Cognome e nome . . . . Firma . . . . Matricola . . . .

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Discutere al variare di $\alpha \geq 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 1}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \leq \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge se $\alpha \geq 1$, diverge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: diverge se $\alpha \geq 1$, converge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{F}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \leq \alpha \leq 1$

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) [\sin^2(nx^2) + 7]$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$

3. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 2 - \frac{1}{n^2} \\ 2n^4 \left(x - \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)\right)^2 & \text{per } 2 - \frac{1}{n^2} < x \leq 2 \\ 2 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0,2]$ (c) $\{\int_0^2 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0,2[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0,10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (f)

---

4. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (d)

---

5. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\exists \alpha$ tale che $\forall \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\exists \beta$ tale che $\forall \alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\forall \alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists \alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$

---

6. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{2\alpha}}\,dt$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{4} < \alpha \le \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{4} \le \alpha \le \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{4} \le \alpha < \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \ge \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 2$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 1$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-1 < \alpha < 1$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \le -1$ y è decrescente (e) per $\alpha \le -1$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -1$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (c), (f)

---

8. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 2+3\cos t-\sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 2+\cos t-3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 2-\cos t-3\sin t+2e^t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 2-\cos t+3\sin t-e^{-2t}$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 2-3\cos t-\sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 2-3\cos t+\sin t$
