

1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. La serie numerica $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\log(1 + n^{2\alpha}) - \log n^{2\alpha})$

Risp.: **A** : converge assolutamente per $\alpha \geq 1$ e semplicemente per $0 < \alpha < 1$ **B** : converge assolutamente per $\alpha \geq 1/2$ e semplicemente per $-1/2 < \alpha < 1/2$ **C** : converge assolutamente per $\alpha \geq 0$ e semplicemente per $\alpha < 0$ **D** : converge assolutamente per $\alpha > 1/4$ e semplicemente per $1/8 < \alpha \leq 1/4$ **E** : converge assolutamente per $\alpha > 1/4$ e semplicemente per $0 < \alpha \leq 1/4$ **F** : converge assolutamente per $\alpha > 1/2$ e semplicemente per $0 < \alpha \leq 1/2$

2. La somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{2nx}}$, $x > 0$ vale

Risp.: **A** : $\frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ **B** : $\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^3}$ **C** : $\frac{e^x}{(e^{2x}+1)^2}$ **D** : $\frac{2x+1}{e^{2x}-1}$ **E** : $\frac{2e^{2x}}{(2x-1)^2}$ **F** : $\frac{2x}{(e^{2x}+1)^3}$

3. Per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n!}{n^n} x^{2n} + \frac{1}{n \log^2 n} (x-2)^{2n} \right)$ è convergente?

Risp.: **A** : $x \in]1, \sqrt{e}[$ **B** : $x \in [1, \sqrt{e}[$ **C** : $x \in]-\sqrt{e}, \sqrt{e}[$ **D** : $x \in [1, 3]$ **E** : $x \in [\sqrt{e}, 3]$ **F** : $x \in]-\sqrt{e}, 1]$

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \frac{1}{n} \log(n^2 x^2 + 1)$, $x \in [-1, 1]$. Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}$ converge a 0 puntualmente in $[-1, 1]$ (b) $\{f_n\}$ converge a 0 uniformemente in $[-1, 1]$ (c) esiste $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\{f'_n\}$ converge a g puntualmente in $[-1, 1]$ (d) esiste $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\{f'_n\}$ converge a g uniformemente in $[-1, 1]$ (e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = 1$ le uniche corrette sono

Risp.: **A** : a c d e **B** : a b c d **C** : a c **D** : b d e **E** : a b c **F** : a e

5. Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \cos x & \text{se } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ estesa per periodicit  in \mathbf{R} . Delle seguenti affermazioni

(a) la sua serie di Fourier converge a f uniformemente in \mathbf{R} (b) la sua serie di Fourier converge a f in media quadratica in $[-\pi, \pi]$ (c) la serie delle derivate converge a f' uniformemente in $[-\pi, \pi]$ (d) la serie delle derivate converge a f' in media quadratica in $] -\pi, \pi[$ (e) la sua serie di Fourier   derivabile termine a termine in $] -\pi, \pi[$ ma non in $[-\pi, \pi]$ (f) $b_n = 0 \forall n \in \mathbf{N}$

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : a b c d **B** : a b d **C** : b c d **D** : d e f **E** : a b e f **F** : a c e

6. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x} (e^x - 1)^\alpha} dx$ converge se e solo se

Risp.: **A** : $0 < \alpha \leq 5/2$ **B** : $1 \leq \alpha < 2$ **C** : $0 \leq \alpha < 5/2$ **D** : $\alpha < 5/2$ **E** : $\alpha > 0$ **F** : $1 < \alpha \leq 2$

7. La trasformata di Laplace della soluzione del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y = \frac{3}{2}x^2 \sinh x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$  

Risp.: **A** : $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3p}{(p-1)^3}$ **B** : $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3(p^2+1)}{(p^2-1)(p+1)^2}$ **C** : $\mathcal{L}[y](p) = \frac{p^2+3}{(p^2-1)^3}$ **D** : $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3p}{(p+1)^2(p-1)^3}$
E : $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3(3p^2+1)}{(p^2-1)^4}$ **F** : $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3(3p^2+2)}{(p^2-1)^4(p+1)^2}$

8. Sia $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $u(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$ Sapendo che $\mathcal{F}[u](\xi) = \frac{4\pi\xi}{1-4\pi^2\xi^2} \sin(2\pi^2\xi)$ (dove $\mathcal{F}[u(x)](\xi)$ indica la trasformata di Fourier

$\mathcal{F}[u(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$ della funzione $u(x)$, $x \in \mathbf{R}$), calcolare l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \sin(\pi t)}{1-t^2} dt$.

Risp.: **A** : $\pi/2$ **B** : π^2 **C** : $\pi/4$ **D** : 2π **E** : π **F** : $2\pi^2$

.....
Cognome e nome

.....
Firma

ANALISI MATEMATICA C

20 settembre 2004

Compito 1

- Istruzioni.
1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, riportare cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
 2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande riportate nel foglio allegato; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
 3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = -1; risposta non data = 0.
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
 5. CONSEGNARE solo questo foglio.
 6. TEMPO a disposizione: 90 min.
-
-

Risposte relative al foglio allegato.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F