Capitolo 1

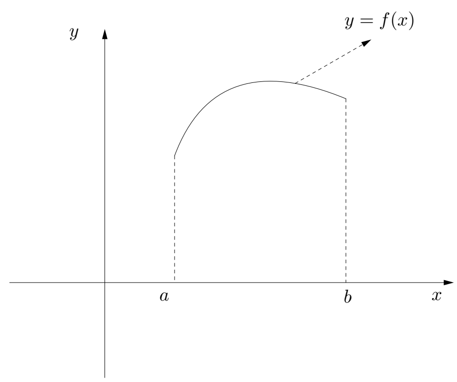
Integrale di Riemann

In questo capitolo svilupperemo la teoria dell'integrazione secondo Riemann per funzioni di una variabile reale.

1.1 Motivazioni

Consideriamo i seguenti problemi.

1. **Calcolo di un'area.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva il cui grafico sia quello rappresentato in figura.



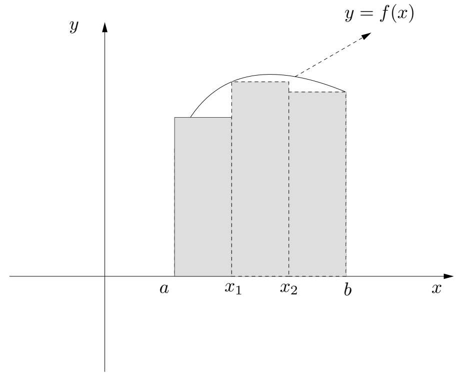
L'area A della figura compresa tra il grafico di f e il segmento $[a, b]$ riportato sull'asse delle x non è calcolabile elementarmente se il grafico di f non è rettilineo. Un modo per calcolare A può essere quello di usare il seguente processo di approssimazione. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ tramite dei punti di suddivisione $x_1, x_2, \dots, x_n$ e poniamo per comodità $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$. Sia I_j l'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$. Se I_j è abbastanza piccolo, la variazione di f su I_j sarà piccola, cioè f sarà approssimativamente costante. Sia $\xi_j \in I_j$: un'approssimazione dell'area A_j sottesa da f su I_j è dunque

$$A_j \sim f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j).$$

Concludiamo che un'approssimazione di A è data dalla somma delle A_j, cioè

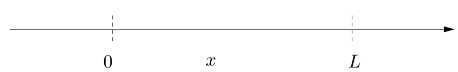
$$A \sim \tilde{A} = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j). \tag{1.1}$$

Se la scelta dei punti di suddivisione è operata in modo da risultare abbastanza fitta, ci si aspetta che $\tilde{A}$ sia una buona approssimazione di A: anzi, più la suddivisione è fitta, più $\tilde{A}$ si avvicinerà ad A.



2. **Calcolo della massa di una trave.** Consideriamo una trave di lunghezza L riportata sull'asse reale in modo che un estremo sia in $x = 0$ e l'altro in $x = L$. Sia $\rho(x)$ la densità di massa per unità di lunghezza nel punto $x \in [0, L]$: ciò significa che una piccola zona di lunghezza ε vicino a x ha massa

$$m_\varepsilon \sim \rho(x)\varepsilon.$$



La funzione $\rho(x)$ non è supposta continua: in questo modo è possibile tenere conto del fatto che la trave sia composta di diversi materiali nelle sue diverse parti, un caso che può essere utile nelle applicazioni.

Un'approssimazione della massa M della trave può ottenersi nel seguente modo: scegliamo dei punti di suddivisione $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ponendo per comodità $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = L$, ed includendo in essi i punti di discontinuità di ρ. Se l'intervallo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ è sufficientemente piccolo, la massa del tratto I_j è data circa da

$$m_j \sim \rho(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

dove ξ_j è un punto di I_j, ad esempio il suo punto medio. Dunque un'approssimazione della massa M della trave è data dall'espressione

$$M \sim \tilde{M} = \sum_{j=0}^{n} \rho(\xi_j)(x_{j+1} - x_j).$$

All'infittirsi della suddivisione, $\tilde{M}$ diverrà un'approssimazione sempre migliore di M. Abbiamo ottenuto un risultato simile a quello della formula (1.1).

1.2 Definizione di integrale

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo limitato con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, cioè esiste una costante $M \geq 0$ tale che per ogni $x \in [a, b]$

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Diamo ora una formulazione matematica rigorosa delle idee viste nella sezione precedente.

1. Diciamo che $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ è una **suddivisione** di $[a, b]$ se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

2. Sia $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$: diremo che la quantità

$$\sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

è una **somma di Riemann** di f relativa alla suddivisione S. Come visto nella sezione precedente, le somme di Riemann nascono in modo naturale nelle applicazioni.

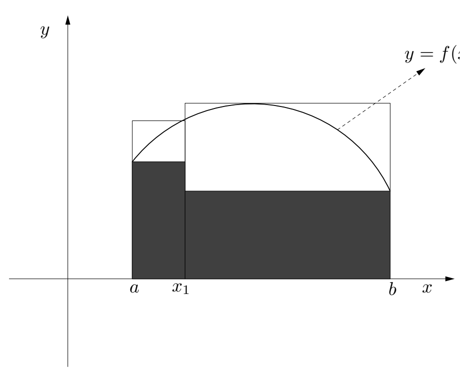
3. Poniamo

$$\Sigma'(f, S) := \sum_{j=0}^{n} \left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

e

$$\Sigma''(f, S) := \sum_{j=0}^{n} \left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

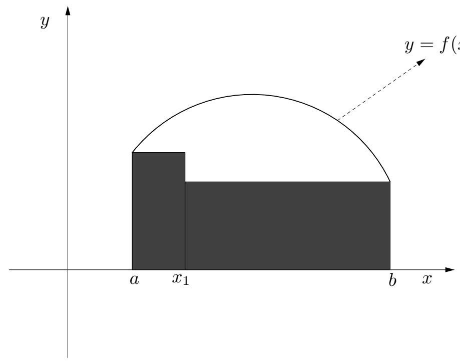
I numeri reali $\Sigma'(S, f)$ e $\Sigma''(S, f)$ si chiamano rispettivamente **somma inferiore** e **somma superiore** associate alla funzione f e alla suddivisione S. Chiaramente, ogni somma di Riemann relativa a S è compresa tra $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$.



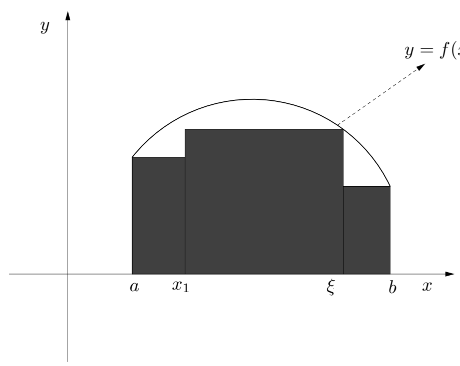
4. Diciamo che una suddivisione T è un raffinamento della suddivisione S se T contiene i punti di suddivisione di S, cioè $S \subseteq T$. In tal caso si ha che

$$\Sigma'(f,S) \leq \Sigma'(f,T) \qquad \text{e} \qquad \Sigma''(f,S) \geq \Sigma''(f,T).$$

E' facile capire queste relazioni nel caso in cui T si ottiene da S aggiungendo un punto di suddivisione ξ: il risultato generale discende da questo, aggiungendo un punto alla volta. Se $S = \{a, x_1, b\}$ e $T = \{a, x_1, \xi, b\}$ si ha per le somme inferiori



e



Dunque raffinando la suddivisione di $[a,b]$ la somma inferiore cresce, mentre quella superiore decresce.

5. Poniamo

$$\mathcal{I}'(f) := \sup_S \Sigma'(f,S) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}''(f) := \inf_S \Sigma''(f,S).$$

I numeri reali $\mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(f)$ si dicono rispettivamente **integrale inferiore** e **integrale superiore** di f su $[a,b]$.

Abbiamo immediatamente la disuguaglianza $\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f)$.

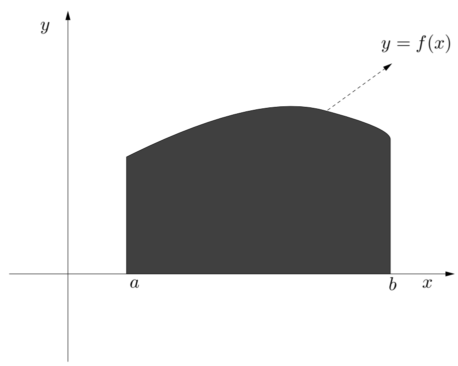
6. Possiamo ora dare la definizione di integrabilità nel senso di Riemann.

Definizione 1.1 (Integrabilità secondo Riemann). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diciamo che f è integrabile secondo Riemann se $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Tale valore si dice l'integrale di f sull'intervallo $[a, b]$ e si indica con i simboli*

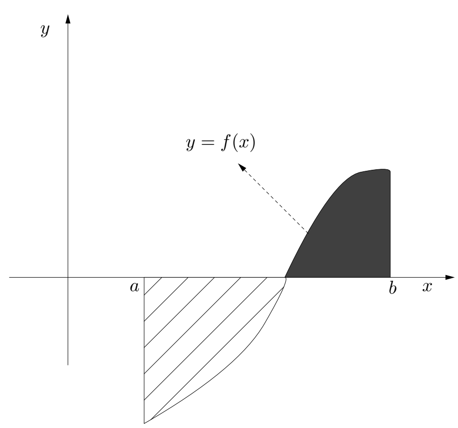
$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{oppure} \qquad \int_a^b f\,dx,$$

Poiché in questo corso useremo solo l'integrazione secondo Riemann, ometteremo di indicare che l'integrabilità è intesa nel senso di Riemann.

Se f è positiva, $\int_a^b f(x)\,dx$ può interpretarsi come l'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di f.



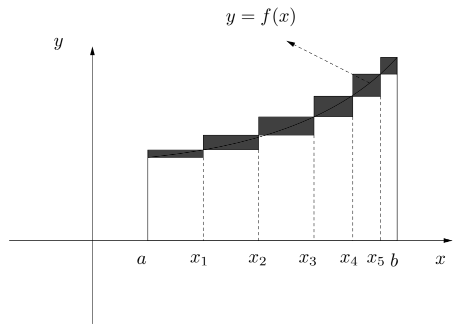
Nel caso in cui $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area tra f e l'asse delle ascisse ma con il segno negativo. Se f cambia segno sull'intervallo $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene conto del "bilanciamento" tra le aree positive e quelle negative.



7. La seguente proposizione contiene una caratterizzazione della classe delle funzioni integrabili.

Proposizione 1.2 (C.n.s. per l'integrabilità). *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Allora* f *è integrabile se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una suddivisione* S_ε *di* $[a, b]$ *tale che*

$$\Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon) \le \varepsilon. \tag{1.2}$$



Geometricamente possiamo interpretare il risultato in questo modo: f è integrabile se e solo se il suo grafico può ricoprirsi con un numero finito di rettangoli associati ad una suddivisione la somma delle cui aree è piccola a piacere.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile, cioè si abbia $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$, e sia $\eta > 0$. Possiamo trovare due suddivisioni T_1 e T_2 di $[a, b]$ tali che

$$\mathcal{I}'(f) \le \Sigma'(f, T_1) + \eta \quad \text{e} \quad \Sigma''(f, T_2) \le \mathcal{I}''(f) + \eta.$$

Considerando la suddivisione $S_\eta = T_1 \cup T_2$ si ha

$$\mathcal{I}'(f) \le \Sigma'(f, S_\eta) + \eta \quad \text{e} \quad \Sigma''(f, S_\eta) \le \mathcal{I}''(f) + \eta.$$

Otteniamo

$$\Sigma''(f, S_\eta) \le \mathcal{I}''(f) + \eta = \mathcal{I}'(f) + \eta \le \Sigma'(f, S_\eta) + 2\eta$$

da cui

$$\Sigma''(f, S_\eta) - \Sigma'(f, S_\eta) \le 2\eta.$$

Se $2\eta < \varepsilon$, la suddivisione S_η è quella cercata.

Viceversa supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una suddivisione S_ε di $[a, b]$ tale che

$$\Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon) \le \varepsilon.$$

Allora si ha

$$\mathcal{I}''(f) \le \Sigma''(f, S_\varepsilon) \le \Sigma'(f, S_\varepsilon) + \varepsilon \le \mathcal{I}'(f) + \varepsilon.$$

Poiché ε è arbitrario, si ha $\mathcal{I}''(f) \le \mathcal{I}'(f)$. Poiché è sempre $\mathcal{I}'(f) \le \mathcal{I}''(f)$, si ottiene $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$, cioè f è integrabile. ∎

8. Sia S_ε una suddivisione di $[a, b]$ tale che valga (1.2), e sia

$$\Sigma = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

una somma di Riemann associata a S_ε. Dalle disuguaglianze

$$\Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \Sigma \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon)$$

e

$$\Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon)$$

ricaviamo la disuguaglianza

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \Sigma \right| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Dunque una qualsiasi somma di Riemann relativa S_ε fornisce una buona approssimazione dell'integrale di f su $[a, b]$.

1.3 Classi di funzioni integrabili

In questa sezione vediamo che la classe di funzioni integrabili è molto ampia così da coprire gran parte delle funzioni utili nelle applicazioni all'ingegneria.

1. Chiaramente **sono integrabili le funzioni costanti**, ed anzi sappiamo calcolare anche il valore del loro integrale

$$\int_a^b c\, dx = c(b - a).$$

2. **Sono sicuramente integrabili le funzioni continue** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Innanzitutto f è limitata per il teorema di Weierstrass. Per vedere l'integrabilità , fissiamo $\eta > 0$ e dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali di lunghezza dunque $(b - a)/n$. Essendo f continua, se n è molto grande avremo che l'oscillazione di f su ogni intervallo sarà minore di η: di conseguenza la parte di grafico di f relativa ad ogni intervallo potrà essere inclusa in un rettangolo di base $(b - a)/n$ e di altezza η. Sommando le aree di tutti questi rettangoli otterremo una quantità uguale a

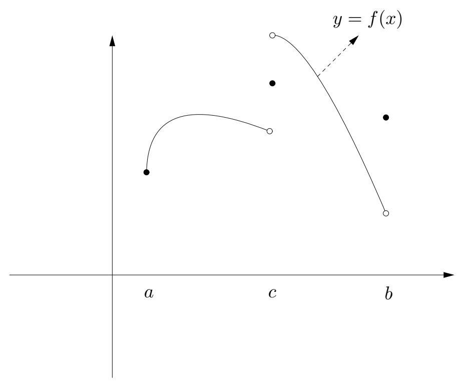
$$n \frac{b - a}{n} \eta = (b - a)\eta,$$

che per l'arbitrarietà di η può essere resa piccola a piacere.

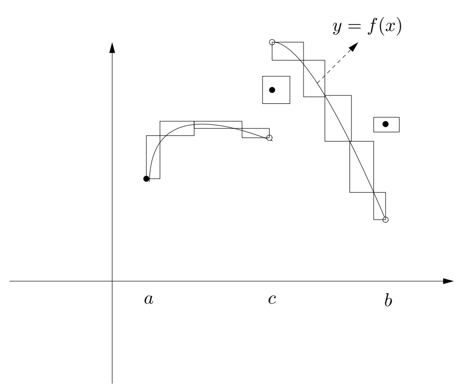
3. Siamo però interessati ad integrare anche funzioni discontinue (come nell'esempio del calcolo della massa). Una classe di funzioni discontinue molto utili nelle applicazioni sono le funzioni **continue a tratti**. Diciamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$ tale che f è continua su ogni intervallo aperto $]x_j, x_{j+1}[$ ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_{j+1}^-} f(x).$$

Un grafico tipico di funzioni continue a tratti è il seguente.



Anche le funzioni continue a tratti sono integrabili. A parte i valori in corrispondenza dei punti della suddivisione S, il grafico di f è contenuto nell'unione di grafici di funzioni continue: dunque in base al punto precedente, possiamo ricoprirlo tramite un numero finito di rettangoli di area piccola a piacere. I punti eccezionali sono poi in numero finito: dunque possiamo ricoprirli con un numero finito di quadrati di area piccola a piacere. Globalmente, il grafico di f viene così ricoperto con rettangoli la somma delle cui aree è piccola a piacere: dunque f è integrabile.



4. Non tutte le funzioni limitate sono integrabili. Ad esempio non lo è la funzione

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

poiché $\mathcal{I}'(f) = 0$ e $\mathcal{I}''(f) = 1$. f è detta *funzione di Dirichlet*.

1.4 Proprietà dell'integrale

Vediamo ora alcune proprietà del calcolo integrale molto utili nelle applicazioni.

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzione integrabili, e siano $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$. Si può innanzitutto dimostrare che le funzioni

$$f + g, \qquad \lambda f, \qquad |f|$$

e la restrizione di f a qualsiasi sottointervallo sono a loro volta integrabili. Inoltre valgono le seguenti proprietà .

   (a) **Linearità** :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx;$$

   (b) **Confronto**: se $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx;$$

   (c) **Suddivisione**: se $c \in]a,b[$

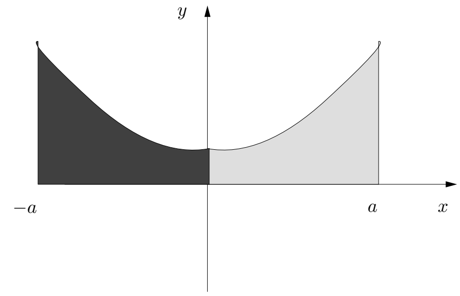
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

   (d) **Confronto con il modulo**:

$$\left| \int_a^b f(x) \right| dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

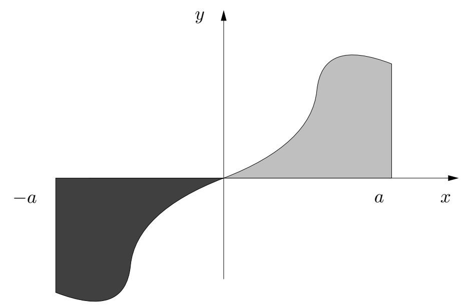
2. Se la funzione f è definita su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, cioè del tipo $[-a,a]$ con $a > 0$, e f possiede particolari **simmetrie**, esse si riflettono sul calcolo dell'integrale. Se $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ è una funzione **pari** (cioè $f(-x) = f(x)$), allora

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$



Se invece f è una funzione **dispari** (cioè $f(-x) = -f(x)$) si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$



1.5 La media integrale

L'integrale può essere usato per fornire una generalizzazione del concetto di media per grandezze che variano.

1. Per capire il collegamento tra l'integrale ed il concetto di media, torniamo al caso delle funzioni continue. Abbiamo visto che esse sono integrabili considerando la suddivisione S di $[a, b]$ in n intervalli uguali di ampiezza $(b - a)/n$ e vedendo che relativamente ad essa, somma inferiore e somma superiore si scostano di una quantità sempre più piccola al crescere di n. Scegliamo un punto ξ_i qualsiasi all'interno dell'i-esimo intervallo: per definizione di somma inferiore e superiore abbiamo la disuguaglianza

$$\Sigma'(f, S) \le f(\xi_1)\frac{b-a}{n} + f(\xi_2)\frac{b-a}{n} + \cdots + f(\xi_n)\frac{b-a}{n} \le \Sigma''(f, S).$$

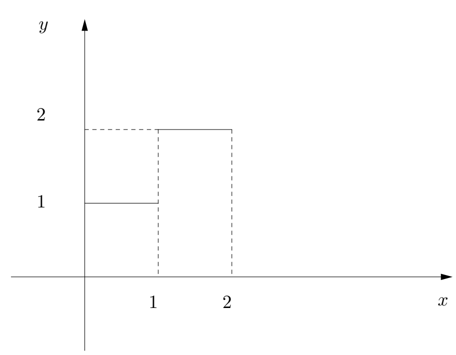
Poiché $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$ sono sempre più vicini tra loro e vicini all'integrale di f al crescere di n, concludiamo che per n sempre più grande la quantità

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n}(b - a) \sim \int_a^b f(x)\,dx$$

e cioè
$$\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n} \sim \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$
Dunque l'integrale di f diviso per $b-a$ rappresenta una sorta di media aritmetica dei valori della f (i valori di f sono infiniti, noi abbiamo operato in un certo senso un campionamento).

2. In base a quanto visto, siamo portati a dare la seguente definizione per una qualsiasi funzione integrabile: diciamo **media integrale** di una funzione integrabile f su $[a,b]$ il valore
$$M_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$
Scrivendo la relazione precedente nella forma
$$\int_a^b f(x)\,dx = M_f(b-a),$$
deduciamo che M_f ha il seguente significato geometrico: tenendo conto della convenzione sui segni sulle aree, l'area associata al grafico di f è equivalente ad un rettangolo di base $b-a$ e altezza M_f.

   Bisogna notare che se f è discontinua, il valore M_f è un valore medio in un senso molto debole. Sicuramente
$$\inf_{[a,b]} f \leq M_f \leq \sup_{[a,b]} f$$
ma non è detto che esista $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = M_f$: in altre parole M_f potrebbe non essere mai assunto dalla funzione. Questa situazione capita ad esempio per la funzione riportata in figura:



   Si ha infatti $M_f = 3/2$, ed f assume solo i valori 1 e 2.

3. Nel caso delle funzioni continue, la media integrale M_f è effettivamente un valore assunto da f.

Teorema 1.3 (Teorema della media). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$ e cioè*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

Dimostrazione. Siano m e M il minimo ed il massimo di f su $[a, b]$: dalla disuguaglianza

$$\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M,$$

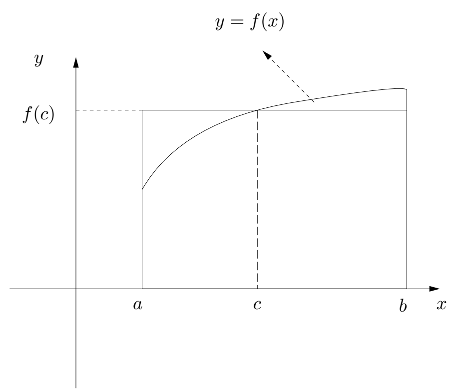
integrando su $[a, b]$ ed utilizzando la proprietà del confronto si ha la disuguaglianza

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a),$$

che dividendo per $b - a$ porta a

$$m \leq M_f \leq M.$$

Poiché f assume, essendo continua, tutti i valori intermedi tra m e M, si ha che esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$, ed il teorema è così dimostrato. ■



1.6 I teoremi fondamentali del calcolo

In questa sezione collegheremo il problema dell'integrazione al problema del calcolo della primitiva di una funzione: in ciò consistono i teoremi fondamentali del calcolo.

1. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, e siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $F : I \to \mathbb{R}$ due funzioni. Diciamo che F è una **primitiva** di f su I se F è derivabile su I e si ha

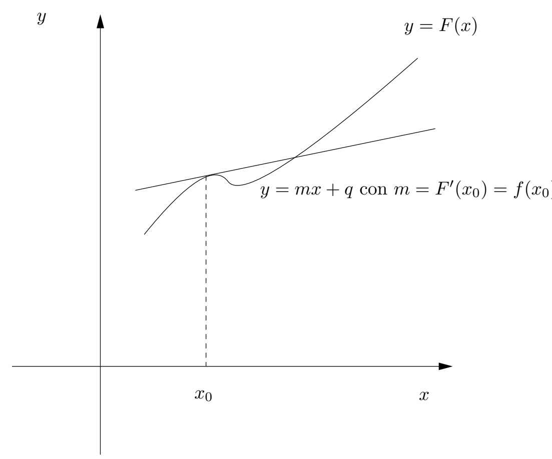
$$\forall x \in I \;:\; F'(x) = f(x).$$

Ad esempio, $F(x) = x^2$ è una primitiva su $\mathbb{R}$ di $f(x) = 2x$, così come $G(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$ è una primitiva su $\mathbb{R}$ di $g(x) = \cos(2x)$.

L'insieme delle primitive di f (se esistono) si usa indicare con il simbolo

$$\int f(x)\,dx;$$

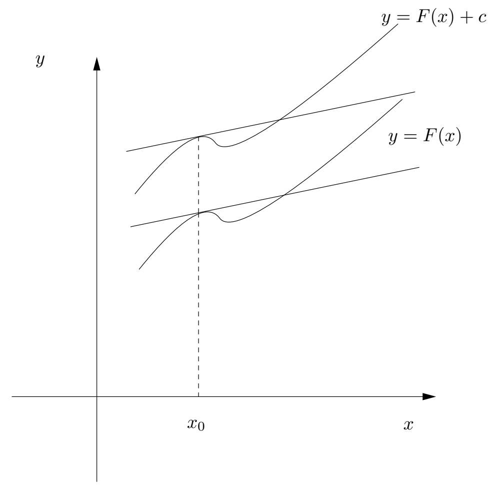
la scelta del simbolo già anticipa il legame con il problema dell'integrazione. Geometricamente, una primitiva F di f è una funzione tale che per ogni $x_0 \in I$ la tangente al grafico di F nel punto x_0 è una retta il cui coefficiente angolare è proprio pari a $f(x_0)$.



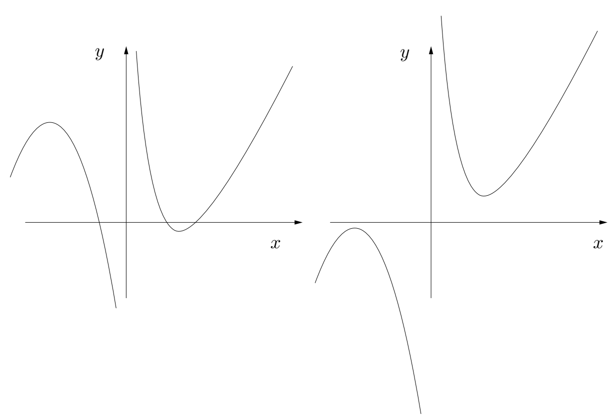
2. Il **problema delle primitive** può enunciarsi così : **determinare l'insieme di tutte le primitive su I della funzione $f : I \to \mathbb{R}$.** Tale problema non è affatto semplice: innanzitutto f potrebbe non ammettere primitive (vedi gli esercizi per un esempio esplicito); oppure potrebbe ammetterne, ma esse non risultano facili da calcolare esplicitamente. Una cosa che possiamo facilmente notare è che se f ammette una primitiva F, allora anche $F+c$, con $c \in \mathbb{R}$, è una primitiva di f: infatti derivando si ha che la costante sparisce, così che

$$(F + c)'(x) = F'(x) = f(x).$$

Lo stesso fatto può capirsi geometricamente in termini di traslazioni del grafico di F.



Infatti traslando in verticale il grafico di F, si ottiene una nuova curva tale che la retta tangente nel punto x_0 ha chiaramente inclinazione pari ancora a $f(x_0)$: dunque la nuova funzione è ancora una primitiva di f. Concludiamo che **se l'insieme delle primitive è non vuoto, esso contiene infinite funzioni**, in particolare quelle ottenute sommando una costante arbitraria. Il ragionamento geometrico sopra illustrato può farci capire una cosa molto importante: se il grafico di F si compone di più pezzi, cioè f non è definita su un intervallo ma su un'unione di intervalli, allora ogni tratto del grafico può essere traslato in maniera indipendente dagli altri. Di conseguenza la generica primitiva di f può venire a dipendere da tante costanti arbitrarie.



Ad esempio la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ammette come primitive tutte le funzioni della forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con in generale $c_1 \neq c_2$.

3. Nel caso in cui f sia definita su un intervallo, le primitive dipendono da una sola costante arbitraria.

Proposizione 1.4 (Due primitive su un intervallo differiscono per una costante). *Siano $F, \tilde{F}$ due primitive di f sull'intervallo I. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{F} = F + c$.*

Dimostrazione. Per vederlo, basta provare che la funzione $G(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$ è costante. Infatti si ha

$$G'(x) = (\tilde{F}(x) - F(x))' = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

e cioè la funzione G ha derivata nulla in ogni punto: poiché G è definita su un intervallo I, per ogni $[a, b] \subseteq I$ si ha per il Teorema di Lagrange che esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$G(b) - G(a) = G'(c)(b - a) = 0,$$

cioè $G(b) = G(a)$. Dunque G è una funzione costante. ∎

4. Per formulare i teoremi fondamentali del calcolo, abbiamo bisogno delle seguente convenzione sui segni. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile e se $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$, poniamo

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_\beta^\alpha f(x)\, dx := -\int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

Anche con questa convenzione abbiamo che per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\, dx + \int_\gamma^\beta f(x)\, dx,$$

cioè vale ancora una formula di suddivisione per l'integrale.

5. Possiamo enunciare ora il primo teorema fondamentale del calcolo.

Teorema 1.5 (Primo Teorema Fondamentale del Calcolo). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $c \in [a, b]$ e sia $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$A(x) := \int_c^x f(t)\, dt.$$

Allora A è derivabile per ogni $x \in]a, b[$ e si ha

$$A'(x) = f(x).$$

Dimostrazione. Notiamo che la funzione A è ben definita essendo f continua e dunque integrabile. Inoltre se $x \leq c$, bisogna considerare la convenzione sui segni precedentemente introdotta.

La derivata di A in $x \in]a, b[$ è data dal limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}.$$

Esso è ben definito perché per h piccolo si ha sicuramente $x + h \in]a, b[$. Inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \int_c^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Se $h > 0$, per il teorema della media esiste $\xi_h \in [x, x+h]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)h.$$

Se $h < 0$, per la convenzione sui segni si ha

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -\int_{x+h}^x f(t)\,dt$$

così che per il teorema della media esiste $\xi_h \in [x+h, x]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -f(\xi_h)(-h) = f(\xi_h)h.$$

Concludiamo che per ogni h positivo o negativo esiste ξ_h appartenente all'intervallo determinato da x e $x + h$ tale che

$$A(x+h) - A(x) = f(\xi_h)h$$

e cioè

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(\xi_h).$$

Facciamo ora tendere $h \to 0$: si ha $\xi_h \to x$, ed essendo f continua $f(\xi_h) \to f(x)$. Dunque si ha

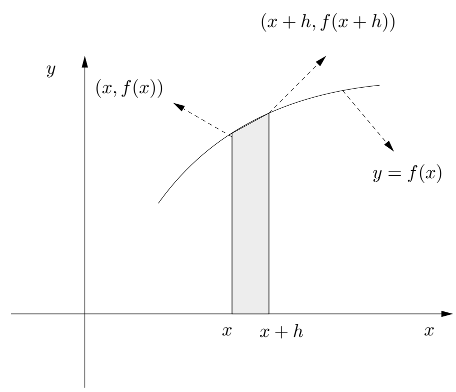
$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

e la tesi è dimostrata. ■

Il risultato del primo teorema fondamentale del calcolo può essere capito tramite il seguente ragionamento geometrico: la quantità

$$A(x+h) - A(x)$$

rappresenta l'area della regione R_h determinata da f sull'intervallo $[x, x+h]$.



R_h è un poligono con un lato curvilineo, quello relativo al grafico di f che congiunge i punti $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$: essendo f continua, per h piccolo il lato curvilineo differisce poco da quello orizzontale ad altezza $f(x)$. L'area di R_h è dunque approssimativamente quella del rettangolo di base $[x, x+h]$ e altezza $f(x)$, e tale approssimazione è sempre migliore al tendere di h a zero. Ricaviamo

$$A(x+h) - A(x) \sim f(x)h$$

da cui

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x) = f(x).$$

Questo ragionamento intuitivo mostra che il risultato del teorema è valido nella sola ipotesi della continuità di f in x: per questo si vedano gli Esercizi.

6. Come conseguenza del Primo Teorema Fondamentale del Calcolo deduciamo che le funzioni continue $f : I \to \mathbb{R}$ ammettono sempre una primitiva: anzi sappiamo che esse si ottengono aggiungendo una costante arbitraria alla funzione

$$A(x) = \int_c^x f(t)\, dt$$

dove c è un elemento di I. Dunque le primitive di una funzione continua si costruiscono facendo uso del procedimento di integrazione.

7. Guardiamo ora il legame tra primitiva ed integrazione osservato al punto precedente nel senso opposto. Di questo si occupa il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo.

   Teorema 1.6 (Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo). *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $a, b \in I$ si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

   dove F è una qualsiasi primitiva di f.

   Dimostrazione. Sappiamo che f ammette primitive su I, ed anzi, una primitiva di f è data ad esempio da

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

   Poiché due primitive di f differiscono per una costante su I, si ha che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in I$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c.$$

   Se scegliamo $x = a$, si ottiene

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c$$

   e cioè $c = -F(a)$. Si ha dunque

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

   Sostituendo $x = b$ si ha

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

   che è la tesi. ■

   Si scrive spesso $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ così che la conclusione del teorema si scrive

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$

   Dunque concludiamo che il procedimento di integrazione di una funzione continua f, anziché compiersi secondo definizione analizzando somme inferiori e superiori (che è laborioso), può svolgersi trovando una primitiva F e calcolando la differenza $F(b) - F(a)$. Vediamo alcuni esempi.

(a) Calcolare $\int_1^5 x^3\,dx$. Una primitiva su $\mathbb{R}$ di $f(x) = x^3$ è $F(x) = \frac{x^4}{4}$ poiché

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4}(x^4)' = \frac{1}{4}4x^3 = x^3.$$

Dunque

$$\int_1^5 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^5 = \frac{5^4-1}{4}.$$

(b) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx.$$

Una primitiva di $\sin(2x)$ è $-\frac{\cos 2x}{2}$. Dunque

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\cos\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo sposta l'attenzione dalle somme inferiori e superiori al problema di trovare una primitiva. A partire dalle regole di derivazione, bisogna dunque capire cosa succede andando "all'indietro". Il teorema è dunque efficace per risolvere gli integrali se abbiamo un bagaglio sufficientemente ampio di funzioni di cui sappiamo calcolare la primitiva.

1.7 Formule di integrazione

In questa sezione vediamo due procedimenti di integrazione molto utili nelle applicazioni: l'integrazione per parti e l'integrazione per sostituzione.

1. Cominciamo con **l'integrazione per parti**. Essa riguarda essenzialmente l'integrazione di funzioni che si presentano sotto forma di prodotto.

   Proposizione 1.7 (Calcolo dell'integrale per parti). *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora per ogni $a, b \in I$ abbiamo che*

   $$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

   Dimostrazione. Dalla derivazione di un prodotto si ha $(fg)' = f'g + fg'$ da cui

   $$fg' = (fg)' - f'g.$$

Per l'ipotesi su f e g, le funzioni che compaiono nella formula sono continue e dunque integrabili. Se integriamo tra a e b, applicando le proprietà dell'integrale ed il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo si ha

$$\int_a^b fg'\,dx = \int_a^b [(fg)' - f'g]\,dx = \int_a^b (fg)'\,dx - \int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'g\,dx$$

che è la tesi. ∎

Per applicare l'integrazione per parti occorre decidere quale funzione considerare come f e quale come g: la scelta è dettata dall'esperienza. La formula sottintende che il problema del calcolo di una primitiva di $f'g$ debba essere più semplice di quello di partenza fg'.

Esempio 1.8. Consideriamo

$$\int_0^1 xe^x\,dx.$$

Scegliendo $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$ si ha $g(x) = e^x$ da cui

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

2. Passiamo ora all'**integrazione per sostituzione**. Esso consiste essenzialmente in un cambio di variabile, cioè nel passaggio dalla variabile $x \in [a,b]$ ad una nuova variabile, diciamola t, legata ad x dalla relazione

$$x = \varphi(t).$$

La funzione φ deve essere invertibile così da potersi scrivere

$$t = \varphi^{-1}(x),$$

cioè trovare t in funzione di x.

Proposizione 1.9 (Calcolo dell'integrale per sostituzione). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $x = \varphi(t)$ un cambiamento di variabile tale che φ sia derivabile con derivata continua. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Dimostrazione. Basta tenere presente che per il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo si ha che se F è una primitiva di f allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

D'altro canto la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile con

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

da cui

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

La tesi è dunque dimostrata scegliendo $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ e $\beta = \varphi^{-1}(b)$. ∎

Notiamo che nell'integrazione per sostituzione, passando da x a t occorre cambiare ovviamente gli estremi di integrazione, ma soprattutto la nuova funzione da integrare non è solo $f(\varphi(t))$ ma $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Fare un cambiamento di variabile presuppone che il calcolo della primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ sia più semplice di quello di $f(x)$.

Esempio 1.10. Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\ln 2}^{7} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx.$$

Se poniamo $e^x = t$, si ha $x = \ln t$. Scegliamo allora come funzione φ della formula d'integrazione per sostituzione l'applicazione $\varphi(t) = \ln t$ che è invertibile. Si ha

$$\begin{aligned} x = \ln 2 &\Longrightarrow t = e^{\ln 2} = 2 \\ x = 7 &\Longrightarrow t = e^7 \end{aligned}$$

e

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}.$$

Otteniamo

$$\int_{\ln 2}^{7} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx = \int_{2}^{e^7} \frac{t^2}{\sqrt{t-1}}\left(\frac{1}{t}\,dt\right) = \int_{2}^{e^7} \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt.$$

Il secondo membro è più facile da integrare. Una primitiva su $]0, +\infty[$ è data da

$$\int \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt = \int \left(\sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)dt = \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + 2(t-1)^{1/2}.$$

Dunque si ottiene

$$\int_{2}^{e^7} \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt = \left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + 2(t-1)^{1/2}\right]_2^{e^7} = \frac{2}{3}(e^7-1)^{3/2} + 2(e^7-1)^{1/2} - \frac{2}{3} - 2.$$

Esercizi

1. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili: dimostrare che $f + g$ è integrabile. (Suggerimento: mostrare che $\mathcal{I}'(f + g) \geq \mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g)$ e che $\mathcal{I}''(f + g) \leq \mathcal{I}''(f) + \mathcal{I}''(g)$).

2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$: dimostrare che λf è integrabile. (Suggerimento: considera prima il caso $\lambda \geq 0$ e prova che $\mathcal{I}'(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}''(f)$).

3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Dimostrare che $|f|$ è integrabile.

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Dimostrare che f^2 è integrabile.

5. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili. Dimostrare che fg è integrabile. (Suggerimento: ricorda che $4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$).

6. Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile, $c \in [a, b]$ e $d \in \mathbb{R}$. Dimostrare che
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq c \\ d & \text{se } x = c \end{cases}$$
è integrabile e $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. (Suggerimento: vedi che $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}'(g)$ e $\mathcal{I}''(f) = \mathcal{I}''(g)$).

7. Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile e $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dimostrare che A è continua.

8. Dimostrare che la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
non ammette primitive su $\mathbb{R}$.

9. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e continua in $x_0 \in]a, b[$. Sia $c \in [a, b]$ e sia $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da
$$A(x) := \int_c^x f(t)\,dt.$$
Dimostrare che A è derivabile in x_0 e che $A'(x_0) = f(x_0)$. (Suggerimento: cerca di seguire la dimostrazione geometrica del Primo Teorema Fondamentale del Calcolo.)

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
e sia $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Verificare che A non è derivabile in $x = 0$, ma ammette derivate destra e sinistra pari rispettivamente a 1 e -1.

11. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia $x_0 \in]a, b[$ tale che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$. Dimostrare che $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile da destra in x_0 e che la derivata destra vale l.

12. Dimostrare che la funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è continua a tratti, ma è integrabile su $[-1,1]$. (Suggerimento: dividi $[-1,1]$ negl'intervalli $[-1,-\varepsilon]$, $[-\varepsilon,\varepsilon]$ e $[\varepsilon,1]$...).

13. Si consideri la funzione di Riemann

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ con } m, n \text{ primi tra loro} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dimostrare che f è discontinua in tutti i punti razionali e continua in tutti i punti irrazionali. Dimostrare che f è integrabile su un qualsiasi intervallo $[a,b]$ e che $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.