

Cognome e nome Firma Matricola

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = -1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{7n^3}\right)\right)^\alpha$. Allora

Risp.: **A**: la serie converge semplicemente se e solo se $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha < 0$ **B**: la serie converge semplicemente se e solo se $\alpha < \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{6}$ **C**: la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 0$, non converge se e solo se $\alpha < 0$ **D**: la serie converge semplicemente se e solo se $0 < \alpha \leq \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha \leq 0$ **E**: la serie converge semplicemente se e solo se $\alpha > 0$, converge assolutamente se e solo se $\alpha < 0$ **F**: la serie converge semplicemente se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha \leq 0$

2. La somma della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+2)}}{2(2n+1)(n+1)}$ con $x \in [0, 1[$ vale

Risp.: **A**: $x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} - \frac{x^2}{2}$ **B**: $x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ **C**: $\frac{1}{1+x^2}$ **D**: $x \arctan x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{x^2}{2}$ **E**: $\arctan x$ **F**: $x \arctan x + \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2}$

3. Per ogni $k \geq 1$ sia $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica definita da

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 e^{2x} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ (-1)^k \left[k^2 + k^2 \left(\frac{e^{-2\pi} - 1}{\pi} \right) x \right] & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

e sia \mathcal{F}_k la relativa serie di Fourier. Allora

Risp.: **A** : $\mathcal{F}_k(\pi) \rightarrow +\infty$ **B** : $\mathcal{F}_k(\pi) = 0$ per k dispari **C** : $\mathcal{F}_k(\pi) = 0$ per k pari
D : $\mathcal{F}_k(0) \rightarrow +\infty$ **E** : la successione $\{\mathcal{F}_k(0)\}$ è limitata **F** : $\mathcal{F}_k(\pi) \rightarrow 0$

4. Calcolare la trasformata di Fourier di $u(x) = (\cos^2 x)\chi_{[-2,2]}(x)$

Risp.: **A** : $\frac{\cos(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\cos(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$ **B** : $\frac{\cos(2\xi)}{\xi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$
C : $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$ **D** : $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} - \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$ **E** : $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$
F : $-\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$

5. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\cosh x-1} dx$ converge se e solo se

Risp.: **A** : $\alpha < \frac{1}{2}$ **B** : $\alpha \leq \frac{1}{2}$ **C** : $\alpha > \frac{1}{2}$ **D** : $\alpha \geq \frac{1}{2}$ **E** : per ogni α **F** : per nessun α

6. Sia dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y}{y+t} + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e sia $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ la sua soluzione massimale.

Delle seguenti affermazioni

(a) esiste $\varepsilon > 0$ tale che $] -\varepsilon, +\infty[\subseteq I$ (b) y è crescente per $t > 0$ (c) y è decrescente per $t > 0$
(d) I è limitato (e) y è limitata (f) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : (a), (b), (f) **B** : (a), (b) **C** : (a), (b), (e) **D** : (d), (e) **E** : (a), (f) **F** : (a), (c)

7. Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = \alpha^n(x-n)e^{-(x-n)^2}$ con $n \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la successione di funzioni $\{f_n\}$

Risp.: **A** : converge puntualmente su \mathbb{R} se e solo se $|\alpha| < 1$ **B** : converge uniformemente su \mathbb{R} se e solo se $|\alpha| \leq 1$ **C** : converge puntualmente su \mathbb{R} se e solo se $|\alpha| \leq 1$ **D** : non converge uniformemente per nessun α **E** : non converge puntualmente per nessun α **F** : converge uniformemente su \mathbb{R} se e solo se $|\alpha| < 1$

8. Per ogni $n \geq 1$ sia $f_n(x) = \sqrt[3]{n}x\chi_{[n,n+1]}(x)$, e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge totalmente in \mathbb{R} (b) la serie converge puntualmente in \mathbb{R} (c) la somma della serie non è integrabile in $[0, 2]$ (d) la somma della serie è derivabile in $] -\infty, 1[$ (e) la somma della serie è una funzione discontinua in \mathbb{R}

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : (d), (e) **B** : (b), (d) **C** : (b), (e) **D** : (a) **E** : (a), (e) **F** : (b), (d), (e)

1. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (1 - \cos(\frac{1}{7n^3}))^\alpha$. Allora

Risp.: **A**: la serie converge semplicemente se e solo se $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha < 0$ **B**: la serie converge semplicemente se e solo se $\alpha < \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{6}$ **C**: la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 0$, non converge se e solo se $\alpha < 0$ **D**: la serie converge semplicemente se e solo se $0 < \alpha \leq \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha \leq 0$ **E**: la serie converge semplicemente se e solo se $\alpha > 0$, converge assolutamente se e solo se $\alpha < 0$ **F**: la serie converge semplicemente se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha \leq 0$

2. La somma della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+2)}}{2(2n+1)(n+1)}$ con $x \in [0, 1[$ vale

Risp.: **A**: $x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} - \frac{x^2}{2}$ **B**: $x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ **C**: $\frac{1}{1+x^2}$ **D**: $x \arctan x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{x^2}{2}$ **E**: $\arctan x$ **F**: $x \arctan x + \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2}$

3. Per ogni $k \geq 1$ sia $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica definita da

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 e^{2x} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ (-1)^k \left[k^2 + k^2 \left(\frac{e^{-2\pi} - 1}{\pi} \right) x \right] & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

e sia \mathcal{F}_k la relativa serie di Fourier. Allora

Risp.: **A**: $\mathcal{F}_k(\pi) \rightarrow +\infty$ **B**: $\mathcal{F}_k(\pi) = 0$ per k dispari **C**: $\mathcal{F}_k(\pi) = 0$ per k pari **D**: $\mathcal{F}_k(0) \rightarrow +\infty$ **E**: la successione $\{\mathcal{F}_k(0)\}$ è limitata **F**: $\mathcal{F}_k(\pi) \rightarrow 0$

4. Calcolare la trasformata di Fourier di $u(x) = (\cos^2 x)\chi_{[-2,2]}(x)$

Risp.: **A**: $\frac{\cos(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\cos(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$ **B**: $\frac{\cos(2\xi)}{\xi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$ **C**: $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$ **D**: $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} - \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$ **E**: $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$ **F**: $-\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi} \right]$

5. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\cosh x - 1} dx$ converge se e solo se

Risp.: **A**: $\alpha < \frac{1}{2}$ **B**: $\alpha \leq \frac{1}{2}$ **C**: $\alpha > \frac{1}{2}$ **D**: $\alpha \geq \frac{1}{2}$ **E**: per ogni α **F**: per nessun α

6. Sia dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y}{y+t} + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e sia $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ la sua soluzione massimale.

Delle seguenti affermazioni

- (a) esiste $\varepsilon > 0$ tale che $] -\varepsilon, +\infty[\subseteq I$ (b) y è crescente per $t > 0$ (c) y è decrescente per $t > 0$ (d) I è limitato (e) y è limitata (f) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : (a), (b), (f) **B** : (a), (b) **C** : (a), (b), (e) **D** : (d), (e) **E** : (a), (f) **F** : (a), (c)

7. Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = \alpha^n(x-n)e^{-(x-n)^2}$ con $n \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la successione di funzioni $\{f_n\}$

Risp.: **A** : converge puntualmente su \mathbb{R} se e solo se $|\alpha| < 1$ **B** : converge uniformemente su \mathbb{R} se e solo se $|\alpha| \leq 1$ **C** : converge puntualmente su \mathbb{R} se e solo se $|\alpha| \leq 1$ **D** : non converge uniformemente per nessun α **E** : non converge puntualmente per nessun α **F** : converge uniformemente su \mathbb{R} se e solo se $|\alpha| < 1$

8. Per ogni $n \geq 1$ sia $f_n(x) = \sqrt[3]{nx} \chi_{[n, n+1[}(x)$, e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge totalmente in \mathbb{R} (b) la serie converge puntualmente in \mathbb{R} (c) la somma della serie non è integrabile in $[0, 2]$ (d) la somma della serie è derivabile in $] -\infty, 1[$ (e) la somma della serie è una funzione discontinua in \mathbb{R}

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : (d), (e) **B** : (b), (d) **C** : (b), (e) **D** : (a) **E** : (a), (e) **F** : (b), (d), (e)
