

Cognome e nome Firma Matricola

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = -1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{3}{n} 2^{-e^n x^2}$$

e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il suo limite puntuale. Siano F_n e F le primitive di f_n e f che valgono zero per $x = 0$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente ma non uniformemente a f su \mathbb{R} (b) f_n converge uniformemente a f su \mathbb{R} (c) $F_n \rightarrow F$ puntualmente in \mathbb{R} (d) f'_n converge puntualmente in \mathbb{R} (e) f'_n converge puntualmente solo per $x \geq 0$

le uniche corrette

Risp.: A : (a) B : (b), (c), (d) C : (b), (c), (e) D : (b) E : (a), (c) F : (b), (c)

2. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ dove $a_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan^{2n-1}(2x)}{1+4x^2} dx$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge semplicemente ma non assolutamente (b) la serie converge assolutamente (c) la successione delle somme parziali non è monotona (d) la successione delle somme parziali non è limitata (e) la serie non converge

le uniche corrette sono

Risp.: A : (b) B : (a), (c) C : (b), (c) D : (c), (d), (e) E : (d), (e) F : (e)

3. Si consideri la serie trigonometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} [n^4 + 2 \ln(n+1)]^\alpha \cos((2n+1)x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

Risp.: **A** : per ogni $\alpha < -\frac{1}{2}$ la somma della serie è una funzione derivabile in \mathbb{R} **B** : per ogni $\alpha < 0$ la serie converge puntualmente ma non uniformemente in \mathbb{R} **C** : esiste $\alpha > 0$ tale che la serie non converge in alcun punto di \mathbb{R} **D** : esiste $\alpha < 0$ tale che la serie non converge in alcun punto di \mathbb{R} **E** : esiste $\alpha > 0$ tale che la serie converge puntualmente in \mathbb{R} **F** : per ogni $-\frac{1}{8} < \alpha < 0$ la serie trigonometrica è la serie di Fourier di una funzione 2π -periodica in \mathbb{R} integrabile su $[0, 2\pi]$

4. La trasformata di Fourier di $u(x) = x^2 \text{sign}(x) \chi_{[-1,1]}(x)$ vale

Risp.: **A** : $2 \frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **B** : $2 \frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4 \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4 \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **C** : $2i \frac{\cos(\xi)}{\xi} + 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **D** : $2i \frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **E** : $2i \frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} + 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **F** : $2i \frac{\cos(\xi)}{\xi} + 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} + 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$

5. Sia data

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{7} [1 - 2n^3] (|x| - \frac{7}{n^2}) & \text{se } |x| \leq \frac{7}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } |x| > \frac{7}{n^2} \end{cases}$$

e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente in \mathbb{R} (b) la somma della serie è una funzione continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) la serie converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $[A, +\infty[$ con $A > 0$ (d) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx$ è convergente (e) la serie non converge totalmente in $]0, +\infty[$

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : (a), (b), (c), (e) **B** : (a), (b), (c) **C** : (b), (c) **D** : (a), (c), (d) **E** : (b), (c), (e) **F** : (a), (e)

6. Sia data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (2 + \frac{\cos n}{2n})^{2n} (x+y)^n$, dove $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$. Detto D l'insieme degli (x, y) tali per cui la serie converge, l'area di D vale

Risp.: **A** : 8 **B** : 32 **C** : 1/32 **D** : 1/8 **E** : $\frac{\pi}{16}$ **F** : $\frac{\pi}{64}$.

7. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{(x-\sin x)^\beta \sin^2(\frac{1}{x})}{x^{2\alpha}} dx$ converge se e solo se

Risp.: **A** : $\beta - 1 < 2\alpha < 3\beta + 1$ **B** : $\beta - 1 < 2\alpha$ **C** : $\beta - 1 < 2\alpha < 3\beta - 1$ **D** : $\beta + 1 < 2\alpha < 3\beta + 1$ **E** : $2\alpha < 3\beta + 1$ **F** : $2\alpha < 3\beta - 1$

8. La trasformata di Laplace della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

vale

$$\text{Ris.}: \boxed{\text{A}}: -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1} \quad \boxed{\text{B}}: \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1} \quad \boxed{\text{C}}: \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1} \quad \boxed{\text{D}}: \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2} \quad \boxed{\text{E}}: -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \quad \boxed{\text{F}}: \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1}$$

1. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{3}{n} 2^{-e^n x^2}$$

e sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il suo limite puntuale. Siano F_n e F le primitive di f_n e f che valgono zero per $x = 0$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente ma non uniformemente a f su \mathbb{R} (b) f_n converge uniformemente a f su \mathbb{R} (c) $F_n \rightarrow F$ puntualmente in \mathbb{R} (d) f'_n converge puntualmente in \mathbb{R} (e) f'_n converge puntualmente solo per $x \geq 0$

le uniche corrette

Risp.: **A**: (a) **B**: (b), (c), (d) **C**: (b), (c), (e) **D**: (b) **E**: (a), (c) **F**: (b), (c)

2. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ dove $a_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan^{2n-1}(2x)}{1+4x^2} dx$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge semplicemente ma non assolutamente (b) la serie converge assolutamente (c) la successione delle somme parziali non è monotona (d) la successione delle somme parziali non è limitata (e) la serie non converge

le uniche corrette sono

Risp.: **A**: (b) **B**: (a), (c) **C**: (b), (c) **D**: (c), (d), (e) **E**: (d), (e) **F**: (e)

3. Si consideri la serie trigonometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} [n^4 + 2 \ln(n+1)]^\alpha \cos((2n+1)x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

Risp.: **A**: per ogni $\alpha < -\frac{1}{2}$ la somma della serie è una funzione derivabile in \mathbb{R} **B**: per ogni $\alpha < 0$ la serie converge puntualmente ma non uniformemente in \mathbb{R} **C**: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie non converge in alcun punto di \mathbb{R} **D**: esiste $\alpha < 0$ tale che la serie non converge in alcun punto di \mathbb{R} **E**: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie converge puntualmente in \mathbb{R} **F**: per ogni $-\frac{1}{8} < \alpha < 0$ la serie trigonometrica è la serie di Fourier di una funzione 2π -periodica in \mathbb{R} integrabile su $[0, 2\pi]$

4. La trasformata di Fourier di $u(x) = x^2 \text{sign}(x) \chi_{[-1,1]}(x)$ vale

Risp.: **A**: $2 \frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **B**: $2 \frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4 \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4 \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **C**: $2i \frac{\cos(\xi)}{\xi} + 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **D**: $2i \frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **E**: $2i \frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} + 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ **F**: $2i \frac{\cos(\xi)}{\xi} + 4i \frac{\sin(\xi)}{\xi^2} + 4i \frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$

5. Sia data

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{7} [1 - 2n^3] (|x| - \frac{7}{n^2}) & \text{se } |x| \leq \frac{7}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } |x| > \frac{7}{n^2} \end{cases}$$

e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente in \mathbb{R} (b) la somma della serie è una funzione continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) la serie converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $[A, +\infty[$ con $A > 0$ (d) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx$ è convergente (e) la serie non converge totalmente in $]0, +\infty[$

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : (a), (b), (c), (e) **B** : (a), (b), (c) **C** : (b), (c) **D** : (a), (c), (d) **E** : (b), (c),
(e) **F** : (a), (e)

6. Sia data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{\cos n}{2^n}\right)^{2n} (x+y)^n$, dove $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$. Detto D l'insieme degli (x, y) tali per cui la serie converge, l'area di D vale

Risp.: **A** : 8 **B** : 32 **C** : 1/32 **D** : 1/8 **E** : $\frac{\pi}{16}$ **F** : $\frac{\pi}{64}$.

7. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{(x-\sin x)^\beta \sin^2(\frac{1}{x})}{x^{2\alpha}} dx$ converge se e solo se

Risp.: **A** : $\beta - 1 < 2\alpha < 3\beta + 1$ **B** : $\beta - 1 < 2\alpha$ **C** : $\beta - 1 < 2\alpha < 3\beta - 1$ **D** : $\beta + 1 < 2\alpha < 3\beta + 1$ **E** : $2\alpha < 3\beta + 1$ **F** : $2\alpha < 3\beta - 1$

8. La trasformata di Laplace della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

vale

Risp.: **A** : $-\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1}$ **B** : $\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1}$ **C** : $\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1}$ **D** : $\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}$ **E** : $-\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1}$ **F** : $\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1}$
