

Cognome e nome Firma

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = -1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia f una funzione continua tale che $f(x) = 1/2$ per $x \leq 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} [f(x-n)]^{\alpha n}$

Risp.: **A**: la serie converge totalmente su \mathbb{R} se e solo se $\alpha > 1$ **B**: la serie converge puntualmente su \mathbb{R} ma non totalmente se e solo se $\alpha \geq 0$ **C**: la serie converge puntualmente su \mathbb{R} ma non totalmente se e solo se $\alpha \geq 1$ **D**: la serie converge puntualmente su \mathbb{R} ma non totalmente se e solo se $\alpha > 0$ **E**: la serie converge puntualmente su \mathbb{R} ma non totalmente se e solo se $\alpha > 1$ **F**: la serie converge totalmente su \mathbb{R} se e solo se $\alpha > 0$

2. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. La serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+\alpha^n}{n^2+\beta^n}$ converge se e solo se

Risp.: **A**: $1 < \alpha < \beta$ oppure $\alpha \leq 1$ e $\beta > 1$ **B**: $1 < \beta < \alpha$ oppure $\alpha \leq 2$ e $\beta > 2$
C: $1 < \alpha < \beta$ oppure $\alpha > 1$ e $\beta \leq 1$ **D**: $1 < \beta < \alpha$ oppure $\alpha \leq 1$ e $\beta > 1$ **E**: $1 < \beta < \alpha$ oppure $\alpha > 1$ e $\beta \leq 1$ **F**: $1 < \alpha < \beta$ oppure $\alpha \leq 2$ e $\beta > 2$

3. La funzione $u(x)$ tale che $\frac{d}{ds} \mathcal{L}[u(x)](s) = -\frac{s+1}{s^2+2s+5}$ è

Risp.: **A**: $u(x) = \frac{e^{-x} \sin 2xH(x)}{x}$ **B**: $u(x) = \frac{e^{-x} \cos 2xH(x)}{x}$ **C**: $u(x) = e^{-x} \cos 2xH(x)$
D: $u(x) = \frac{e^x \sin 2xH(x)}{x}$ **E**: $u(x) = e^{-x} \sin 2xH(x)$ **F**: $u(x) = \frac{e^x \cos 2xH(x)}{x}$

4. La trasformata di Fourier della funzione $u(x) = |x|\chi_{[-7,7]}(x)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\hat{u}(\xi) = 14 \frac{\sin(7\xi)}{\xi}$ $\boxed{\text{B}}$: $\hat{u}(\xi) = 2 \frac{\cos(7\xi)-1}{\xi^2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\hat{u}(\xi) = 14 \frac{\sin(7\xi)}{\xi^2} + 2 \frac{\cos(7\xi)-1}{\xi}$ $\boxed{\text{D}}$: $\hat{u}(\xi) = 14 \frac{\sin(7\xi)}{\xi} - 2 \frac{\cos(7\xi)-1}{\xi^2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\hat{u}(\xi) = 14 \frac{\sin(7\xi)}{\xi} + 2 \frac{\cos(7\xi)-1}{\xi^2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\hat{u}(\xi) = 14 \frac{\sin(7\xi)}{\xi^2} - 2 \frac{\cos(7\xi)-1}{\xi}$

5. Dato il problema di Cauchy $y' = e^{-(y^2+1)}(y-1) \frac{t^2}{1+t^2}$ con $y(0) = \alpha$, delle seguenti affermazioni (a) $y(t)$ è strettamente monotona per $\alpha \neq 1$ (b) $y(t)$ è positiva per ogni $\alpha > 1$ (c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \in \mathbb{R}$ per $\alpha > 1$ (d) $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) \in \mathbb{R}$ per $\alpha \geq 1$ (e) $y(t)$ ha un punto di minimo relativo per ogni $\alpha < 1$ (f) $y(t)$ non ha alcun punto di estremo relativo per $\alpha > 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (d), (f)

6. Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x) \ln \left(1 + \frac{x^2}{4n^2+1}\right)$. Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n\}$ converge puntualmente su \mathbb{R} (b) $\{f_n\}$ converge uniformemente su \mathbb{R} (c) $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0, 2]$ (d) la successione $\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx \}$ converge (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ non è derivabile in \mathbb{R}

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (d), (e)

7. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{2ny}}{(2n+1)!}$ con $y \in \mathbb{R}$. La somma della serie vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $3^{-y} \sin(3^y) - 1$ $\boxed{\text{B}}$: $3^y \sin(3^y) - 1$ $\boxed{\text{C}}$: $3^y \sinh(3^y) - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $3^{-y} \sinh(3^y)$ $\boxed{\text{E}}$: $\sinh(3^y) - 1$ $\boxed{\text{F}}$: $3^{-y} \sinh(3^y) - 1$

8. Si consideri la funzione 2π -periodica $f_k(x) = \sin^k \left(\arctan \frac{x}{2\pi}\right)$ con $x \in [-\pi, \pi[$ e $k \in \mathbb{N}$. Siano a_n^k e b_n^k i coefficienti della serie di Fourier della funzione f_k . Delle seguenti affermazioni

(a) $\forall k, n \in \mathbb{N} : a_n^k = 0$ (b) $\forall k, n \in \mathbb{N} : b_n^k = 0$ (c) esiste k tale che $a_n^k = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (d) esiste k tale che $b_n^k = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (e) $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_n^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_n^k = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (c), (d), (e)
