$

Il termine forzante $f(x) = 2 + \sin 2x$ è somma di due termini forzanti

$$f_1(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = \sin 2x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione, grazie alla sua linearità , basta trovare due soluzioni particolari relative a f_1 e f_2 e sommarle tra loro, cioè basta trovare $\tilde{y}_1(x)$ e $\tilde{y}_2(x)$ tali che

$$\tilde{y}_1''(x) + 4\tilde{y}_1(x) = 2 \tag{2.13}$$

e

$$\tilde{y}_2''(x) + 4\tilde{y}_2(x) = \sin 2x \tag{2.14}$$

e considerare $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$. Per quanto riguarda $f_1(x) = 2$, esso è del tipo (2.10) con $k = \alpha = \beta = 0$. Si ha $\tilde{z} = 0$, che non è radice del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Dunque esiste una soluzione particolare $\tilde{y}_1(x)$ di (2.13) della forma

$$\tilde{y}_1(x) = c.$$

Sostituendo in (2.13) si ricava

$$4c = 2 \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

cioè $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}$. Per quanto riguarda $f_2(x) = \sin 2x$, esso è della forma (2.11) con $k = \alpha = 0$ e $\beta = 2$. Dunque $\tilde{z} = 2i$, che è radice di molteplicità uno del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Esiste allora una soluzione particolare $\tilde{y}_2$ di (2.14) della forma

$$\tilde{y}_2(x) = x\left[c\cos 2x + d\sin 2x\right].$$

Dunque

$$\tilde{y}_2'(x) = c\cos 2x + d\sin 2x + x\left[-2c\sin 2x + 2d\cos 2x\right].$$

e

$$\tilde{y}_2''(x) = -4c\sin 2x + 4d\cos 2x + x\left[-4c\cos 2x - 4d\sin 2x\right].$$

Sostituendo in (2.14) si ha

$$-4c\sin 2x + 4d\cos 2x = \sin 2x$$

da cui

$$c = -\frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad d = 0.$$

Si ha dunque

$$\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

In conclusione, una soluzione particolare dell'equazione (2.12) è data da

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\cos 2x.$$

4. Vediamo un esempio di risoluzione di un problema di Cauchy seguendo la strategia vista al punto 1. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'' - 2y = 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ e

$$z^2 - 2 = 0 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{2}.$$

Si hanno due radici reali distinte $z_1 = \sqrt{2}$ e $z_2 = -\sqrt{2}$. La soluzione generica dell'equazione omogenea associata è data da

$$c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare: il termine forzante $f(x) = 2$ è della forma particolare considerata al punto precedente con la scelta $k = \alpha = \beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 0$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione particolare $\tilde{y}$ della forma

$$\tilde{y}(x) = c.$$

Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere

$$-2c = 2,$$

cioè $c = -1$. Abbiamo dunque che la soluzione generica dell'equazione completa è

$$y(x) = -1 + c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Le costanti c_1, c_2 si determinano attraverso le condizioni iniziali. Poiché $y'(x) = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x}$, otteniamo da $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$

$$\begin{cases} -1 + c_1 + c_2 = -1 \\ \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La soluzione del problema è

$$y(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x}\right].$$

2.6 Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti

Si tratta di equazioni del tipo

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = f(x),$$

dove $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

1. **La risoluzione di equazioni di questo tipo è analoga a quanto già visto per le equazioni di ordine due**. Si ha che le generica soluzione è della forma

   $$y(x) = \tilde{y}(x) + (\text{soluzione generica dell'omogenea associata}),$$

   dove $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. La soluzione generica dell'omogenea associata dipende da n costanti che vengono determinate attraverso le condizioni iniziali del problema.

2. La **generica soluzione dell'omogenea associata** si trova considerando il polinomio caratteristico

   $$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n.$$

   Esso ha in generale n radici: a differenza che nel caso $n = 2$, tali soluzioni possono avere molteplicità $h > 2$. Per scrivere la generica soluzione dell'equazione omogenea, si procede come segue.

   (a) Si individuano tutte le radici di $P(z)$.

   (b) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice di $P(z)$ di molteplicità h, ad essa è associata una soluzione della forma

   $$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{h-1}x^{h-1})e^{\lambda x},$$

   dove $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sono costanti generiche.

   (c) Se $\alpha \pm i\beta$ è una coppia di radici complesse coniugate di $P(z)$ con molteplicità h, allora ad essa è associata una soluzione della forma

   $$e^{\alpha x}\left[(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_{h-1}x^{h-1})\cos(\beta x) \right. \\ \left. +(f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_{h-1}x^{h-1})\sin(\beta x)\right],$$

   dove $d_0, d_1, \ldots, d_{h-1}, f_0, f_1, \ldots, f_{h-1}$ sono costanti generiche.

(d) La generica soluzione dell'equazione omogenea è data dalla somma delle soluzioni dei punti (a) e (b), al variare di tutte le radici di $P(z)$.

Esempio 2.10. Consideriamo ad esempio l'equazione

$$y'''' - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Il polinomio caratteristico è

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4$$

che si può fattorizzare nel seguente modo

$$P(z) = (z-1)^2(z^2+4).$$

Dunque le radici di $P(z)$ sono $\lambda = 1$ con molteplicità 2, e la coppia di radici complesse coniugate $\pm 2i$. Dunque la generica soluzione dell'equazione è data da

$$y(x) = (c_0 + c_1 x)e^x + d_0 \cos 2x + f_0 \sin 2x,$$

con $c_0, c_1, d_0, f_0 \in \mathbb{R}$.

3. Come nel caso $n = 2$, **la determinazione di una soluzione particolare dell'equazione diviene semplice se il termine forzante è del tipo**

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

o

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

dove R_k è un polinomio di grado k. In tal caso si considera il numero complesso $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ e si procede come segue.

(a) Se $\tilde{z}$ non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ dell'equazione omogenea associata, allora esiste una soluzione particolare della forma

$$e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

(b) Se $\tilde{z}$ è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ di molteplicità h, allora esiste una soluzione particolare dell'equazione della forma

$$x^h e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right]$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

I polinomi generici Q_k e S_k si determinano sostituendo nell'equazione ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 2.11. Consideriamo l'equazione

$$y'''' - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = e^{2x}$$

e determiniamone una soluzione particolare: si ha $\tilde{z} = 2$, ed esso non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$, le cui radici sono, per quanto visto all'esempio precedente, $z = 1$ e $z = \pm 2i$. Dunque l'equazione ammette una soluzione particolare della forma $\tilde{y}(x) = ce^{2x}$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$(16c - 16c + 20c - 16c + 4c)e^{2x} = e^{2x}$$

da cui $c = 1/8$. Dunque una soluzione particolare è data da $\tilde{y}(x) = \frac{1}{8}e^{2x}$. La soluzione generale dell'equazione è data dunque da

$$y(x) = \frac{1}{8}e^{2x} + (c_0 + c_1 x)e^x + d_0 \cos 2x + f_0 \sin 2x,$$

dove c_0, c_1, d_0, f_0 sono generiche costanti.

2.7 Un'applicazione: perché il cielo è azzurro?

In questa sezione vediamo come le considerazioni fin qui svolte sulle equazioni lineari a coefficienti costanti possano farci capire (o intuire) il perché il cielo ci appare azzurro. Faremo diverse semplificazioni, concentrandoci sugli aspetti collegati alle equazioni differenziali. Supponiamo che un elettrone sia investito da un fascio di luce monocromatica, cioè da un campo elettrico oscillante alla frequenza ω della forma $E \cos \omega t$. Per studiare l'interazione tra l'elettrone e la luce, possiamo pensare che le forze sull'elettrone all'interno dell'atomo siano modellizzate da una forza elastica di richiamo di costante k e da un attrito di coefficiente α. Si arriva dunque come visto in precedenza ad un'equazione del tipo

$$u''(t) + \gamma u'(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{qE}{m}\cos(\omega t).$$

con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e $\gamma = \frac{\alpha}{m}$. m è la massa dell'elettrone, e q è la sua carica. Nel caso in questione, si ha $\gamma << \omega_0$. Il polinomio caratteristico è

$$P(z) = z^2 + \gamma z + \omega_0^2$$

e le sue radici sono date da

$$z = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Il termine forzante

$$f(t) = \frac{qE}{m}\cos(\omega t)$$

è del tipo $R_k(t)e^{\alpha t}\cos \beta t$ con $k = 0$, $\alpha = 0$ e $\beta = \omega$. Il numero complesso associato $\tilde{z} = i\omega$ non è radice di $P(z)$.

1. Abbiamo visto in precedenza che, non essendo $\tilde{z}$ radice del polinomio caratteristico, esiste una soluzione particolare della forma

$$\tilde{u}(t) = c\cos\omega t + d\sin\omega t.$$

   Un conto diretto mostra che si ha $d = 0$ e

$$c = \frac{qE}{m\sqrt{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

   così che il moto dell'elettrone è dato da

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{qE}{m\sqrt{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + \gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t) \\ & + \text{(soluzione omogenea associata).} \end{aligned}$$

2. Ma la soluzione generale dell'omogenea associata è della forma

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(c_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t\right)\right)$$

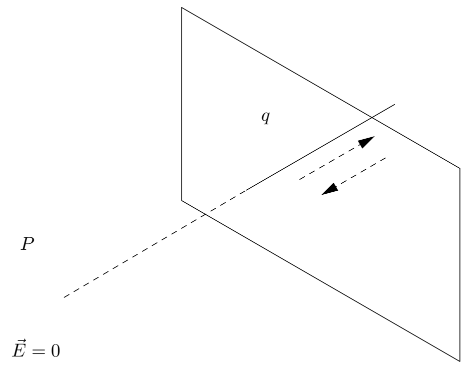
   con c_1, c_2 da determinarsi in funzione della posizione e della velocità dell'elettrone al momento in cui viene investito dalla luce. Contenendo il termine $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$, la soluzione dell'omegenea associata, indipendentemente da c_1 e c_2, risulta trascurabile rispetto alla soluzione particolare, che risulta in sostanza il vero moto dell'elettrone. Dunque si ha

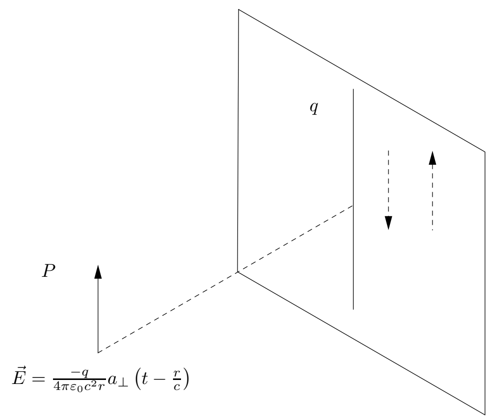
$$u(t) \sim \frac{qE}{m\sqrt{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + \gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t).$$

3. Una carica in movimento irraggia campo elettrico: ad una distanza r (sufficientemente grande) ed al tempo t, il campo prodotto da essa può essere descritto in buona approssimazione dalla formula

$$\tilde{E} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}a_\perp\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

   dove $a_\perp$ è la componente dell'accelerazione ortogonale alla linea che congiunge q e il punto d'osservazione, c è la velocità della luce, e ε_0 una costante. Il tempo in cui $a_\perp$ va valutata è ritardato rispetto a t, si tratta di $t - \frac{r}{c}$: è esattamente il tempo che la luce impiega per raggiungere il punto d'osservazione (a distanza r da q).





Dunque se ci poniamo in un piano ortogonale al nostro elettrone oscillante, vedremo una luce data dal campo elettrico

$$\tilde{E}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}u''\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{-q^2\omega^2 E}{4\pi\varepsilon_0 c^2 rm\sqrt{[\omega_0^2-\omega^2]^2+\gamma^2\omega^2}}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].$$

La sua potenza è proporzionale a $|\tilde{E}|^2$. Dunque la sua potenza media (in un ciclo) sarà proporzionale a

$$\text{Potenza luce irradiata}\sim\frac{k_0}{r^2}\frac{\omega^4E^2}{[\omega_0^2-\omega^2]^2+\gamma^2\omega^2}$$

dove k_0 dipende solo dalle proprietà dell'atomo a cui l'elettrone appartiene, oltre che dalla sua massa m e carica q.

4. Nell'aria, la frequenza ω_0 è molto più grande della frequenza ω della luce visibile. Dunque possiamo trascurare al denominatore i termini in ω così che si ottiene

$$\text{Potenza luce irradiata}\sim\frac{\omega^4E^2}{\omega_0^4}.$$

5. La luce azzurra, che ha una fraquenza circa due volte più grande di quella rossastra, viene reirraggiata con una potenza sedici volte maggiore, e questo giustifica (almeno nell'ambito delle nostre approssimazioni) il perché il cielo ci appare azzurro.

Esercizi

1. Dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

non ammette soluzioni.

2. Dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni.

3. Trovare una soluzione del problema

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

con le condizione iniziale $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$. (Suggerimento: derivando la prima equazione si ottiene $x'' = x' + y'$, per cui si può sostituire nella seconda...)

4. Trovare la funzione $z(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che risolve il problema

$$\begin{cases} z'(t) = iz(t) \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

5. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$. (Suggerimento: scrivi $z(t) = x(t) + iy(t)$ e trova l'equazione corrispondente per z.)

6. Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti reali: dimostrare che se $z_0 = \alpha + i\beta$ è radice di $P(z)$, anche il suo complesso coniugato $\bar{z}_0 = \alpha - i\beta$ è radice. Dunque le radici complesse di polinomi a coefficienti reali vanno sempre in coppie di complessi coniugati. (Suggerimento: nella relazione $P(z_0) = 0$, fai il coniugato di ambo i membri.)

7. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali: sfruttando l'esercizio precedente ed il teorema fondamentale dell'algebra (ogni polinomio a coefficienti reali ammette almeno una radice complessa), dimostrare che $P(x)$ si può decomporre in un prodotto di fattori del tipo $(x-\lambda)^h$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{N}$, e del tipo $[(x+\alpha)^2+\beta^2)]^k$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. In altre parole

$$\begin{aligned} P(x) = {} & c(x-\lambda_1)^{h_1} \cdot \dots \cdot (x-\lambda_r)^{h_r} \cdot \\ & \cdot ((x+\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{k_1} \cdot \dots \cdot ((x+\alpha_t)^2+\beta_t^2)^{k_t}. \end{aligned}$$