Capitolo 6

Integrali curvilinei

In questo capitolo definiamo i concetti di integrali di campi scalari o vettoriali lungo curve. Abbiamo bisogno di precisare le curve e gli insiemi che verranno presi in considerazione.

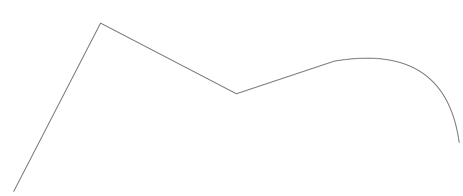
1. Per quanto riguarda le curve, considereremo la classe delle **curve C^1 a tratti**. Si dice che una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è **C^1 a tratti** se γ è continua ed esiste una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ di $[a, b]$ tale che

   (a) γ è di classe C^1 su ogni sottointervallo $]t_j, t_{j+1}[$;

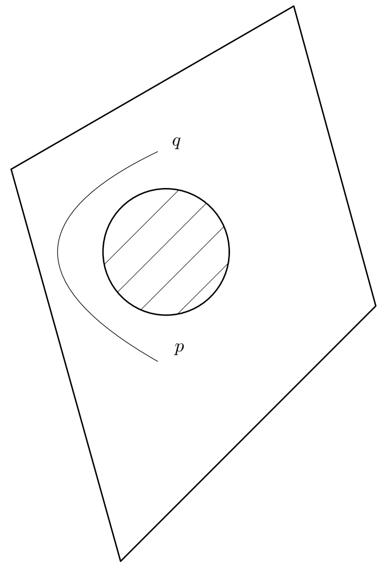
   (b) esistono finiti i limiti

   $$\lim_{t \to t_j^+} \gamma'(t), \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_{j+1}^-} \gamma'(t)$$

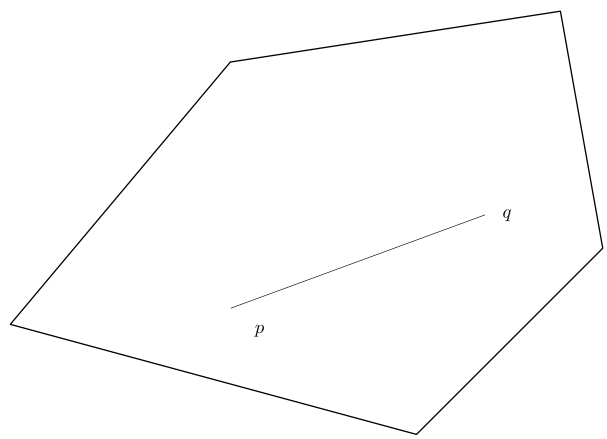
   cioè esistono la tangente destra e sinistra negli estremi t_j e t_{j+1}.



2. Per quanto riguarda la classe degli insiemi che considereremo, sono utili quegli insiemi A tali che due suoi punti qualsiasi possano congiungersi tramite una curva γ contenuta in A: tali insiemi si dicono **connessi per archi**.



Sono sicuramente insiemi connessi per archi gli insiemi **convessi**, quelli cioè tali per cui il segmento congiungente due suoi punti qualsiasi è tutto contenuto nell'insieme.



Se inoltre A è aperto, la curva che connette due suoi punti qualsiasi può pensarsi di classe C^1 dal momento che, essendo lontana dal bordo, è possibile deformarla smussandone gli angoli.

6.1 Integrali curvilinei per campi scalari

In questa sezione ci occuperemo di integrali di un campo scalare lungo una curva.

1. Consideriamo una trave nello spazio rappresentata tramite una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1. Supponiamo che essa abbia una densità di massa per unità di lunghezza

data dalla funzione $\rho(x, y, z)$: ciò significa che un piccolo tratto di lunghezza $\varepsilon > 0$ contenente (x_0, y_0, z_0) ha una massa $m_\varepsilon \sim \rho(x_0, y_0, z_0)\varepsilon$. Per calcolare la massa della trave possiamo come al solito procedere per approssimazione considerando una suddivisione molto fine $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = b\}$ di $[a, b]$ e scrivere

$$M \sim \sum_{j=0}^{n} \rho(\gamma(t_j)) L(\gamma_{|[t_j,t_{j+1}]}) \sim \sum_{j=0}^{n} \rho(\gamma(t_j)) \|\gamma'(t_j)\| (t_{j+1} - t_j)$$

Raffinando la suddivisione, essendo l'ultima quantità una somma di Riemann della funzione continua $\rho(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|$ si ottiene

$$M = \int_a^b \rho(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| \, dt.$$

2. In base a quanto visto al punto precedente, la definizione generale di integrale curvilineo per un campo scalare in N dimensioni è la seguente.

   Definizione 6.1 (Integrale curvilineo di un campo scalare). *Consideriamo un campo scalare continuo $F : A \to \mathbb{R}$ definito su $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Detta $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ una curva di classe C^1 a valori in A, diciamo* **integrale curvilineo di F lungo γ** *la quantità*

   $$\int_\gamma F \, ds := \int_a^b F(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| \, dt.$$

   Se γ è di classe C^1 a tratti, l'integrale curvilineo si definisce sommando gli integrali relativi ad ogni tratto regolare.

   Esempio 6.2. Dati il campo scalare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definito da

   $$F(x, y, z) = x + yz$$

   e la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t) = (t, 0, 2t)$, si ha

   $$\gamma'(t) = (1, 0, 2) \Longrightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{5}$$

   da cui

   $$\int_\gamma F \, ds = \int_0^1 F(t, 0, 2t)\sqrt{5} \, dt = \int_0^1 t\sqrt{5} \, dt = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

3. Gli integrali curviliei dei campi scalari vengono anche detti **integrali curvilinei rispetto alla lunghezza d'arco**. Per capire il perché di questo nome, notiamo che l'integrale può essere approssimato dalla somma di Riemann

   $$\sum_{j=0}^{n} F(\gamma(t_j))\|\gamma'(t_j)\|(t_{j+1} - t_j).$$

Ma $\|\gamma'(t_j)\|(t_{j+1}-t_j)$ approssima la lunghezza della curva γ sull'intervallo $[t_j, t_{j+1}]$ che è dato da

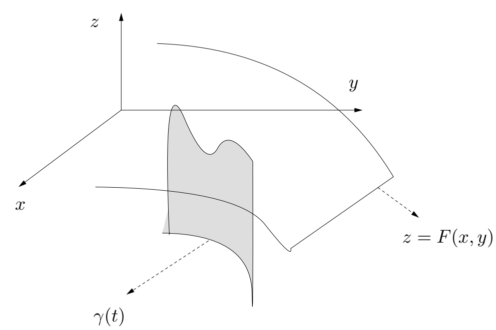
$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Dunque passando all'ascissa curvilinea possiamo riscrivere la somma di Riemann nella forma

$$\sum_{j=0}^{n} F(\gamma(s_j))(s_{j+1}-s_j) \tag{6.1}$$

che mostra come il campo venga proprio integrato rispetto alla lunghezza d'arco.

4. Grazie alla somma di Riemann (6.1), nel caso in cui F sia una funzione positiva di due variabili x, y, possiamo dare all'integrale curvilineo di F lungo γ il seguente significato geometrico: esso rappresenta l'area della regione determinata dalla superficie $z = F(x,y)$ e dalla curva γ.



5. Dalla definizione di integrale curvilineo discendono immediatamente le seguenti proprietà :

   (a) **linearità :** per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e F, G campi scalari

   $$\int_\gamma (\lambda F + \mu G)\, ds = \lambda \int_\gamma F\, ds + \mu \int_\gamma G\, ds;$$

   (b) **invarianza per riparametrizzazione**: se $\eta : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ è una riparametrizzazione di γ con verso concorde o discorde, si ha

   $$\int_\eta F\, ds = \int_\gamma F\, ds.$$

6. Un'ulteriore applicazione degli integrali curvilinei di campi scalari, oltre al calcolo della massa, è data dal calcolo del baricentro o dei momenti d'inerzia di oggetti unidimensionali: ad esempio l'ascissa del baricentro G di una trave γ è data da

   $$x_G = \frac{1}{M} \int_\gamma x\rho(x,y,z)\, ds,$$

   dove M è la massa di γ e ρ è la sua densità .

6.2 Integrali curvilinei per campi vettoriali

In questa sezione ci occuperemo di integrali di un campo vettoriale lungo una curva. Più precisamente, definiremo la nozione di integrale curvilineo per campi vettoriali $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con $M = N$. Per sottolineare a livello di notazione che F è un'applicazione da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^N$, utilizzeremo il simbolo $\vec{F}$. Nel caso di campi $\vec{F}$ dipendenti da due variabili, si scrive spesso

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\vec{i} + F_2(x,y)\,\vec{j}$$

e per campi vettoriali nello spazio

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\vec{i} + F_2(x,y,z)\,\vec{j} + F_3(x,y,z)\,\vec{k},$$

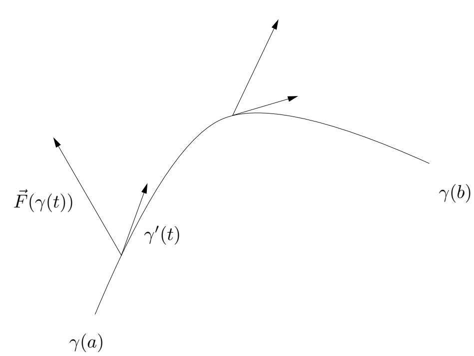
dove $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ indicano i versori degli assi coordinati.

1. Consideriamo una forza $\vec{F}(x,y,z)$ ed un punto P che si muove su una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1. Per calcolare il lavoro che $\vec{F}$ compie per spostare P da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$, possiamo procedere come al solito per approssimazione considerando una suddivisione molto fine $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = b\}$ di $[a,b]$ e scrivere

$$\text{Lavoro} \sim \sum_{j=0}^{n} \vec{F}(\gamma(t_j)) \cdot (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) \sim \sum_{j=0}^{n} \vec{F}(\gamma(t_j)) \cdot \gamma'(t_j)(t_{j+1} - t_j).$$

   Raffinando la suddivisione, essendo l'ultima quantità una somma di Riemann della funzione continua $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ si ottiene

$$\text{Lavoro} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$



2. In base a quanto visto al punto precedente, la definizione generale di integrale curvilineo per un campo vettoriale in N dimensioni è la seguente.

Definizione 6.3 (**Integrale curvilineo di un campo vettoriale**). *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^N$, $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale continuo e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva C^1 contenuta in A. Si dice* **integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo** γ *la quantità scalare*

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Se γ è una curva chiusa, cioè $\gamma(a) = \gamma(b)$, l'integrale di $\vec{F}$ lungo γ si indica con il simbolo

$$\oint_\gamma \vec{F}.$$

Se γ è C^1 a tratti, allora l'integrale si definisce sommando gli integrali relativi ai tratti regolari.

Nel caso di dimensione $N = 2$ si scrive spesso

$$\int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy$$

e nel caso di dimensione 3 si scrive spesso

$$\int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz.$$

Esempio 6.4. Dati $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = x\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$$

e $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = (t^2, t),$$

si ha $\gamma'(t) = (2t, 1) = 2t\,\vec{i} + \vec{j}$ da cui

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_0^2 (t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j}) \cdot (2t\,\vec{i} + \,\vec{j})\, dt = \int_0^2 (2t^3 + t^3)\, dt = 12.$$

3. Dalla definizione di integrale curvilineo discendono immediatamente le seguenti proprietà :

   (a) **linearità :** per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\vec{F}, \vec{G}$ campi vettoriali

$$\int_\gamma (\lambda\vec{F} + \mu\vec{G}) = \lambda \int_\gamma \vec{F} + \mu \int_\gamma \vec{G};$$

(b) **l'integrale dipende dal verso di percorrenza**: se $\eta : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ è una riparametrizzazione di γ con verso concorde si ha

$$\int_\eta \vec{F} = \int_\gamma \vec{F},$$

mentre se ha verso discorde si ha

$$\int_\eta \vec{F} = -\int_\gamma \vec{F}.$$

4. Un'ulteriore applicazione degli integrali curvilinei di campi vettoriali, oltre al calcolo del lavoro di una forza, è data dal calcolo della circuitazione dei campi elettrico e magnetico.

6.3 Campi conservativi

Motivati dallo studio dei campi di forze in fisica, definiamo ora la nozione di campi conservativi, ossia di quei campi che ammettono potenziale. Molti campi di forze della fisica risultano conservativi: gli esempi più importanti sono dati dal campo gravitazionale e dal campo elettrostatico.

1. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 6.5 (Campo conservativo). *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale: diciamo che $\vec{F}$ è un* **campo conservativo** *o che* **ammette potenziale** *se esiste un campo scalare $\Phi : A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che per ogni $p \in A$*

$$\vec{F}(p) = \nabla\Phi(p),$$

e cioè per ogni $i = 1, \dots, N$

$$F_i(p) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(p).$$

Il campo scalare Φ si dice un **potenziale** *di $\vec{F}$.*

Nel caso in cui $\vec{F} = F_1(x,y)\,\vec{i} + F_2(x,y)\,\vec{j}$, un potenziale di $\vec{F}$ è una funzione scalare $\Phi(x,y)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y). \end{cases}$$

Nel caso in cui $\vec{F} = F_1(x,y,z)\,\vec{i} + F_2(x,y,z)\,\vec{j} + F_3(x,y,z)\,\vec{k}$, un potenziale di $\vec{F}$ è una funzione scalare $\Phi(x,y,z)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,z) = F_2(x,y,z) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z). \end{cases}$$

Esempio 6.6. Il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da

$$\vec{F}(x, y) = y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$$

è conservativo ed ammette come potenziale il campo scalare $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dato da $\Phi(x, y) = xy$.

Il potenziale di $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ è una specie di **primitiva del campo** $\vec{F}$, la prima nozione ragionevole di primitiva che può venire in mente tenendo conto del fatto che $\vec{F}$ è una funzione vettoriale. In analogia con il caso delle funzioni di una variabile abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 6.7. *Sia A un aperto connesso per archi, e sia $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo continuo conservativo. Allora due potenziali di $\vec{F}$ differiscono per una costante.*

Dimostrazione. Siano Φ_1, Φ_2 due potenziali di $\vec{F}$, e sia $\Phi := \Phi_1 - \Phi_2$. Notiamo che

$$\nabla\Phi = \nabla\Phi_1 - \nabla\Phi_2 = \vec{F} - \vec{F} = 0.$$

Il risultato è dunque dimostrato se proviamo la seguente proprietà di carattere generale: se Φ è un campo scalare di classe C^1 definito su un aperto connesso per archi tale che $\nabla\Phi = 0$, allora Φ è costante. In altre parole, per ogni $p, q \in A$ si ha

$$\Phi(p) = \Phi(q).$$

Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva di classe C^1 che congiunge p, q, e sia

$$g(t) = \Phi(\gamma(t)).$$

Si ha

$$g'(t) = \nabla\Phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

Dunque si ha che g è costante: in particolare $g(a) = g(b)$, e cioè $\Phi(p) = \Phi(q)$, e la tesi è dimostrata. ■

L'interesse per lo studio dei campi conservativi può essere motivato dalla seguente osservazione. Dalla relazione $\vec{F} = \nabla\Phi$, si nota che la conoscenza di un *campo scalare* Φ ci permette di individuare tramite operazioni meccaniche (le derivate parziali) una funzione vettoriale con N componenti. Dunque è possibile spostare l'attenzione su un campo scalare (più semplice da studiare perché ha una sola componente) per trattare una situazione vettoriale. Questo è il motivo per cui in elettrostatica (o in gravitazione) si preferisce scrivere il potenziale elettrostatico associato alla distribuzione di carica e poi ottenere il campo elettrostatico facendone il gradiente.

2. I campi conservativi si comportano in modo particolare rispetto all'integrazione lungo curve. Risulta che l'integrale curvilineo di un campo conservativo è indipendente dalla traiettoria, cioè dipende solo dagli estremi della curva d'integrazione. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 6.8 (**Secondo teorema fondamentale del calcolo per gli integrali curvilinei**). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso per archi, $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo continuo conservativo e sia $\Phi : A \to \mathbb{R}$ un suo potenziale. Allora si ha*

$$\int_\gamma \vec{F} = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)).$$

per ogni curva C^1 a tratti γ contenuta in A di estremi $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. In particolare, se γ **è una curva chiusa**, *si ha*

$$\oint_\gamma \vec{F} = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che γ sia classe C^1: se fosse C^1 a tratti basterebbe suddividere l'integrale sui tratti regolari ed applicare lo stesso ragionamento. Si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \nabla\Phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (\Phi(\gamma(t))'\, dt = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)).\end{aligned}$$

■

3. La seguente proposizione raccoglie delle condizioni necessarie affinché un campo sia conservativo.

Proposizione 6.9 (**Condizioni necessarie affinché un campo sia conservativo**). *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^N$ connesso per archi e sia $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo* **continuo** *e* **conservativo**. *Allora valgono i seguenti fatti.*

(a) *L'integrale curvilineo di $\vec{F}$ è* **indipendente dalla traiettoria** *ed in particolare* **l'integrale lungo curve chiuse è nullo**, *cioè*

$$\oint_\gamma \vec{F} = 0.$$

(b) *Se $\vec{F}$ è di* **classe C^1**, *allora* **vale l'uguaglianza delle derivate in croce**, *ossia per ogni $p \in A$, $h, k = 1, \dots N$*

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_k}(p) = \frac{\partial F_k}{\partial x_h}(p). \tag{6.2}$$

Dimostrazione. La dimostrazione di (a) discende dal teorema 6.8. Il punto (b) discende invece dal teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate parziali seconde miste. Infatti se Φ è un potenziale di $\vec{F}$, allora Φ è di classe C^2 perché $\nabla\Phi = \vec{F}$ è di classe C^1 per ipotesi. Dunque per il teorema di Schwarz si ha per ogni $p \in A$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_h}\right)(p) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_h}(p) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_h \partial x_k}(p) = \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right)(p).$$

Ma si ha che $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(p) = F_i(p)$, per cui si ha l'uguaglianza (6.2). ∎

La relazione (6.2) risulta interessante solo nel caso $h \neq k$: è per questo che si parla di uguaglianza delle derivate in croce. Nel caso $N = 2$, per

$$\vec{F} = F_1(x,y)\,\vec{\imath} + F_2(x,y)\,\vec{\jmath}$$

la condizione (6.2) diventa

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Nel caso $N = 3$, per

$$\vec{F} = F_1(x,y,z)\,\vec{\imath} + F_2(x,y,z)\,\vec{\jmath} + F_3(x,y,z)\,\vec{k}$$

la condizione (6.2) diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}. \end{cases}$$

In entrambi i casi, le relazioni scritte equivalgono a richiedere $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$. Poniamo dunque la seguente definizione.

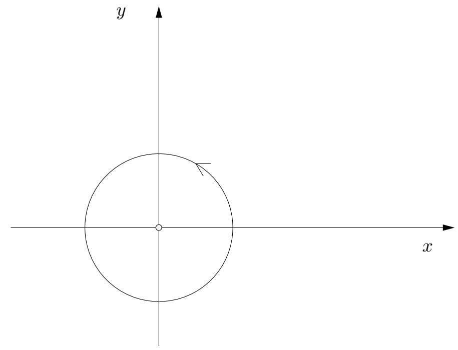
Definizione 6.10 (**Campo irrotazionale**). *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo differenziabile. Diciamo che $\vec{F}$ è* **irrotazionale** *se per ogni $h, k = 1, \dots, N$ e per ogni $p \in A$*

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_k}(p) = \frac{\partial F_k}{\partial x_h}(p).$$

Per quanto visto, possiamo dunque dire che **i campi conservativi di classe C^1 sono irrotazionali**.

Osservazione 6.11. L'irrotazionalità non è sufficiente a garantire che un campo C^1 sia conservativo. Basta considerare il seguente esempio. Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e sia

$$\vec{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}.$$



Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. γ è una parametrizzazione della circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$. γ è C^1, a valori in A ed è chiusa. Si ha con un calcolo diretto

$$\oint_\gamma \vec{F} = 2\pi \neq 0$$

e dunque $\vec{F}$ non è conservativo in A (se lo fosse, l'integrale sarebbe nullo).

6.4 Condizioni sufficienti affinché un campo vettoriale sia conservativo

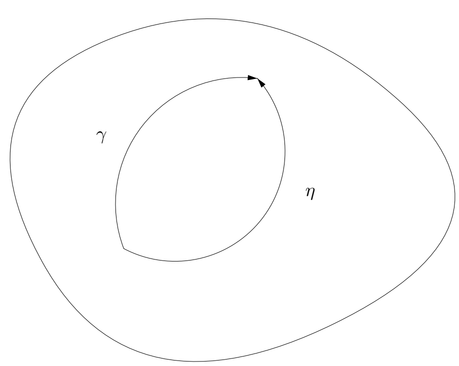
In questa sezione vedremo due condizioni sufficienti affinché un campo vettoriale $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ definito su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ sia conservativo. La prima è di carattere integrale ed è valida su ogni aperto A connesso, ma è di difficile verifica. La seconda è di carattere differenziale, facile da verificare, ma richiede una restrizione di carattere topologico su A.

1. Iniziamo con l'osservare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

   (a) l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ è indipendente dalla traiettoria, cioè dipende solo dagli estremi;

   (b) l'integrale di $\vec{F}$ lungo curve chiuse è nullo.

   Chiaramente (a) implica (b) perché per una curva chiusa gli estremi coincidono.



Viceversa, se γ e η sono due curve in A con i medesimi estremi, considerando la curva ζ ottenuta percorrendo prima γ e poi η in senso contrario, abbiamo che ζ è chiusa, e da $\oint_\zeta \vec{F} = 0$ otteniamo

$$0 = \oint_\zeta \vec{F} = \int_\gamma \vec{F} + \int_{-\eta} \vec{F} = \int_\gamma \vec{F} - \int_\eta \vec{F}$$

cioè

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_\eta \vec{F}.$$

Dunque (b) implica (a).

2. La condizione integrale è la seguente.

Proposizione 6.12 (Condizione integrale). *Sia A un aperto connesso per archi di $\mathbb{R}^N$, e sia $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale continuo. Supponiamo che l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ sia indipendente dalla traiettoria, o equivalentemente che l'integrale lungo tutte le curve chiuse sia nullo. Allora $\vec{F}$ è conservativo in A e, a meno di una costante, il potenziale è dato dalla formula*

$$\Phi(p) = \int_\gamma \vec{F} \tag{6.3}$$

dove γ è una qualsiasi curva C^1 a tratti in A che congiunge p con un fissato punto $p_0 \in A$.

Notiamo che Φ è ben definito per l'ipotesi che l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ sia indipendente dalla traiettoria. Inoltre Φ è il candidato naturale ad essere un potenziale di $\vec{F}$ perché un qualsiasi potenziale Ψ, in forza del secondo teorema fondamentale del calcolo per gli integrali curvilinei, è tale che

$$\Psi(p) - \Psi(p_0) = \int_\gamma \vec{F} = \Phi(p),$$

cioè differisce da Φ a meno di una costante. Un conto diretto mostra poi che Φ ammette le derivate parziali, e che $\nabla\Phi = \vec{F}$. Se ad esempio $A \subseteq \mathbb{R}^3$ e $p = (x, y, z)$, si dimostra che

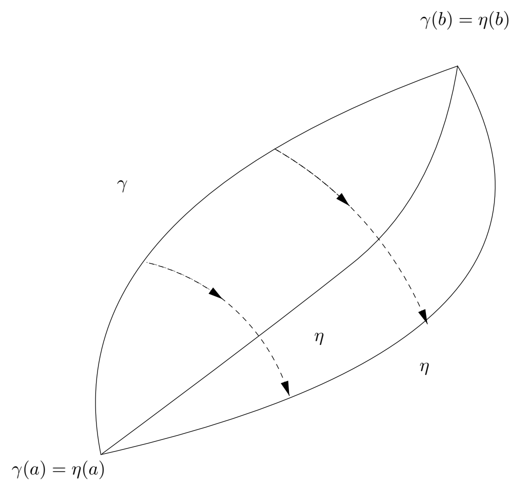
$$\Phi(x, y, z) = \int_\gamma \vec{F}$$

è differenziabile e che

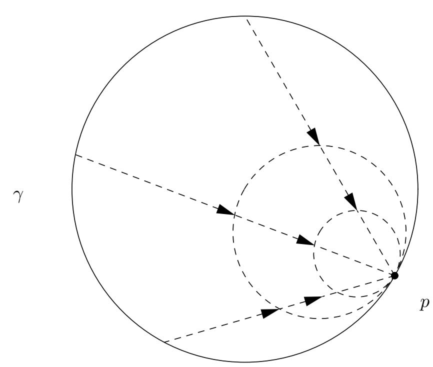
$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z). \end{cases}$$

3. Per enunciare la condizione differenziale, ci serve la nozione di omotopia tra curve.

Definizione 6.13 (Curve omotope). *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^N$, e siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ e $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ due curve C^1 a tratti in A con gli stessi estremi, cioè tali che $\gamma(a) = \eta(a)$ e $\gamma(b) = \eta(b)$. Diciamo che γ e η sono curve omotope in A se esiste una* **deformazione continua in** *A della curva γ nella curva η che tenga fissi gli estremi.*



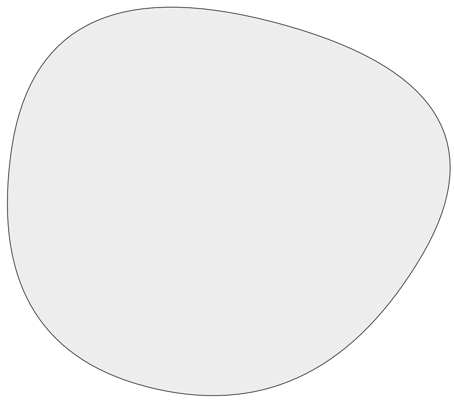
In particolare, data una curva chiusa $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ a valori in A tale che $p = \gamma(a) = \gamma(b)$, diremo che γ è **contrattile in** A se γ è omotopa in A alla curva banale che si riduce al solo punto p.



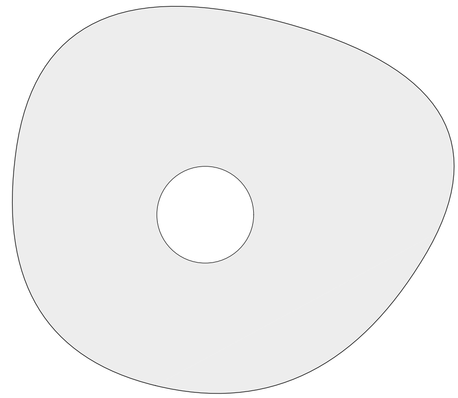
La proprietà topologica dell'insieme di definizione del campo richiesta nella condizione differenziale è quella di semplice connessione.

Definizione 6.14 (Aperti semplicemente connessi). *Diciamo che un aperto connesso per archi A di $\mathbb{R}^N$ è* **semplicemente connesso** *se ogni curva chiusa C^1 a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ a valori in A è contrattile in A.*

In dimensione 2, poiché ciò che ostruisce la deformazione di curve sono i *buchi* dell'insieme, spesso si dice che gli aperti semplicemente connessi sono gli aperti connessi per archi senza buchi.

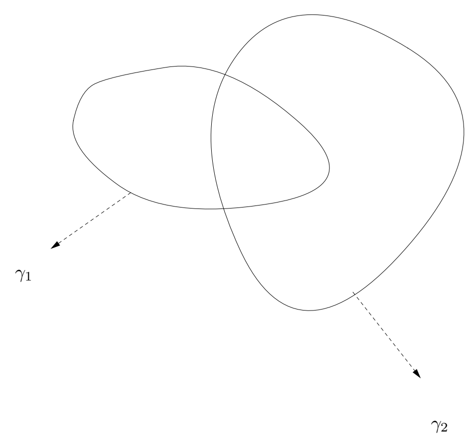


aperto semplicemente connesso



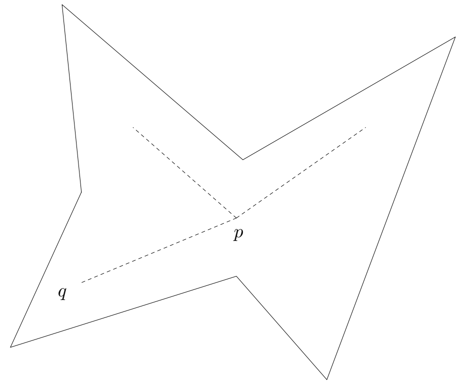
aperto non semplicemente connesso

Nello spazio tridimensionale, non tutti i buchi causano la perdita della semplice connessione: ad esempio si vede facilmente che tutto lo spazio meno una sfera è un insieme semplicemente connesso. Tutto lo spazio meno una curva semplice γ_1 (che cioè non si autointerseca) invece non lo è : le curve γ_2 che si allacciano ad essa non possono deformarsi ad una curva banale.



Sono sicuramente insiemi semplicemente connessi:

(a) gli **insiemi stellati**, vale a dire gli insiemi A tali che esiste $p \in A$ con la proprietà che per ogni $q \in A$, il segmento congiungente p e q è tutto contenuto in A;



(b) gli **insiemi convessi** (che sono stellati rispetto ad ogni loro punto).

4. Siamo ora pronti ad enunciare la condizione differenziale che garantisce la conservatività di un campo $\vec{F}$ di classe C^1: chiaramente possiamo supporre che $\vec{F}$ sia irrotazionale, altrimenti, grazie alla condizione necessaria, $\vec{F}$ non può essere conservativo.

   Teorema 6.15 (Condizione differenziale). *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^N$* **semplicemente connesso***, e sia $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo di classe C^1 e* **irrotazionale***. Allora $\vec{F}$ è conservativo.*

   La dimostrazione della condizione differenziale discende da una proprietà sugli integrali curvilinei dei campi irrotazionali e, grazie alla semplice connessione di A, dalla condizione integrale. La proposizione seguente contiene la proprietà essenziale dei campi irrotazionali che ci serve per dimostrare il Teorema 6.15: la dimostrazione della Proposizione 6.16 è complessa ed è pertanto omessa.

   Proposizione 6.16 (Campi irrotazionali ed integrali curvilinei). *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo irrotazionale di classe C^1. Allora se $\gamma, \eta : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ sono due curve C^1 a tratti omotope in A, si ha*

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_\eta \vec{F}.$$

   Dunque, se $\vec{F}$ è irrotazionale, deformando in modo continuo una curva senza modificarne gli estremi, il valore dell'integrale curvilineo non cambia.

   E' facile vedere ora che l'integrale di $\vec{F}$ su percorsi chiusi è nullo, cioè che $\vec{F}$, grazie alla condizione integrale, è conservativo. Sia infatti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva chiusa in A di classe C^1 a tratti.

   - Essendo A semplicemente connesso, γ è contrattile in A, cioè può essere deformata alla curva banale $\tilde{\gamma}$ che si riduce alla sua origine $p = \gamma(a) = \gamma(b)$.

- Essendo $\vec{F}$ irrotazionale si ha che l'integrale curvilineo non cambia durante la deformazione
$$\oint_\gamma \vec{F} = \oint_{\tilde{\gamma}} \vec{F}.$$
- Essendo $\tilde{\gamma}$ una curva banale (in particolare $\tilde{\gamma}' = 0$) si ha
$$\oint_\gamma \vec{F} = \oint_{\tilde{\gamma}} \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t)\, dt = 0.$$

6.5 Metodi per determinare un potenziale

Ci sono essenzialmente due strade per determinare un potenziale di un campo conservativo.

1. Si può utilizzare la **relazione tra potenziale ed integrali curvilinei**. Per illustrare il metodo, consideriamo per semplicità il caso dei campi bidimensionali. Abbiamo che
$$\int_\gamma \vec{F} = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0)$$
dove γ è una qualsiasi curva in A che congiunge $p = (x_0, y_0)$ e $q = (x, y)$. Se cerchiamo il potenziale che vale 0 in (x_0, y_0), si ha
$$\Phi(x, y) = \int_\gamma \vec{F}.$$
Esempio 6.17. Dato il campo conservativo $\vec{F}(x, y) = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$, un suo potenziale è dato da
$$\Phi(x, y) = \int_\gamma \vec{F}$$
dove γ è una qualsiasi curva che congiunge $(0, 0)$ con (x, y). Se scegliamo il segmento $\gamma(t) = (tx, ty)$ con $t \in [0, 1]$, si ha $\gamma'(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ e
$$\Phi(x, y) = \int_0^1 (2t^2xy\,\vec{i} + t^2x^2\,\vec{j}) \cdot (x\,\vec{i} + y\,\vec{j})\, dt = \int_0^1 3x^2yt^2\, dt = x^2y.$$

2. Oppure si può utilizzare il **metodo degli integrali indefiniti**. Consideriamo nuovamente per semplicità il caso di campi bidimensionali. Il metodo si basa sulle relazioni differenziali
$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1(x, y) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2(x, y). \end{cases}$$
Normalmente si cerca di integrare la prima relazione rispetto a x considerando y costante: si ottiene così
$$\Phi(x, y) = \int F_1(x, y)\, dx + \alpha(y)$$

perché la costante può dipendere dalla variabile y che è stata fissata. La funzione $\alpha(y)$ si determina sostituendo nella seconda relazione che fornisce

$$\frac{d}{dy}\int F_1(x,y)\,dx + \alpha'(y) = F_2(x,y).$$

Chiaramente nulla vieta di integrare la seconda relazione rispetto a y e sostituire nella prima.

Esempio 6.18. Consideriamo il campo conservativo del punto precedente

$$\vec{F}(x,y) = 2xy\,\vec{i} + (x^2+y)\,\vec{j}$$

Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = F_1 = 2xy \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_2 = x^2+y. \end{cases}$$

Dalla prima, integrando rispetto a x si ha che

$$\Phi(x,y) = x^2y + h(y)$$

con h un'opportuna funzione dipendente solo da y. Se sostituiamo tale relazione nella seconda riga del sistema si ha

$$x^2 + h'(y) = x^2 + y$$

da cui ricaviamo che $h'(y) = y$ e cioè

$$h(y) = \frac{1}{2}y^2 + costante.$$

Quindi il potenziale Φ (o meglio tutta la famiglia dei potenziali) è data da

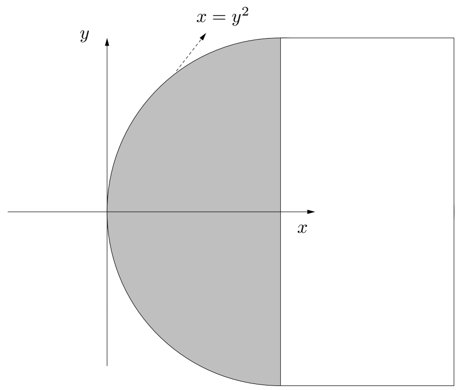
$$\Phi(x,y) = x^2y + \frac{1}{2}y^2 + costante.$$

6.6 Un'applicazione alla meccanica dei fluidi: come si comporta l'acqua di un fiume che incontra un ostacolo

Supponiamo di avere un fluido incomprimibile che scorre su un piano e che incontra un ostacolo B: è possibile determinare analiticamente il suo campo di velocità $\vec{v}(x,y)$? (Mettiamoci nel caso stazionario, cioè ignoriamo la dipendenza dal tempo.) Supponiamo che l'ostacolo B sia della forma

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$$

cioè che il fluido si muova in $\mathbb{R}^2 \setminus B$ (così da simulare un fiume che si divide in due).



L'incomprimibilità del fluido si traduce nell'equazione differenziale

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

Questa relazione è difficile da capire: la giustificazione completa richiederebbe il teorema di Gauss sulla divergenza. Ma a noi interessa soltanto che essa valga. Inoltre, poiché il fluido scorre lungo la superficie dell'ostacolo, $\vec{v}$ deve essere tangente al bordo di B. Consideriamo il campo $\vec{F}$ ottenuto ruotando $\vec{v}$ di 90 gradi in senso antiorario: si ha

$$\vec{F}(x, y) = (-v_2(x, y), v_1(x, y)).$$

Notiamo che grazie al vincolo di incomprimibilità , risulta che $\vec{F}$ è irrotazionale: infatti

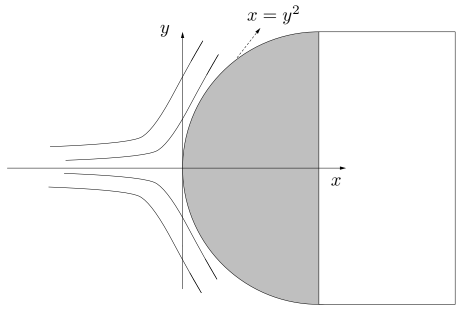
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Essendo $\mathbb{R}^2 \backslash B$ semplicemente connesso, si ha che $\vec{F}$ è conservativo, cioè esiste un potenziale $\Phi : \mathbb{R}^2 \backslash B \to \mathbb{R}$ tale che $\vec{F} = \nabla\Phi$. Dunque si ha $\vec{F} = R\vec{v} = \nabla\Phi$, dove R indica una rotazione di 90 gradi in senso antiorario. Essendo $\vec{v}$ tangente al bordo di B, risulta che $\nabla\Phi$ è normale a ∂B.
Il problema di trovare i possibili campi di velocità si è dunque ridotto a trovare un campo scalare Φ tale che $\nabla\Phi$ è normale a ∂B: ma questo è facile, basta prendere Φ costante su ∂B, poiché il gradiente è sempre ortogonale agli insiemi di livello.
Dunque tutti i campi di velocità che cerchiamo si trovano così : si prende un campo scalare Φ costante su ∂B, se ne fa il gradiente e lo si ruota di 90 gradi in senso orario! Ad esempio, se prendiamo $\Phi(x, y) = y(y^2 - x)$, si ha

$$\nabla\Phi(x, y) = (-y, 3y^2 - x)$$

e quindi, ruotando di 90 gradi in senso orario si ha

$$\vec{v} = (3y^2 - x)\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$



Esercizi

1. Sia $\vec{F}(x, y) = y\,\vec{i} + 2x\,\vec{j}$ e sia
$$\Psi(x, y) = \int_\gamma \vec{F}$$
dove γ è la concatenazione delle curve che congiungono $(0, 0)$ con $(x, 0)$ e $(x, 0)$ con (x, y). Calcolare $\nabla\Psi$.

2. Siano $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^2$ un campo irrotazionale tale che
$$\int_\gamma \vec{F} = 0$$
dove γ è la circonferenza unitaria. Dimostrare che $\vec{F}$ è conservativo.

3. Nel seguente esercizio vediamo come dimostrare la condizione integrale di conservatività di un campo nel caso tridimensionale. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo tale che l'integrale curvilineo sia indipendente dalla traiettoria. Sia
$$\Psi(x, y, z) = \int_\gamma \vec{F}$$
dove γ è una qualsiasi curva che congiunge $(0, 0, 0)$ con (x, y, z).

   (a) Fissiamo (x_0, y_0, z_0): dimostrare che
   $$\Psi(x, y_0, z_0) = \Psi(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} F_1(s, y_0, z_0)\, ds$$
   (Considera γ come concatenazione di una curva che arriva in (x_0, y_0, z_0) e che poi procede in orizzontale.)

   (b) Dalla relazione precedente ricavare che $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = F_1(x_0, y_0, z_0)$.

   (c) Dedurre che Ψ è differenziabile e che $\nabla\Psi = \vec{F}$, cioè che Ψ è un potenziale di $\vec{F}$.