Capitolo 5

Problemi di minimo e massimo

In questo capitolo utilizzeremo gli strumenti del calcolo differenziale per risolvere un problema che ricorre spesso nelle applicazioni, quello cioè di trovare il valore minimo e il valore massimo di una funzione su un insieme.

5.1 Formulazione del problema

Sia X un insieme e sia f una funzione definita su X a valori reali, cioè $f : X \to \mathbb{R}$: essendo i valori di f numeri reali, possiamo confrontarli tra loro e cercare dunque quello più alto o più basso.

1. Il problema di minimo e massimo è il seguente: calcolare (se esistono) il minimo e il massimo valore di f su X, cioè

   $$\min_X f \qquad \text{e} \qquad \max_X f.$$

   I punti in cui tali valori sono assunti si dicono punti di minimo e punti di massimo di f. Più precisamente si ha che $x \in X$ è **punto di minimo** (assoluto) di f su X se

   $$\forall y \in X \ : \ f(x) \le f(y),$$

   e similmente si ha che $x \in X$ è **punto di massimo** (assoluto) di f su X se

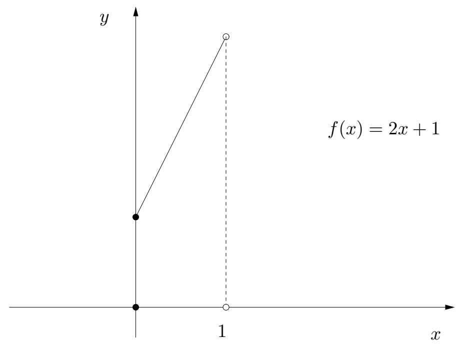
   $$\forall y \in X \ : \ f(y) \le f(x).$$

   I punti di minimo e massimo si dicono anche **punti d'estremo** per f, o **estremi** di f.

   Diremo che il problema di minimo (per il problema di massimo il discorso è analogo) ha soluzione o è ben posto se esistono punti di minimo e di conseguenza il valore minimo.

2. I problemi di minimo e massimo possono porsi senza che X o f abbiano particolari proprietà . Chiaramente, in questa generalità i problemi potrebbero non ammettere soluzione. Oppure, nel caso in cui l'ammettessero, potrebbe essere difficile trovare anche una pur minima caratterizzazione dei punti di estremo, ed un metodo che in linea di principio possa portarci ad individuarli.

Esempio 5.1. Se consideriamo ad esempio $X = [0, 1[$ e $f(x) = 2x+1$, abbiamo subito che f non ammette massimo su X ma ammette invece minimo. Infatti il minimo è 1 ed è assunto in $x = 0$. Invece f "tende" ad assumere il suo valore massimo vicino a $x = 1$, che però non appartiene a X.



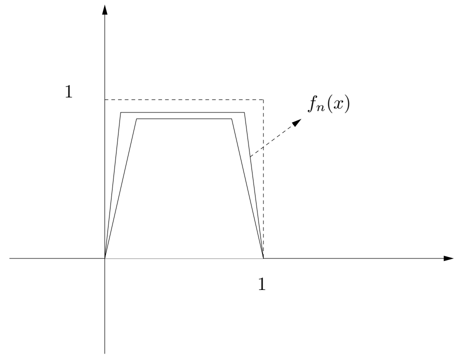
Esempio 5.2. Sia X l'insieme dei numeri razionali, e consideriamo il seguente problema di minimo: trovare l'elemento di X che dista il meno possibile da $\sqrt{2}$. Chiaramente il problema non ha soluzione, perché esistono numeri razionali q_n tali che $q_n \to \sqrt{2}$; dunque se esistesse una soluzione q, dovrebbe essere $q = \sqrt{2}$, ma ciò non può essere essendo $\sqrt{2}$ irrazionale.

Esempio 5.3. Sia X l'insieme delle funzioni continue f sull'intervallo $[0, 1]$ tali che $f(0) = f(1) = 0$ e $0 \leq f(x) \leq 1$. Consideriamo il seguente problema di massimo: trovare la funzione f che determina con l'asse x l'area massima. In altre parole, la funzione che rende massimo

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

Si vede che il problema non ha soluzione perché l'area di tutte le funzioni di X è al massimo 1, ed esistono delle funzioni f_n in X tali che

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx \to 1.$$



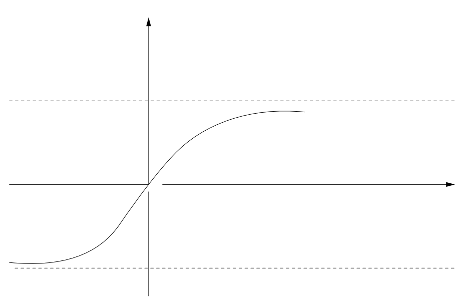
Dunque il valore massimo, se esistesse, dovrebbe essere 1. Ma non può esistere nessuna funzione di X con area pari a 1, perché le condizioni al bordo $f(0) = f(1) = 0$ fanno sì che ogni funzione di X abbia un'area sempre strettamente minore di 1.

3. Concludiamo dunque che in generale un problema di minimo e massimo non ammette soluzione: per ottenere almeno l'esistenza di punti di estremo, siamo costretti a fare delle ipotesi su X e su f.

5.2 Il caso delle funzioni di più variabili reali: il teorema di Weierstrass

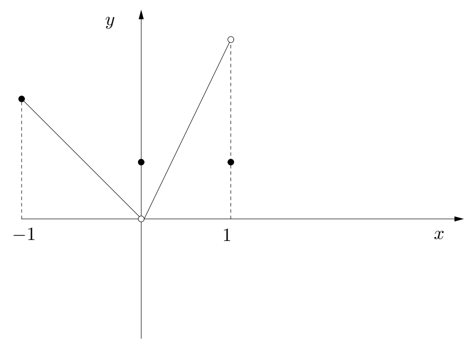
In questa sezione consideriamo il caso delle funzioni di più variabili reali $f : E \to \mathbb{R}$ dove $E \subseteq \mathbb{R}^N$, e vediamo quali ipotesi generali su E e f garantiscano la risolubilità del problema. Su E faremo ipotesi *topologiche*, mentre su f chiederemo proprietà di *regolarità* .

1. Cominciamo con l'insieme E. Come visto nell'Esempio 5.1, può capitare che f non ammetta massimo perché la funzione tende ad assumerlo vicino a punti dove non è definita. Oppure, se E è illimitato, può capitare che f non assuma il valore massimo perché "tende" ad assumerlo in punti che "*vanno all'infinito*" come nel caso d $f(x) = \arctan x$.



Dunque l'insieme E di definizione di f, per escludere casi immediati di non esistenza, deve essere **chiuso e limitato** e dunque, per la caratterizzazione vista nel Capitolo 3, E deve essere **compatto**.

2. Passiamo alla funzione f, assumendo che essa sia definita su un insieme compatto E. Se essa fosse discontinua, potrebbe verificarsi un caso come il seguente



Quindi, per escludere casi immediati di non esistenza, f deve essere **continua**.

3. Se f non ammette minimo o massimo, sono comunque ben definiti il suo estremo superiore ed inferiore. Diciamo che α è l'**estremo inferiore di** f **su** E se α è il più grande numero (evenutalmente uguale a $-\infty$) tale che

$$\forall p \in E : \alpha \leq f(p).$$

L'estremo inferiore di f su E si indica con $\inf_E f$. Similmente, diciamo che β è l'**estremo superiore di** f **su** E se β è il più piccolo numero (evenutalmente uguale a $+\infty$) tale che

$$\forall p \in E : f(p) \leq \beta.$$

L'estremo superiore di f su E si indica con $\sup_E f$. Nel caso di funzioni di due variabili $f(x, y)$, $\inf_E f$ ha il seguente significato geometrico: esso indica la quota massima sotto la quale tutti i piani del tipo $z = c$, paralleli cioè al piano xy, non intersecano la superficie $z = f(x, y)$. Similmente $\sup_E f$ indica la quota minima sopra la quale tutti i piani del tipo $z = c$ non intersecano la superficie $z = f(x, y)$.

4. Chiaramente f ammette minimo su E se esiste $p \in E$ tale che $f(p) = \inf_E f$, e similmente f ammette massimo su E se esiste $p \in E$ tale che $f(p) = \sup_E f$. Se f non ammette minimo o massimo su E, esistono sempre successioni di punti lungo cui f tende ad assumere il suo estremo superiore o il suo estremo inferiore. Si parla di **successioni minimizzanti o massimizzanti**.

Definizione 5.4 (Successioni minimizzanti e massimizzanti). *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione e sia* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione in* E. *Diciamo che*

(a) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una* **successione minimizzante per** f **su** E *se* $f(p_n) \to \inf_E f$;

(b) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una* **successione massimizzante per** f **su** E *se* $f(p_n) \to \sup_E f$.

L'esistenza di successioni minimizzanti e massimizzanti segue direttamente dal significato geometrico di $\inf_E f$ e $\sup_E f$.

5. Abbiamo ora tutti gli elementi per dimostrare il seguente teorema.

Teorema 5.5 (di Weierstrass). *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^N$ **compatto** *e sia* $f : E \to \mathbb{R}$ **continua**. *Allora i problemi* $\min_E f$ *e* $\max_E f$ *ammettono almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Vediamo che il problema $\min_E f$ ammette soluzione (il caso del massimo è analogo). Sia $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante per f su E, cioè tale che

$$f(p_n) \to \inf_E f.$$

Essendo E compatto, la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $p_{n_k} \to p$ per qualche $p \in E$. Essendo f continua si ha $f(p_{n_k}) \to f(p)$, da cui

$$f(p) = \lim_{k\to+\infty} f(p_{n_k}) = \inf_E f.$$

Dunque p è un punto di minimo di f su E, e la dimostrazione è conclusa. ∎

6. Affinché sia ben posto uno solo dei due problemi di minimo o massimo, e non tutti e due contemporaneamente, le ipotesi del teorema di Weierstrass possono essere indebolite. Ad esempio, affinché il problema di minimo sia ben posto per $f : E \to \mathbb{R}$, basta richiedere ad esempio che esista $c \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme

$$E_c = \{p \in E \, : \, f(p) \le c\}$$

sia non vuoto e compatto. Ciò si può riformulare dicendo che f ammette un **sottolivello compatto**. Per vedere che il minimo esiste, basta ragionare nel seguente modo. Se $c = \min_E f$, non c'è nulla da dimostrare. Se c non è il minimo, cioè $\inf_E f < c$, basta notare che se $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione minimizzante, allora $p_n \in E_c$ per n grande. Poiché E_c è compatto, allora esiste una sottosuccessione di $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a $p \in E_c$: questo p, come nel teorema di Weierstrass, è un punto di minimo di f.

Nel caso di funzioni di due variabili $f(x, y)$, il significato geometrico dell'ipotesi che E_c sia compatto per qualche c è il seguente: il piano $z = c$ è tale che la parte della superficie $z = f(x, y)$ che sta sotto di esso, proiettata sul piano xy, fornisce un insieme chiuso e limitato: andando all'infinito, la superficie $z = f(x, y)$ sale sopra la quota c.

Esempio 5.6. Sia data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$. f ammette massimo e minimo su ogni insieme compatto di $\mathbb{R}^2$, per esempio su qualsiasi triangolo chiuso del piano.

Su tutto $\mathbb{R}^2$ non ammette sicuramente massimo perché ad esempio $f(n,n) = 2n^2 \to +\infty$. Però ammette minimo perché considerando

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 1\} \\ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

tale insieme è il cerchio unitario del piano centrato nell'origine che è chiuso e limitato, dunque compatto.

5.3 Un'applicazione: il teorema fondamentale dell'algebra

Come applicazione di quanto visto sui problemi di massimo e minimo, vediamo come si dimostra un risultato classico, noto fin dalla scuola superiore.

Teorema 5.7 (fondamentale dell'algebra). *Sia $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots a_{n-1} z + a_n$ un polinomio a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$. Allora $P(z)$ ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$, cioè esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$.*

Dimostrazione. Per dimostrare il risultato, non è restrittivo supporre $a_0 = 1$, così che

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots a_{n-1} z + a_n.$$

Consideriamo la funzione continua $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$ definita da

$$f(x,y) = |P(x+iy)|.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} |P(z)| \geq & |z|^n - |a_1||z|^{n-1} - \dots - |a_{n-1}||z| - |a_n| \\ = & |z|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{|z|} - \dots - \frac{|a_{n-1}|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_n|}{|z|^n}\right). \end{aligned}$$

Concludiamo che se $|z| \to +\infty$, allora $|P(z)| \to +\infty$. Dunque, per ogni $c \in \mathbb{R}$ esiste M tale che se $x^2 + y^2 \geq M^2$ allora $f(x,y) > c$. Ciò significa che il sottolivello $\{f(x,y) \leq c\}$ è chiuso e limitato, dunque compatto. Per la variante del teorema di Weierstrass abbiamo che f ammette almeno un punto di minimo in $\mathbb{R}^2$.
Sia (x_0, y_0) un minimo per f, e sia $z_0 = x_0 + iy_0$. A meno di sostituire $P(z)$ con il polinomio $P(z_0 + z)$, non è restrittivo supporre che $z_0 = 0$. Dunque P è tale che $|P(0)| \leq |P(z)|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Possiamo scrivere $P(z)$ nella forma

$$P(z) = a + bz^k + z^{k+1} Q(z)$$

dove $k \geq 1$, $b \neq 0$ e $Q(z)$ è un polinomio in z. La tesi è dimostrata se vediamo che $a = P(0) = 0$. Supponiamo per assurdo che $a \neq 0$. Allora possiamo scrivere

$$\frac{P(z)}{a} = 1 + cz^k + z^{k+1}R(z),$$

dove $c \neq 0$ e $R(z)$ è un polinomio in z. Siano $c = \rho e^{i\psi}$ e $z = re^{i\vartheta}$. Se scegliamo ϑ_0 in modo che $k\vartheta_0 + \psi = \pi$, e $z = re^{i\vartheta_0}$ si ha

$$cz^k = \rho e^{i\psi} r^k e^{ki\vartheta_0} = \rho r^k e^{i(k\vartheta_0+\psi)} = \rho r^k e^{i\pi} = -\rho r^k.$$

Ora si ha che esiste $\delta > 0$ tale che per $r < \delta$

$$\rho r^k < \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad r|R(re^{i\vartheta_0})| < \frac{\rho}{2}.$$

Se $z = re^{i\vartheta_0}$ e $0 < r < \delta$, otteniamo che

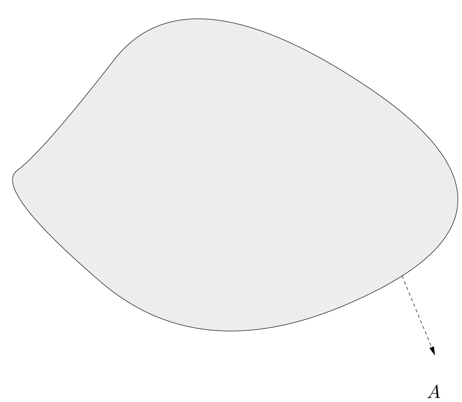
$$\begin{aligned} \frac{|P(z)|}{|a|} &\leq |1 + cz^k| + |z^{k+1}R(z)| = |1 - \rho r^k| + |z|^{k+1}|R(z)| \\ &= |1 - \rho r^k| + r^k r|R(re^{i\vartheta_0})| \leq 1 - \rho r^k + \frac{\rho}{2}r^k = 1 - \frac{\rho}{2}r^k < 1, \end{aligned}$$

cioè $|P(z)| < |a| = |P(0)|$ che è assurdo. ■

5.4 Massimi e minimi e calcolo differenziale

In questa sezione vediamo come il problema del calcolo del minimo e del massimo di una funzione di più variabili reali si colleghi al calcolo differenziale.

1. Consideriamo inizialmente il caso delle funzioni di due variabili $f(x, y)$ definite sulla chiusura di un aperto limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$, cioè $f : \bar{A} \to \mathbb{R}$, dove A è l'aperto in figura.

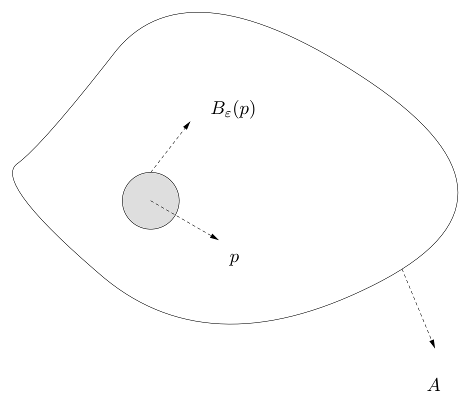


Supponiamo che f sia differenziabile su un insieme aperto che contiene $\bar{A}$, così da poter parlare di gradiente di f non solo in A ma anche sul suo bordo ∂A. Essendo $\bar{A}$ compatto ed f continua (perché la differenziabilità implica la continuità), per il teorema di Weierstrass f ammette minimo e massimo su $\bar{A}$. Si pongono due alternative:

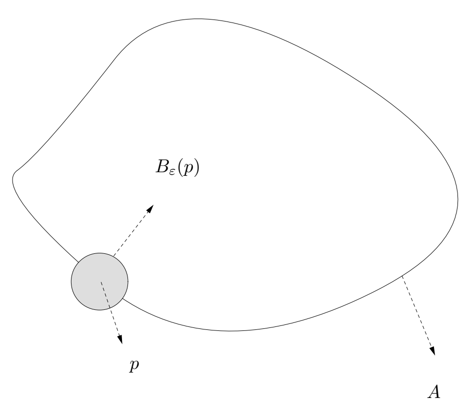
(a) i punti di estremo appartengono ad A;

(b) i punti di estremo cadono sul bordo ∂A.

2. Supponiamo che p sia un punto d'estremo che cade all'interno, cioè $p \in A$. Poiché possiamo confrontare il valore di f in p con quello che f assume in tutti i punti sufficientemente vicini a p, cioè in $B_\varepsilon(p)$ con ε piccolo (A è aperto), si dice che p è un **estremo libero di** f. È chiaro che p è a maggior ragione un estremo locale per f: essendo f differenziabile, dalla condizione necessaria al primo ordine per gli estremi relativi otteniamo che
$$\nabla f(p) = 0$$
cioè p **è critico per** f.

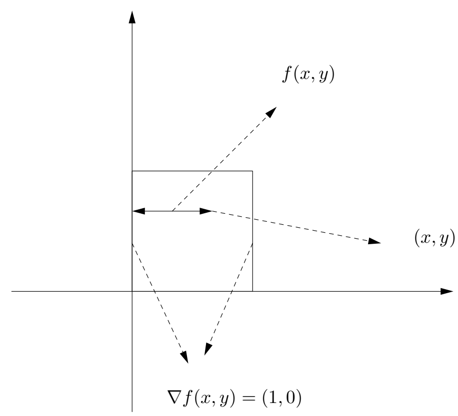


3. Supponiamo che p sia un punto d'estremo che cade sul bordo di A, cioè $p \in \partial A$. In questo caso p non può confrontarsi con tutti i punti sufficientemente vicini, cioè con i punti di $B_\varepsilon(p)$ con ε piccolo, perché la palla $B_\varepsilon(p)$ sta sempre parzialmente fuori di $\bar{A}$, essendo p sul bordo. Si dice che p è un **estremo vincolato di** f.

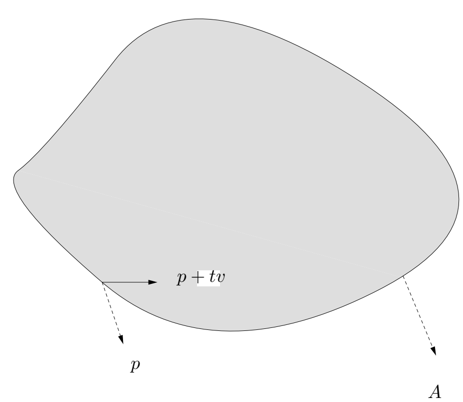


Di conseguenza non possiamo concludere che p è critico per f, anzi **in generale un punto di estremo vincolato non è affatto critico**. Basta considerare ad esempio il seguente caso.

Esempio 5.8. Consideriamo $f(x, y) = x$ definita sul quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$: f indica semplicemente la distanza del punto (x, y) dall'asse delle y. Dunque il massimo di f è assunto chiaramente sui punti del lato verticale destro, ed il minimo è assunto dai punti sull'asse delle y: in entrambi i casi il gradiente vale $\nabla f(x, y) = (1, 0)$ che non è affatto nullo.



Vediamo ora che **il gradiente di f nei punti di estremo vincolato è sottoposto a restrizioni geometriche**. Sia v un vettore che punta all'interno di $\bar{A}$ e supponiamo che p sia un minimo di f.



Consideriamo la funzione f lungo la semiretta per p nella direzione di v, cioè la funzione $g(t) = f(p + tv)$ con $t \geq 0$. Poiché per t piccolo e positivo si ha

$$g(0) = f(p) \leq f(p + tv) = g(t)$$

deduciamo che deve essere $g'(0) \geq 0$, cioè

$$\nabla f(p) \cdot v \geq 0.$$

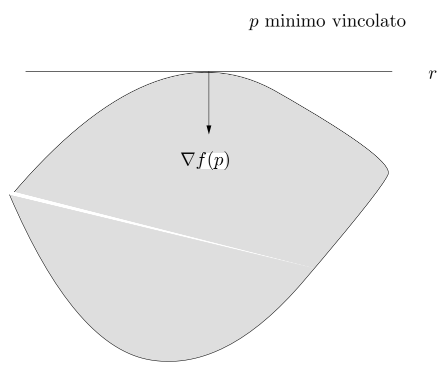
Dunque, se p **è punto di minimo vincolato,** $\nabla f(p)$ **deve formare un angolo acuto con ogni vettore** v **che punta all'interno di** $\bar{A}$.

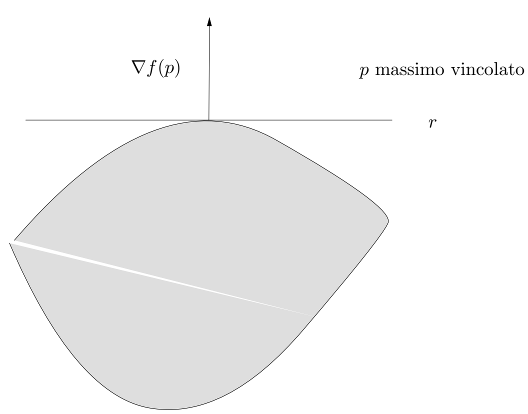
Similmente, se p è un punto di massimo vincolato, si deve avere

$$\nabla f(p) \cdot v \leq 0.$$

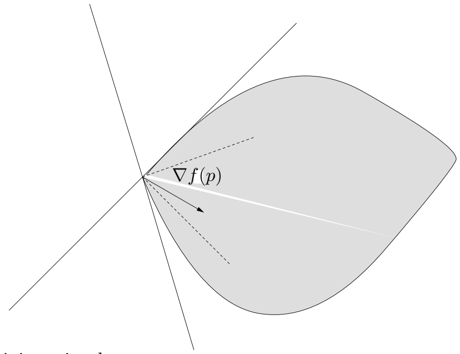
Dunque, se p **è punto di massimo vincolato,** $\nabla f(p)$ **deve formare un angolo ottuso con ogni vettore** v **che punta all'interno di** $\bar{A}$.

Nel caso in cui ∂A ammetta una retta tangente r in p, da quanto visto sopra abbiamo che $\nabla f(p)$ è ortogonale a r: se p è un minimo vincolato, $\nabla f(p)$ punta all'interno, se p è un massimo vincolato, $\nabla f(p)$ punta all'esterno.

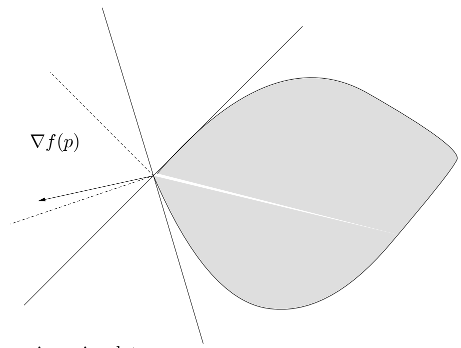




Nel caso in cui ∂A formi un angolo in p, allora $\nabla f(p)$ può appartenere a priori ad un cono.



p minimo vincolato



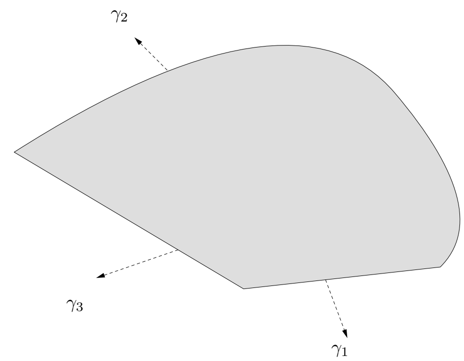
p massimo vincolato

4. Le considerazioni viste ai punti precedenti si generalizzano al caso di funzioni di tre o più variabili reali: i punti di estremo libero sono punti critici, mentre quelli di estremo vincolato in generale non lo sono. Se ∂A ammette piano tangente in p, allora $\nabla f(p)$ è diretto come la retta normale a tale piano: punta all'interno se p è un minimo, punta all'esterno se p è un massimo. Nel caso in cui ∂A non ammetta piano tangente in p, $\nabla f(p)$ può appartenere ad un cono di direzioni.

5. Poiché i punti di estremo cadono o all'interno o sul bordo, possiamo in linea di principio risolvere il problema della loro determinazione nel modo seguente. Vediamo il caso di due variabili.

   (a) Si trovano i punti critici nella parte interna, cioè si risolve il sistema dato da $\nabla f(x, y) = 0$. Si indicano con m_0 e M_0 i valori minimi e massimi (se esistono) di f sui punti critici.

   (b) Si studia la funzione sul bordo.



Se esso è parametrizzabile tramite più curve $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, si cercano (con i metodi delle funzioni di una variabile) i massimi e i minimi delle funzioni

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) \to m_1 \text{ e } M_1$$
$$\vdots$$
$$g_n(t) = f(\gamma_n(t)) \to m_n \text{ e } M_n.$$

(c) Il più grande fra

$$M_0, M_1, \ldots, M_n$$

è il massimo cercato e il più piccolo tra

$$m_0, m_1, \ldots, m_n$$

è il minimo cercato.

La strategia nel caso di più variabili reali è la medesima: all'interno si studiano i punti critici, e poi si passa allo studio del bordo, il che implica una riduzione di dimensione del problema (se siamo nello spazio tridimensionale, il bordo è bidimensionale e così via).

5.5 Il moltiplicatore di Lagrange

In questa sezione ci occupiamo dello studio dei problemi di estremo per una funzione f di più variabili definita su insiemi E di dimensione più bassa. Ad esempio funzioni di due variabili definite su curve, o di tre variabili definite su superfici. Ci interessa il caso in cui tali insiemi sono definiti in forma implicita, come luogo di zeri di una funzione g. Ad esempio nel piano E può essere dato dalla relazione

$$x^2 - y^3 \sin(xy) = 0$$

oppure nello spazio può essere dato da

$$e^x + z^3 - 2\sin(xy) = 0.$$

Nel primo caso $g(x,y) = x^2 - y^3 \sin(xy)$ e nel secondo $g(x,y,z) = e^x + z^3 - 2\sin(xy)$.

Formalmente, siamo interessati ai problemi

$$\min_{p \in E} f(p) \qquad \max_{p \in E} f(p)$$

dove $f, g : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^N$ e $E = \{p \in A : g(p) = 0\}$. Il problema dell'esistenza rientra nello schema generale del teorema di Weierstrass: esso è assicurato se E è compatto ed f è continua. Se f è differenziabile, dobbiamo aspettarci ovviamente delle relazioni sul gradiente nei punti di estremo p. Poiché E ha dimensione più bassa dell'insieme ambiente, p non può confrontarsi con tutti i punti di $B_\varepsilon(p)$ con ε piccolo, e pertanto è un punto di estremo vincolato: in tal caso il nome è molto appropriato perché il vincolo è proprio rappresentato dalla funzione g.

1. Se E può descriversi immediatamente in forma parametrica o cartesiana, cioè ad esempio se $E \subseteq \mathbb{R}^2$ è dato da

   $$x^2 + y^2 = 2 \Longrightarrow \gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$$

   oppure $E \subseteq \mathbb{R}^3$ è dato da

   $$\ln(z+1) - xy = 1 \Longrightarrow z = e^{xy+1} - 1,$$

   allora il problema è semplice. Per studiare una funzione $f(x,y)$ o $f(x,y,z)$ su tali insiemi, passiamo a studiare le funzioni

   $$h_1(t) = f_1(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$$

   e

   $$h_2(x,y) = f_2(x, y, e^{xy+1} - 1)$$

   ed il problema si è semplificato essendosi ridotto il numero delle variabili libere: esso rientra in quanto visto in precedenza.

2. Supponiamo che E non sia facilmente descrivibile in forma esplicita, cioè ad esempio sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ dato da

   $$\sin(z - y^2) + y \arctan z + \tan(x^3 + z) = 0.$$

   In questo caso non sembra facile ricavare z come funzione di x e y oppure x o y come funzione delle altre due variabili. Nemmeno una descrizione parametrica semplice sembra possibile. La caratterizzazione di un punto di estremo per f su E è data dal teorema del moltiplicatore di Lagrange.

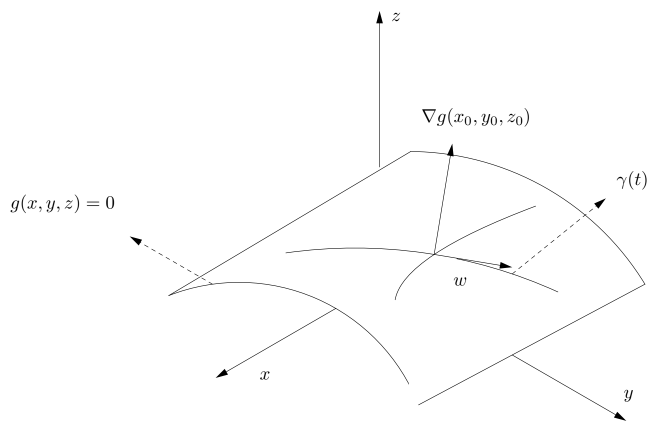
   Teorema 5.9 (Moltiplicatore di Lagrange). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, $g : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia $E = \{q \in A : g(q) = 0\}$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, e sia $p \in E$ un punto di estremo per f su E. Se $\nabla g(p) \neq 0$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che*

   $$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p).$$

Le dimostrazione matematica precisa del teorema precedente è abbastanza complessa ed è pertanto omessa. L'idea che ne sta alla base è però semplice, e rientra in osservazioni che abbiamo visto in precedenza. Mettiamoci, tanto per fissare le idee, nel caso di funzioni di tre variabili. Siano dunque $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ due funzioni differenziabili e sia

$$E = \{(x, y, z) \in A : g(x, y, z) = 0\}.$$

E è dunque una superficie definita in forma implicita. Sia $p = (x_0, y_0, z_0) \in E$ un punto di estremo di f su E.



Sappiamo che il piano tangente a E in (x_0, y_0, z_0) ammette come vettore normale $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$. Sia w un vettore appartenente a tale piano tangente, e sia $\gamma : [a, b] \to E$ una curva derivabile tale che $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ e $\gamma'(t_0) = w$ per un $t_0 \in]a, b[$. Poiché p è un estremo di f, si ha che $t = t_0$ è un estremo di

$$g(t) = f(\gamma(t)).$$

Pertanto da $g'(t_0) = 0$ ricaviamo che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot w = 0.$$

Poiché w è un generico vettore del piano tangente a E in (x_0, y_0, z_0), ricaviamo che $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ è normale ad E in (x_0, y_0, z_0). Ma la direzione normale è data da $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$. Dunque, dovendo $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ avere le stessa direzione, deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

che è proprio la relazione del teorema.

3. Motivare intuitivamente le ipotesi $g \in C^1$ e $\nabla g(p) \neq 0$ risulta difficile. Hanno a che fare con il fatto che E sia effettivamente una superficie vicino a p, e che dunque si possa parlare di (iper)piano tangente e direzione normale (si tratta del cosidetto *Teorema della funzione implicita*). Possiamo vedere però che si tratta di un'ipotesi necessaria. Basta notare che data $g(x, y, z) = x^2$, e detto $E = \{g(x, y, z) = 0\}$ la funzione
$$f(x, y, z) = x$$
vale 0 su E. Ogni punto di E è dunque un punto di massimo e un punto di minimo. D'altro canto si ha per ogni $(x, y, z) \in E$
$$\nabla f(x, y, z) = (1, 0, 0) \qquad \text{e} \qquad \nabla g(x, y, z) = (0, 0, 0).$$
Dunque non può esistere nessun $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il teorema è soddisfatto.

4. Consideriamo la funzione $L : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$L(p, \lambda) = f(p) - \lambda g(p).$$
Un punto critico per la funzione L soddisfa alle relazioni
$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(p, \lambda) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(p, \lambda) = 0$$
per $i = 1, \ldots, N$. Ma si ha
$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(p, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)$$
e
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(p, \lambda) = -g(p).$$
Dunque un punto critico per L è tale che
$$\nabla f(p) - \lambda \nabla g(p) = 0 \qquad \text{e} \qquad g(p) = 0$$
e queste sono proprio le conclusioni del teorema del moltiplicatore di Lagrange. Dunque possiamo dire che **un estremo p di f sul vincolo dato da $E = \{p \in A : g(p) = 0\}$ è tale che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui (p, λ) è un punto critico di L**. La funzione L viene chiamata la **Lagrangiana del problema**.

Esempio 5.10. Trovare il massimo e il minimo di $f(x, y) = x$ sull'insieme E dato da
$$x^4 + y^4 = 1.$$
E è compatto ed f è continua: dunque per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su E.

Siamo nelle condizioni di applicare il teorema del moltiplicatore di Lagrange. Infatti f è di classe C^1 e ponendo

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - 1,$$

si ha che g di classe C^1 e $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, g(x, y) = 0\}$. Poiché

$$\nabla g(x, y) = (4x^3, 4y^3),$$

per ogni $(x, y) \in E$ si ha $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$. Per il teorema del moltiplicatore di Lagrange, i massimi e minimi di f su E si ottengono studiando i punti critici della Lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = x - \lambda(x^4 + y^4 - 1).$$

Essi soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 1 - 4\lambda x^3 = 0 \\ 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda relazione ricaviamo che $\lambda = 0$ oppure $y = 0$. Ma $\lambda = 0$ non può essere perché altrimenti la prima relazione non potrebbe mai essere soddisfatta: dunque si ha $y = 0$ e si ottiene

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4\lambda x^3 = 1 \\ x^4 = 1. \end{cases}$$

Si ottengono le soluzioni

$$(1, 0) \qquad \text{con } \lambda = \frac{1}{4}$$

e

$$(-1, 0) \qquad \text{con } \lambda = -\frac{1}{4}.$$

Poiché si ha

$$f(1, 0) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(-1, 0) = -1$$

deduciamo che il massimo di f su E è 1 ed è assunto nel punto $(1, 0)$, mentre il minimo di f su E è -1 ed è assunto nel punto $(-1, 0)$.

5.6 Un'applicazione: perché i boiler e i caloriferi sono fatti così ?

Supponiamo di voler costruire un boiler cilindrico per scaldare l'acqua nel nostro bagno. Come dobbiamo costruirlo? Certamente dobbiamo cercare di minimizzare la sua superficie, perché minore è la superficie, minore è il calore che si disperde. Il problema si può formulare astrattamente nel seguente modo: tra tutti i cilindri circolari con base di raggio r e altezza

h e di volume assegnato V, determinare quelli con la superficie minima. Si tratta di un problema di estremo vincolato poiché occorre minimizzare la funzione

$$S(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

sotto il vincolo $V = \pi r^2 h$. Si ricava subito $h = \frac{V}{\pi r^2}$, e dunque basta minimizzare la funzione g della sola variabile r

$$g(r) = S\left(r, \frac{V}{2\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Il raggio r può variare su $]0,+\infty[$. Poiché

$$\lim_{r\to 0^+} g(r) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{r\to +\infty} g(r) = +\infty$$

si ha che i sottolivelli di g sono compatti. Dunque g ammette minimo per la variante del teorema di Weierstrass. Annullando la derivata prima si ha

$$g'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Longrightarrow \bar{r} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Notiamo che

$$\bar{h} = \frac{V}{\pi \bar{r}^2} = 2\bar{r},$$

cioè il cilindro che realizza il minimo ha un'altezza pari al diametro di base (si parla di cilindro equilatero). Dunque il boiler conviene costruirlo in modo che sia equilatero!
Il problema di massimizzare la superficie del cilindro è legata invece al problema di costruire un calorifero efficiente: infatti in questo caso abbiamo bisogno di irraggiare la maggior quantità possibile di calore. La funzione g non ammette massimo su $]0,+\infty[$ perché agli estremi del dominio tende a $+\infty$. Dunque per costruire un calorifero efficiente dobbiamo costruirlo o con un raggio piccolissimo ($r \to 0^+$), o con un raggio grandissimo ($r \to +\infty$). Nel primo caso abbiamo che l'altezza relativa $h = \frac{V}{\pi r^2}$ tende a $+\infty$: dunque conviene che il cilindro sia stretto ed allungato. Nel secondo caso, l'altezza relativa tende a zero: dunque conviene avere una base enorme con un'altezza piccolissima, tipo una lastra con una superficie grandissima ed un'altezza molto piccola. A ben vedere per costruire i caloriferi si seguono proprio queste indicazioni...

Esercizi

1. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione. Dimostrare che esistono almeno una successione minimizzante ed una massimizzante per f su E.
2. Trovare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che
   (a) ammette minimo ma non massimo;
   (b) ammette massimo ma non minimo;

(c) ammette infiniti punti di minimo ma non ammette massimo;

(d) ammette infiniti punti di massimo ma non ammette minimo.

3. Sia A una matrice simmetrica 2×2 data da

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

e sia

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

(a) Dimostrare che f ammette minimo e massimo sulla circonferenza unitaria $S : x^2+y^2 = 1$.

(b) Sia m il minimo e $(x_0, y_0) \in S$ un punto di minimo associato: tramite il teorema del moltiplicatore di Lagrange, dimostrare che m è un autovalore di A e che $v = (x_0, y_0)$ è un autovettore associato.

(c) Dimostrare il risultato analogo per M.

4. Generalizzare il risultato dell'esercizio 3 a matrici simmetriche A con 3 righe e 3 colonne.