Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \sqrt[4]{1-\cos(\frac{\pi}{2}n^\alpha)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge assolutamente se $\alpha < -2$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: converge semplicemente e non assolutamente per $-4 < \alpha < 0$ $\boxed{\text{D}}$: diverge positivamente per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge assolutamente se $\alpha \leq -2$ $\boxed{\text{F}}$: converge assolutamente se $\alpha < 0$

2. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^n \arctan\left(\frac{x^2}{n^\alpha}\right)$, e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Allora delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente ed uniformemente in $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha > 0$ (b) esiste $\alpha > 0$ tale che la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ (c) esiste almeno un $\alpha > 0$ tale che la somma della serie è una funzione continua (d) per ogni $\alpha > 1$ la serie è integrabile termine a termine sull'intervallo limitato $[-2, 2]$ (e) per ogni $\alpha > 0$ la somma della serie non è derivabile in $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (c) $\boxed{\text{E}}$: (c), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

3. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1/n \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & 1/n < x \le 1 \\ \frac{1}{x^2+\sin(x-1)} & 1 < x \le n \\ 0 & x > n \end{cases}$$

e sia f il suo limite puntuale. Allora delle seguenti affermazioni

(a) $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ (b) $f_n \to f$ uniformemente su $[0,1]$ (c) $\int_0^1 f_n\,dx \to \int_0^1 f\,dx$ (d) $\{\int_{1/n}^n f_n(x)\,dx\}$ è limitata (e) $f_n \to f$ uniformemente su $[1,+\infty[$ (f) $f_n \to f$ uniformemente su $[a,b]$ per ogni $0 < a < b$.

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (f)

---

4. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+1}(z-\alpha)^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n\right]$ con $z \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia D_α la parte interna del suo insieme di convergenza. Delle seguenti affermazioni

(a) $D_\alpha \neq \emptyset$ se e solo se $\alpha \neq 0$ (b) D_α è un segmento per ogni $\alpha \neq 0$ (c) $\lim_{\alpha\to+\infty} Area(D_\alpha) = \pi$ (d) $\lim_{\alpha\to 0^+} Area(D_\alpha) = 0$ (e) D_α è un cerchio per ogni $\alpha \neq 0$ (f) esiste α tale che D_α è un cerchio

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (e), (f)

---

5. La funzione $u(x)$ tale che $\frac{d}{ds}\mathcal{L}[u](s) = -\frac{2}{s^2-2s+5}$ è data da

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{e^{-x}\cos(2x)H(x)}{x}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\sin(2x)H(x)}{x}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{e^{-x}\sin(2x)H(x)}{x}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{e^{x}\cos(2x)H(x)}{x}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{e^{x}\sin(2x)H(x)}{x^2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{e^{x}\sin(2x)H(x)}{x}$

---

6. Sia $y_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 7t\sin^3 y(t) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) y_α è limitata per ogni α (b) y_α è dispari per ogni α (c) y_α è pari per ogni α (d) y_α ha un massimo assoluto per $0 < \alpha < \pi$ (e) y_α ha un minimo assoluto per $0 < \alpha < \pi$ (f) y_α non ha estremi relativi per $0 < \alpha < \pi$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a) $\boxed{\text{D}}$: (a), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (f)

---

7. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$. Allora l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^\alpha}{\ln^\beta(1+7x)}\, dx$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha > 1/2$ e $\beta < 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 1/2$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \geq 1/2$ e $\beta < 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > 1/2$ e $\beta \leq 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta < 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta < 1$

---

8. La trasformata di Fourier $\hat{u}(\xi)$ di $u(x) = x \sin x \chi_{[-1,1]}(x)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\sin(1+\xi)}{(1+\xi)^2} + \frac{\sin(1-\xi)}{(1-\xi)^2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-\frac{\cos(1+\xi)}{1+\xi} + \frac{\sin(1+\xi)}{(1+\xi)^2}$ $\boxed{\text{C}}$: $-\left[\frac{\cos(1+\xi)}{1+\xi} + \frac{\cos(1-\xi)}{1-\xi}\right]$ $\boxed{\text{D}}$: $-\frac{\cos(1-\xi)}{1-\xi} + \frac{\sin(1-\xi)}{(1-\xi)^2}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{\cos(1-\xi)}{1-\xi} + \frac{\sin(1+\xi)}{(1+\xi)^2}$ $\boxed{\text{F}}$: $-\left[\frac{\cos(1+\xi)}{1+\xi} + \frac{\cos(1-\xi)}{1-\xi}\right] + \frac{\sin(1+\xi)}{(1+\xi)^2} + \frac{\sin(1-\xi)}{(1-\xi)^2}$

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \sqrt[4]{1-\cos(\frac{\pi}{2}n^\alpha)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge assolutamente se $\alpha < -2$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: converge semplicemente e non assolutamente per $-4 < \alpha < 0$ $\boxed{\text{D}}$: diverge positivamente per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge assolutamente se $\alpha \leq -2$ $\boxed{\text{F}}$: converge assolutamente se $\alpha < 0$

---

2. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^n \arctan\left(\frac{x^2}{n^\alpha}\right)$, e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Allora delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente ed uniformemente in $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha > 0$ (b) esiste $\alpha > 0$ tale che la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ (c) esiste almeno un $\alpha > 0$ tale che la somma della serie è una funzione continua (d) per ogni $\alpha > 1$ la serie è integrabile termine a termine sull'intervallo limitato $[-2, 2]$ (e) per ogni $\alpha > 0$ la somma della serie non è derivabile in $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (c) $\boxed{\text{E}}$: (c), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

---

3. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1/n \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & 1/n < x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2+\sin(x-1)} & 1 < x \leq n \\ 0 & x > n \end{cases}$$

   e sia f il suo limite puntuale. Allora delle seguenti affermazioni

   (a) $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ (b) $f_n \to f$ uniformemente su $[0, 1]$ (c) $\int_0^1 f_n\,dx \to \int_0^1 f\,dx$ (d) $\{\int_{1/n}^n f_n(x)\,dx\}$ è limitata (e) $f_n \to f$ uniformemente su $[1, +\infty[$ (f) $f_n \to f$ uniformemente su $[a, b]$ per ogni $0 < a < b$.

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (f)

---

4. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+1}(z-\alpha)^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n\right]$ con $z \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia D_α la parte interna del suo insieme di convergenza. Delle seguenti affermazioni

   (a) $D_\alpha \neq \emptyset$ se e solo se $\alpha \neq 0$ (b) D_α è un segmento per ogni $\alpha \neq 0$ (c) $\lim_{\alpha\to+\infty} Area(D_\alpha) = \pi$ (d) $\lim_{\alpha\to0^+} Area(D_\alpha) = 0$ (e) D_α è un cerchio per ogni $\alpha \neq 0$ (f) esiste α tale che D_α è un cerchio

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (e), (f)

---

5. La funzione $u(x)$ tale che $\frac{d}{ds}\mathcal{L}[u](s) = -\frac{2}{s^2-2s+5}$ è data da

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{e^{-x}\cos(2x)H(x)}{x}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\sin(2x)H(x)}{x}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{e^{-x}\sin(2x)H(x)}{x}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{e^{x}\cos(2x)H(x)}{x}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{e^{x}\sin(2x)H(x)}{x^2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{e^{x}\sin(2x)H(x)}{x}$

---

6. Sia $y_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 7t\sin^3 y(t) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) y_α è limitata per ogni α (b) y_α è dispari per ogni α (c) y_α è pari per ogni α (d) y_α ha un massimo assoluto per $0 < \alpha < \pi$ (e) y_α ha un minimo assoluto per $0 < \alpha < \pi$ (f) y_α non ha estremi relativi per $0 < \alpha < \pi$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a) $\boxed{\text{D}}$: (a), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (f)

---

7. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$. Allora l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^\alpha}{\ln^\beta(1+7x)}\,dx$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha > 1/2$ e $\beta < 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 1/2$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \geq 1/2$ e $\beta < 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > 1/2$ e $\beta \leq 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta < 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta < 1$

---

8. La trasformata di Fourier $\hat{u}(\xi)$ di $u(x) = x\sin x\,\chi_{[-1,1]}(x)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\sin(1+\xi)}{(1+\xi)^2} + \frac{\sin(1-\xi)}{(1-\xi)^2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-\frac{\cos(1+\xi)}{1+\xi} + \frac{\sin(1+\xi)}{(1+\xi)^2}$ $\boxed{\text{C}}$: $-\left[\frac{\cos(1+\xi)}{1+\xi} + \frac{\cos(1-\xi)}{1-\xi}\right]$ $\boxed{\text{D}}$: $-\frac{\cos(1-\xi)}{1-\xi} + \frac{\sin(1-\xi)}{(1-\xi)^2}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{\cos(1-\xi)}{1-\xi} + \frac{\sin(1+\xi)}{(1+\xi)^2}$ $\boxed{\text{F}}$: $-\left[\frac{\cos(1+\xi)}{1+\xi} + \frac{\cos(1-\xi)}{1-\xi}\right] + \frac{\sin(1+\xi)}{(1+\xi)^2} + \frac{\sin(1-\xi)}{(1-\xi)^2}$
