

1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. La serie numerica $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\cosh(\alpha n)}$

Risp.: **A** : converge semplicemente per $|\alpha| > \log 2$ **B** : converge assolutamente per $|\alpha| > \log 2$ **C** : converge assolutamente per $\alpha \geq \log 2$ e semplicemente per $\alpha \leq -\log 2$ **D** : converge semplicemente per $\alpha \leq -\log 2$ **E** : semplicemente per $|\alpha| \geq \log 2$ **F** : converge assolutamente per $\alpha > \log 2$ e semplicemente per $\alpha < -\log 2$

2. La somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} (-1)^{n+2} x^{2n} \arctan x \, dx$ vale

Risp.: **A** : $\frac{1}{2}(\arctan \pi/4)^2$ **B** : $\arctan(1/4)$ **C** : $\log(1/2)$ **D** : $\sin(1/2)$ **E** : $(1/2) \log(1/2)$ **F** : $1/4$

3. La serie di funzioni $\sum_{n=7}^{+\infty} n^7 \sin(x 2^{-n})$

Risp.: **A** : converge uniformemente ma non totalmente in $[-\pi/4, \pi/2]$ **B** : converge solo puntualmente in $[-\pi/2, \pi/4]$ **C** : converge totalmente solo in $[-\pi/4, \pi/2]$ **D** : converge solo puntualmente in $[-\pi/4, \pi/2]$ **E** : converge uniformemente ma non totalmente in $[-\pi/2, \pi/4]$ **F** : converge totalmente in $[-\pi/2, \pi/2]$

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \frac{nx - x^n}{2n}$, $x \in [0, 1]$. Siano $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ i limiti puntuali di f_n e f'_n , rispettivamente. Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}$ converge a f solo puntualmente in $[0, 1]$ (b) $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in $[0, 1]$ (c) $\{f'_n\}$ converge a g solo puntualmente in $[0, 1]$ (d) $\{f'_n\}$ converge a g uniformemente in $[0, 1]$ (e) $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [0, 1]$ (f) $\int_0^1 f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx$

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : b c **B** : b e f **C** : a d e **D** : a c f **E** : b c f **F** : a d e f

5. Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ estesa per periodicit  in \mathbf{R} . Delle seguenti affermazioni

(a) la sua serie di Fourier converge uniformemente in \mathbf{R} (b) la sua serie di Fourier converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ (c) la serie delle derivate converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ (d) $a_2 = \frac{2}{\pi}$ (e) la sua serie di Fourier   derivabile termine a termine su $[-\pi, \pi]$ e la serie delle derivate converge a f' su $[-\pi, \pi]$ (f) la sua serie di Fourier converge a $\frac{1}{2}$ in $x = \frac{\pi}{4}$

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : a b c **B** : a b d **C** : a e f **D** : b c d **E** : c e **F** : a b c f

6. Sapendo che $\mathcal{F}[e^{-|x|}](\xi) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 \xi^2}$ (dove $\mathcal{F}[u(x)](\xi)$ indica la trasformata di Fourier

$\mathcal{F}[u(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-2\pi i \xi x} \, dx$ della funzione $u(x)$, $x \in \mathbf{R}$), calcolare l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$.

Risp.: **A** : π **B** : π^2 **C** : $\pi/2$ **D** : $\pi/4$ **E** : 2π **F** : $\pi^2/2$

7. L'antitrasformata di Laplace di $\mathcal{L}[u(x)](p) = \frac{2}{(p^2 + 1)(p - 1)^2}$  

Risp.: **A** : $u(x) = (\sin x + \cos(2x) + e^x)H(x)$ **B** : $u(x) = (\sin x + \cos x - x e^x)H(x)$ **C** : $u(x) = (\sin^2 x - e^x + x)H(x)$ **D** : $u(x) = (e^{2x} + \sin x - x e^{-x})H(x)$ **E** : $u(x) = (\cos x - e^x + x e^x)H(x)$ **F** : $u(x) = (\sinh x + x \cosh x)H(x)$

8. Sia dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = (1 + y(t)) \log(1 + y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ esiste un'unica soluzione (b) per $t_0 = 0$, $0 < y_0 < 1$, si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ (c) per $t_0 = 0$, $-1 < y_0 < 0$, si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -1$ (d) per $y_0 > 0$, $y(t)$ ha un punto di minimo in $t = 0$ (e) per $-1 < y_0 < 0$, $y(t)$ ha un unico punto di flesso (f) per $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, si ha $y(1) = 2^e - 1$

le uniche corrette sono

Risp.: **A**: a c e **B**: e f **C**: d e f **D**: c e f **E**: b c e **F**: a c d

.....
Cognome e nome

Firma

ANALISI MATEMATICA C

19 dicembre 2003

Compito 1

-
- Istruzioni.
1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, riportare cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
 2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande riportate nel foglio allegato; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
 3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = -1; risposta non data = 0.
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
 5. CONSEGNARE solo questo foglio.
 6. TEMPO a disposizione: 90 min.
-
-

Risposte relative al foglio allegato.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F