Cognome e nome .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n\ln\left(1+\frac{\alpha}{3n}\right)}$ converge se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \geq \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \leq \frac{5}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha > \frac{5}{2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\alpha \geq \frac{5}{2}$

2. Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n^2 \arctan(nx+1)}{(nx+1)^2+1}$. Delle seguenti affermazioni:

   (a) $\{f_n\}$ converge puntualmente in $]-\pi/2, \pi/2[$ (b) $\{f_n\}$ converge puntualmente in $]0, \pi/2[$ (c) $\{f_n\}$ non converge uniformemente in $[0, \pi/2]$ (d) la successione numerica $\{\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx\}$ è limitata (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione continua in $]0, \pi/2[$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (d)

3. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+4}\right)^{n^3} x^{2n}$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: e^2 $\boxed{\text{B}}$: e^4 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{e}$ $\boxed{\text{D}}$: e $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{e^2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{e^4}$

4. Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\arctan(7nx)}{n}\right)^{2n+1}$ e detta $f(x)$ la sua somma, allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: la serie converge puntualmente ma non uniformemente ad f su $\mathbb{R}$, e $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ $\boxed{\text{B}}$: la serie converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$, e $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ $\boxed{\text{C}}$: la serie converge puntualmente ma non uniformemente ad f su $\mathbb{R}$ e $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx > 0$ $\boxed{\text{D}}$: la serie converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$, e $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx < 0$ $\boxed{\text{E}}$: la serie converge puntualmente ma non uniformemente ad f su $\mathbb{R}$ e $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx < 0$ $\boxed{\text{F}}$: la serie converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$, e $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx > 0$

---

5. Data la funzione 2π-periodica tale che $f(x) = xe^{7x^3}$ per $x \in [-\pi, \pi[$, e detti a_n e b_n i coefficienti della sua serie di Fourier S, delle seguenti affermazioni

(a) $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (b) $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$ (c) S converge puntualmente ma non uniformemente su ogni intervallo $[a, b]$ con $-\pi < a < b < \pi$ (d) S converge uniformemente su ogni intervallo $[a, b]$ con $-\pi < a < b < \pi$ (e) S converge uniformemente su ogni intervallo $[a, b]$ con $-\pi \leq a < b < \pi$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c) $\boxed{\text{B}}$: (e), (d) $\boxed{\text{C}}$: (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

---

6. La trasformata di Fourier della funzione $u(x) = x^2\chi_{[-2,2]}(x)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\hat{u}(\xi) = \frac{2}{\xi}\sin[2\xi]\left(4 - \frac{2}{\xi^2}\right) - 8\frac{\cos[2\xi]}{\xi^2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\hat{u}(\xi) = \frac{2}{\xi}\sin[2\xi]\left(4 - \frac{2}{\xi^2}\right)$ $\boxed{\text{C}}$: $\hat{u}(\xi) = \frac{2}{\xi}\sin[2\xi]\left(4 - \frac{2}{\xi^2}\right) + 8\frac{\cos[2\xi]}{\xi^2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\hat{u}(\xi) = 8\frac{\cos[2\xi]}{\xi^2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\hat{u}(\xi) = -\frac{2}{\xi}\sin[2\xi]\left(4 - \frac{2}{\xi^2}\right) - 8\frac{\cos[2\xi]}{\xi^2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\hat{u}(\xi) = -\frac{2}{\xi}\sin[2\xi]\left(4 - \frac{2}{\xi^2}\right) + 8\frac{\cos[2\xi]}{\xi^2}$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x \arctan x \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{[\ln(1+x)]^{2\alpha}}\,dx$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha > \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \geq \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > 0$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \leq \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$

---

8. La trasformata di Laplace della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -5 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$$

è data da

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s-1}$ $\boxed{\text{B}}$: $\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s-1}$ $\boxed{\text{C}}$: $\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$ $\boxed{\text{D}}$: $\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-1}$ $\boxed{\text{E}}$: $\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$ $\boxed{\text{F}}$: $\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s-1}$
