Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^3}{3}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni: (a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{7\alpha}(e^n+\ln n)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n^\beta x)}{\alpha^n+n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: per nessun α, β $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{D}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{E}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\beta > 1$

4. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

5. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^4+2n} - \sqrt{n^4+\arctan(n^2)}\right)^n \frac{n^n}{2^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{B}}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{\text{C}}$: converge assolutamente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{D}}$: non converge uniformemente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente in $[0,3]$ $\boxed{\text{F}}$: ha raggio di convergenza e

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha < -1$
