

CURRICULUM DELL'ATTIVITÀ SCIENTIFICA E DIDATTICA

RICCARDA ROSSI

COORDINATE

Nome: Riccarda Ida Paola;

Cognome: Rossi;

Luogo di nascita: Cremona (CR);

Data di nascita: 29 Novembre 1977;

Residenza: Via Gradisca, 6 - 26100 Cremona;

Cittadinanza: Italiana;

Ufficio: Dipartimento di Matematica dell'Università di Brescia, Via Valotti, 9 - 25133 Brescia;

Recapito telefonico: ufficio: +39-030-3715731;

E-mail: riccarda.rossi@ing.unibs.it.

Pagina web: <http://dm.ing.unibs.it/rossi>

POSIZIONE ATTUALE

Ricercatrice di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Brescia a partire dal 07/07/2006. Confermata in ruolo a decorrere dal 07/07/2009.

FORMAZIONE

- Maturità Linguistica, conseguita presso il Liceo-Ginnasio Statale "D. Manin" di Cremona nell'anno scolastico 1995/96, con la votazione di 60/60 con menzione di merito.
- Laureata in Matematica presso l'Università di Pavia, con la votazione finale di 110/110 e lode, con la tesi di laurea "Misure di Young in dimensione infinita e applicazioni ai problemi di evoluzione", relatore Prof. Giuseppe Savaré, discussa il 26/09/2000.
- Alunna della *Scuola Universitaria Superiore* di Pavia negli anni accademici 1997/98, 1998/99, 1999/2000; diplomata con lode in data 22/11/2000.
- Dottoranda di Ricerca in *Matematica*, XVI Ciclo, presso l'Università degli Studi di Milano, dall'1/11/2000 al 02/02/2005; titolare della borsa di studio dall'1/11/2000 al 31/10/2004.
- Titolo di Dottore di Ricerca conseguito il 02/02/2005, con la tesi "Existence and compactness results for evolution equations and applications to phase field models". Relatore della tesi: Prof. Giuseppe Savaré.

POSIZIONI POST-DOC

Assegnista di ricerca presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Brescia dal 01/11/2004 al 06/07/2006; responsabile scientifico: Prof. Fabio Luterotti.

PREMI

- Vincitrice del Premio di studio della *Scuola Universitaria Superiore* di Pavia per l'anno accademico 1998/1999.
- Vincitrice del Premio di studio della *Scuola Universitaria Superiore* di Pavia per l'anno accademico 1999/2000.
- Vincitrice del Premio di laurea "Luigi Berzolari" per i laureati in Matematica (nel biennio 1999/2000 e 2000/2001) dell'Università di Pavia, nel Novembre 2002.

ESPERIENZE DI RICERCA ALL'ESTERO

- In visita presso l'*Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung* dell'Università di Stoccarda, per una collaborazione scientifica con il Prof. Alexander Mielke, nei mesi di Aprile-Luglio 2004, durante i quali ho fruito di una borsa di studio dell'Unione Europea nell'ambito del network di ricerca *Smart Systems: New Materials, Adaptive Systems and their Nonlinearities. Modelling, Control and Numerical Simulation*;
- in visita presso il *Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics* (WIAS) di Berlino, per una collaborazione scientifica con il Prof. Alexander Mielke, dal 28/11/2005 al 9/12/2005;
- in visita presso il *Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics* (WIAS) di Berlino, per una collaborazione scientifica con il Prof. Alexander Mielke, dal 29/01/2007 al 31/01/2007;
- in visita presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Poitiers dal 09/06/2008 al 20/06/2008 per una collaborazione scientifica con il Prof. Alain Miranville, finanziata nell'ambito del *Programma Galileo* Italia-Francia;
- in visita presso il Dipartimento di Matematica dell'*Univerzita Karlova v Praze*, Praga, dal 13/04/2009 al 08/05/2009, per una collaborazione scientifica con il Prof. Tomáš Roubíček, con una borsa post-doc del *Nečas Center*;
- in visita presso il *Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics* (WIAS) di Berlino, per una collaborazione scientifica con il Prof. Alexander Mielke, dal 21/04/2009 al 24/04/2009;
- in visita presso il Dipartimento di Matematica dell'*Univerzita Karlova v Praze*, Praga, dal 22/03/2010 al 26/03/2010, per una collaborazione scientifica con il Prof. Tomáš Roubíček, con una borsa post-doc del *Nečas Center*;
- in visita presso il *Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics* (WIAS) di Berlino, per una collaborazione scientifica con il Prof. Alexander Mielke, dal 19/04/2009 al 14/05/2009.

PARTECIPAZIONE A SCUOLE E WORKSHOPS

- Scuola estiva “**Multiscale problems in nonlinear analysis**”, *Center for Nonlinear Analysis* della Carnegie Mellon University di Pittsburgh, USA, dal 30 Maggio al 9 Giugno 2001;
- scuola “**Alcuni temi di analisi matematica non lineare**”, Dipartimento di Matematica dell’Università di Trento, dal 3 all’8 Febbraio 2002;
- scuola “**Spring School on Calculus of Variations**”, Scuola Normale Superiore di Pisa, dal 20 al 25 Maggio 2002;
- scuola “**Mass Transportation Problems and Applications**”, nell’ambito del ciclo annuale degli *Oberwolfach Seminars*, Mathematisches Forschungsinstitut di Oberwolfach (Germania), dal 13 al 19 Ottobre 2002;
- scuola estiva CIME “**Hyperbolic systems of balance laws**”, Cetraro (Cosenza), dal 13 al 21 Luglio 2003;
- workshop “**Optimal transport theory and applications**”, Scuola Normale di Pisa, dal 9 al 12 Ottobre 2003;
- scuola “**Lectures on transport equations and multi-d hyperbolic conservation laws**”, Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna, dal 17 al 20 Gennaio 2005;
- workshop “**Harnack inequalities and positivity for solutions of partial differential equations**”, Cortona, dal 12 al 18 Giugno 2005;
- workshop “**Variational models in material science**”, Pisa, dal 10 al 14 Ottobre 2006;
- workshop “**Optimal Transport: theory and applications**”, Pisa, dal 14 al 18 Novembre 2006;
- scuola estiva CIME “**Nonlinear PDEs and Applications**”, Cetraro (Cosenza), dal 22 al 28 Giugno 2008.

COMUNICAZIONI A WORKSHOPS E CONVEGNI

1. *Analisi asintotica del modello di phase-field di Caginalp al tendere a zero di due parametri di rilassamento temporale*, al convegno “Materiali speciali e memorie: problemi modellistici e analitici”, Salò, 4-6 Luglio 2002;
2. *Existence results for quasistationary phase field models: a gradient flow approach*, al convegno su “Problemi a frontiera libera nelle scienze applicate”, Montecatini, 10-11 Aprile 2003;
3. *Buona positura e analisi asintotica per un sistema di phase field di tipo Penrose-Fife*, al convegno “Salò 2003. Materiali speciali e memorie: Problemi modellistici e analitici”, Salò, 3-5 Luglio 2003;
4. *Risultati di esistenza per modelli di campo di fase quasistazionari e gradient flows non convessi*, al “XVII Congresso UMI”, Milano, 8-13 Settembre 2003;

5. *Compactness results for evolution equations*, al convegno “Evolution Problems. In memory of Brunello Terreni”, Rapallo, 26-27 Marzo 2004;
6. *Risultati di esistenza e unicità per una classe di problemi quasivariazionali*, al convegno “Salò 2004. Modelli matematici e problemi analitici per materiali speciali”, Salò, 15-17 Luglio 2004;
7. *Well-posedness results for two classes of generalized viscous Cahn-Hilliard equations*, al convegno “Dissipative Models in Phase Transitions”, a Cortona, dal 6 al 10 Settembre 2004;
8. *Existence and uniqueness results for rate-independent problems*, al convegno internazionale “Free Boundary Problems: Theory and Applications”, Coimbra, 7-12 Giugno 2005;
9. *Existence and uniqueness results for a class of rate-independent problems*, al convegno “Modellizzazione matematica ed analisi dei problemi a frontiera libera”, Montecatini, 29-30 Settembre 2005;
10. *Existence and long-time behaviour for gradient flows of non convex functionals*, al workshop “Dynamics of Phase Transitions”, WIAS, Berlino, 30 Novembre - 3 Dicembre 2005;
11. *Gradient flows of non convex functionals: existence and long-time behaviour results*, nella sessione *Differential Inclusions* della “AIMS’ Sixth International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications”, Poitiers, 25 - 28 Giugno 2006;
12. *Global attractors for gradient flows in metric spaces*, al convegno “Recent advances in Free Boundary Problems and related topics”, Levico, 14 - 16 Settembre 2006;
13. *Existence and uniqueness results for a class of rate-independent hysteresis problems*, al convegno “European Conference on Smart Systems”, Roma, 26 - 28 Ottobre 2006;
14. *Equazioni doppiamente non lineari in spazi metrici*, al convegno “Giornate di Lavoro su Questioni di Teoria Geometrica della Misura e di Calcolo delle Variazioni”, Levico, 4 - 9 Febbraio 2007;
15. *Vanishing viscosity approximation of rate-independent problems*, al convegno “EQUAD-IFF 07”, Vienna, 5 - 11 Agosto 2007;
16. *Un approccio variazionale a problemi rate-independent con isteresi*, al XVIII Congresso U.M.I., Bari, 24 - 29 Settembre 2007;
17. *A vanishing viscosity approach to rate-independent modelling in metric spaces*, al workshop “Rate-independence, Homogenization and Multiscaling”, Pisa, 14 - 17 Novembre 2007;
18. *Some results on the vanishing viscosity approximation of rate-independent problems* al workshop “Modèles Mathématiques en science des matériaux”, Poitiers, 12 Giugno 2008;

19. *Thermal effects in adhesive contact* al convegno “XVI Symposium on the Trends of the Applications of Mathematics to Mechanics”, Levico, 22 - 25 Settembre 2008;
20. *Interazione di norme L^2 e L^1 in evoluzioni rate-independent* al convegno “XIX Convegno Nazionale di Calcolo delle Variazioni”, Levico, 08 - 13 Febbraio 2009;
21. *Analysis of a model for adhesive contact with thermal effects* al workshop “Mathematical Models and Analytical Problems for Special Materials”, Brescia, 09 - 11 Luglio 2009;
22. *On the Cahn-Hilliard equation with a chemical potential dependent mobility* al convegno “AIMS’ Eighth International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications”, Dresden, 25 - 28 Maggio 2010;
23. *Some results on the vanishing viscosity approach to rate-independent modelling* al workshop “Rate-independent systems: Modeling, Analysis, and Computations”, BIRS, Banff (Canada), 29 Agosto - 3 Settembre 2010.

POSTERS A WORKSHOPS E CONVEGNI

1. *Existence of solutions to quasistationary phase-field systems* al convegno internazionale “Free Boundary Problems: Theory and Applications”, Trento, 5-8 Giugno 2002.

SEMINARI PRESSO UNIVERSITÀ E CENTRI DI RICERCA

1. *Gradient flows of nonconvex functionals in Hilbert spaces*, presso il Mathematisches Forschungsinstitut di Oberwolfach, in Germania, il 17 Ottobre 2002;
2. *Existence results for gradient flow equations for non convex functionals in Hilbert spaces and applications*, presso l’*Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung* dell’Università di Stoccarda, il 29 Aprile 2004;
3. *Equazioni doubly nonlinear e problemi rate-independent in spazi metrici*, presso l’istituto IMATI-CNR di Pavia, l’8 Novembre 2005;
4. *Equazioni doppiamente nonlineari in spazi metrici e applicazioni ai problemi rate-independent*, presso il Dipartimento di Matematica dell’Università di Trento, il 9 Gennaio 2006;
5. *Long-time behaviour of gradient flows in metric spaces*, presso il WIAS, Berlino, il 31 Gennaio 2007;
6. *A variational approach to doubly nonlinear and rate-independent evolutions*, presso il Dipartimento di Matematica dell’Univerzita Karlova v Praze, Praga, il 20 Aprile 2009;
7. *Interplay of viscosity and dry friction in rate-independent evolutions with non-convex energies*, presso il WIAS, Berlino, il 22 Aprile 2009;

8. *Analysis of a rate-independent model for adhesive contact with thermal effects*, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università Karlova v Praze, Praga, il 22 Marzo 2010;
9. *Analysis of adhesive contact with thermal effects*, presso il WIAS, Berlino, il 05 Maggio 2010.

ALTRE ESPERIENZE SCIENTIFICHE

- Coordinatrice del progetto di ricerca GNAMPA per l'anno 2010 *Analisi di fenomeni dissipativi nella meccanica dei materiali*.
- Collaborazione all'*editing* del libro *Free Boundary Problems. Theory and Applications*, ed. P. Colli, C. Verdi, A. Visintin, ISNM 147, Birkhäuser, Basel, 2004.
- Collaborazione all'*editing* dei *Proceedings* (ed. P. Colli, N. Kenmochi, J. Sprekels), del Convegno "Dissipative Models in Phase Transitions", tenutosi a Cortona nel Settembre 2004.
- Collaborazione all'organizzazione del Workshop INdAM "Harnack inequalities and positivity for solutions of partial differential equations", Cortona, 12-18 Giugno 2005.
- Referee per le riviste:
 1. "Mathematical Methods in the Applied Sciences" (dal Marzo 2005);
 2. "Advances in Mathematical Sciences and Applications" (dal Settembre 2006);
 3. "Discrete and Continuous Dynamical Systems A" (dall'Ottobre 2007);
 4. "Applications of Mathematics" (dal Gennaio 2008);
 5. "Bollettino dell'Unione Matematica Italiana" (dal Novembre 2008);
 6. "SIAM Journal on Mathematical Analysis" (dall'Aprile 2009);
 7. "Journal of Differential Equations" (dal Giugno 2009);
 8. "Discrete and Continuous Dynamical Systems S" (dal Luglio 2009).

ATTIVITÀ DIDATTICA

Tutorati.

1. **A.A. 1998/1999:** svolgimento di attività di **tutorato** per il corso di **Geometria II** (titolare del corso: Prof. P. Pirola), corso di laurea in Matematica, Università di Pavia;
2. **A.A. 1999/2000:** **tutorato** per il corso di **Istituzioni di Matematica** (titolare del corso: Prof.ssa G. Cazzani), corso di laurea in Biologia, Università di Pavia.

Esercitazioni.

1. **A.A. 2000/2001**: svolgimento di **complementi alle esercitazioni** del corso di **Analisi Matematica I** (titolare del corso: Prof. S. Massa), corso di laurea in Informatica, Università di Milano;
2. **A.A. 2001/2002, primo semestre**: **esercitazioni** del corso di **Analisi A** (titolare del corso: Prof. M. L. Bernardi), corsi di laurea in Ingegneria Elettrica, Elettronica, Energetica e Informatica, Università di Pavia **con il titolo di cultore della materia, e partecipazione alle commissioni di esame**;
3. **A.A. 2001/2002, secondo semestre**: **esercitazioni** del corso di **Analisi B** (titolare del corso: Prof. M. Bramanti), corso di laurea in Ingegneria Biomedica, Politecnico di Milano, **con partecipazione alle commissioni di esame**;
4. **A.A. 2002/2003, primo semestre**: **esercitazioni** del corso di **Analisi A** (titolare del corso: Prof. M. L. Bernardi), corsi di laurea in Ingegneria Elettrica, Elettronica, Energetica e Informatica, Università di Pavia **con il titolo di cultore della materia, e partecipazione alle commissioni di esame**;
5. **A.A. 2002/2003, secondo semestre**: **esercitazioni** del corso di **Analisi B** (titolare del corso: Prof. S. Mortola), corso di laurea in Ingegneria Elettronica, Politecnico di Milano, **con partecipazione alle commissioni di esame**;
6. **A.A. 2003/2004, primo semestre**: **esercitazioni** del corso di **Analisi A** (titolare del corso: Prof. M. L. Bernardi), corsi di laurea in Ingegneria Elettrica, Elettronica, Energetica e Informatica, Università di Pavia **con il titolo di cultore della materia, e partecipazione alle commissioni di esame**;
7. **A.A. 2005/2006, secondo quadrimestre**: **esercitazioni** del corso di **Metodi Matematici per l'Ingegneria** (titolare del corso: Prof. P. Secchi), corsi di laurea specialistica in Ingegneria Meccanica, dei Materiali, Civile, Elettronica, e delle Telecomunicazioni, Università di Brescia, **con partecipazione alle commissioni di esame**;
8. **A.A. 2006/2007, secondo quadrimestre**: **esercitazioni** del corso di **Metodi Matematici per l'Ingegneria** (titolare del corso: Prof. P. Secchi), corsi di laurea specialistica in Ingegneria Meccanica, dei Materiali, Civile, Elettronica, e delle Telecomunicazioni, Università di Brescia, **con partecipazione alle commissioni di esame**;
9. **A.A. 2007/2008, secondo quadrimestre**: **esercitazioni** del corso di **Metodi Matematici per l'Ingegneria** (titolare del corso: Prof. P. Secchi), corsi di laurea specialistica in Ingegneria Meccanica, dei Materiali, Civile, Elettronica, e delle Telecomunicazioni, Università di Brescia, **con partecipazione alle commissioni di esame**;
10. **A.A. 2007/2008, secondo quadrimestre**: **esercitazioni** del corso di **Analisi B** (titolare del corso: Prof.ssa G. Bonfanti), corso di laurea in Ingegneria Meccanica, Università di Brescia, **con partecipazione alle commissioni di esame**;
11. **A.A. 2008/2009, secondo quadrimestre**: **esercitazioni** del corso di **Metodi Matematici per l'Ingegneria** (titolare del corso: Prof. P. Secchi), corsi di laurea specialistica in Ingegneria Meccanica, dei Materiali, Civile, Elettronica, e delle Telecomunicazioni, Università di Brescia, **con partecipazione alle commissioni di esame**;

12. **A.A. 2009/2010, primo semestre: esercitazioni** del corso di **Analisi II** (titolare del corso: Prof.ssa G. Bonfanti), corso di laurea in Ingegneria Meccanica, Università di Brescia, **con partecipazione alle commissioni di esame;**
13. **A.A. 2009/2010, secondo quadrimestre: esercitazioni** del corso di **Metodi Matematici per l'Ingegneria** (titolare del corso: Prof. P. Secchi), corsi di laurea specialistica in Ingegneria Meccanica, dei Materiali, Civile, Elettronica, e delle Telecomunicazioni, Università di Brescia, **con partecipazione alle commissioni di esame;**
14. **A.A. 2010/2011, primo semestre: esercitazioni** del corso di **Analisi II** (titolare del corso: Prof.ssa G. Bonfanti), corso di laurea in Ingegneria Meccanica, Università di Brescia, **con partecipazione alle commissioni di esame.**

Titolarità di corsi.

1. **A.A. 2004/2005, mesi di Marzo-Aprile 2005: titolare** del corso integrativo di **Complementi di analisi di funzioni di più variabili**, nell'ambito dell'insegnamento di Analisi C, corsi di laurea di Ingegneria Civile, Meccanica e Ambientale, Università di Pavia;
2. **A.A. 2006/2007, primo semestre: titolare** del corso di **Matematica–Analisi Matematica**, primo anno del corso di laurea in Disegno Industriale, Università di Brescia;
3. **A.A. 2007/2008, primo semestre: titolare** del corso di **Matematica–Analisi Matematica**, primo anno del corso di laurea in Disegno Industriale, Università di Brescia;
4. **A.A. 2008/2009, primo semestre: titolare** del corso di **Matematica–Analisi Matematica**, primo anno del corso di laurea in Disegno Industriale, Università di Brescia;
5. **A.A. 2009/2010, primo semestre: titolare** del corso di **Matematica–Analisi Matematica**, primo anno del corso di laurea in Disegno Industriale, Università di Brescia;
6. **A.A. 2009/2010, secondo quadrimestre: titolare** del corso di **Analisi funzionale** per il dottorato in Metodi e Modelli Matematici per l'Ingegneria, attivato presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Brescia;
7. **A.A. 2010/2011, primo semestre: titolare** del corso di **Analisi Matematica 1**, primo anno (sezione I) del corso di laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, Università di Brescia.

ATTIVITÀ DI RICERCA

TEMI DI RICERCA

I miei interessi scientifici possono essere indicativamente raggruppati in queste tre categorie:

1. compattezza per problemi di evoluzione;

2. equazioni di evoluzione astratte in spazi di Banach e spazi metrici;
3. problemi analitici per modelli di transizione di fase e di contatto con adesione.

Nel seguito, per illustrare la mia attività di ricerca, cercherò di inquadrare brevemente la tipologia di problemi di cui mi sono occupata nell'ambito di ciascuno di questi temi di ricerca, dando eventualmente opportuni cenni bibliografici. Svilupperò poi una descrizione più dettagliata dei relativi lavori scientifici. Le pubblicazioni a cui si fa riferimento sono numerate come nel successivo elenco.

1. MISURE DI YOUNG E COMPATTEZZA PER PROBLEMI DI EVOLUZIONE

A partire dal lavoro di ricerca per la tesi di Laurea, e in collaborazione con il mio relatore, il Prof. G. Savaré, ho sviluppato alcune applicazioni della teoria delle misure di Young alle equazioni alle derivate parziali, e, in particolare, al problema della caratterizzazione della compattezza negli spazi di funzioni $L^p(0, T; B)$, con $1 \leq p < \infty$ e B uno spazio di Banach separabile.

Le misure di Young sono state introdotte da L.C. Young alla fine degli anni '30 per analizzare il comportamento oscillatorio delle successioni minimizzanti in alcuni problemi variazionali non convessi. La tipologia di problemi considerati da Young si presenta tipicamente nel Calcolo delle Variazioni e del Controllo Ottimale, ambiti ai quali l'applicazione della teoria delle misure di Young è stata sostanzialmente confinata fino alla metà degli anni '70. Risale infatti a quegli anni il lavoro di L. TARTAR sul metodo della *compattezza per compensazione*, (si veda ad esempio [*Compensated compactness and partial differential equations*, in "Nonlinear analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium", Vol. IV, R. Knops ed., Pitman, 1979, 136-212.]), nel quale Tartar utilizza tecniche di compattezza basate sulla teoria delle misure di Young nello studio delle leggi di conservazione. Il fondamentale contributo di Tartar ha di fatto messo in luce la duttilità della teoria delle misure di Young e la loro applicabilità ai problemi legati allo studio delle equazioni alle derivate parziali non lineari.

In tale ambito, è in effetti di grande interesse lo studio dei fenomeni oscillatori connessi alla convergenza debole di successioni, soprattutto in relazione al cosiddetto "metodo di compattezza" per problemi di evoluzione non lineari (cf. [J.L. Lions, "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires", Dunod, Gauthiers-Villars, Paris, 1969]). Più precisamente, grazie alla teoria delle misure di Young è spesso possibile risolvere il problema del passaggio al limite per funzionali non lineari applicati alle successioni approssimanti la soluzione dell'equazione, per le quali si ha in genere a disposizione solo una convergenza debole.

Infatti, un fondamentale risultato di compattezza della teoria delle misure di Young garantisce che, a meno di estrarre sottosuccessioni, è possibile associare ad ogni successione debolmente convergente in uno spazio L^p una misura di Young "limite": tale "limite generalizzato" fornisce di fatto informazioni sul comportamento asintotico di opportuni funzionali applicati alla successione. I risultati dei lavori [1] e [2] si collocano proprio in questo ordine di idee.

Lavori [1] e [2], [2] in collaborazione con G. Savaré, (Università di Pavia).

Nel lavoro [1] viene presentata una estensione di un risultato di compattezza in spazi L^p e di Sobolev (a valori in uno spazio di Banach), dimostrato da S. LUCKHAUS [*Solutions of the two phase Stefan problem with the Gibbs-Thomson law for the melting temperature*, Euro. J. Appl. Math. 1 (1990), 395-404], nell'ambito dell'analisi di un problema ai limiti per un sistema evolutivo "quasistazionario". Tale sistema rientra nel quadro della modellizzazione di alcuni fenomeni di transizione di fase che verrà richiamata anche in seguito. In [1], il problema di compattezza risolto da Luckhaus è stato riesaminato alla luce della teoria delle misure di Young: questa rilettura ha permesso di ottenere una generalizzazione del suddetto risultato di Luckhaus, nella fattispecie un

teorema di compattezza che può essere applicato a una più ampia classe di problemi di transizione di fase, descritti da sistemi di equazioni alle derivate parziali accoppiate a condizioni al bordo su una porzione di frontiera dipendente dal tempo. In [1] vengono anche dati altri risultati di compattezza L^p , anch'essi ottenuti per mezzo della teoria delle misure di Young.

Nel lavoro [2], viene affrontato il più generale problema della caratterizzazione della compattezza (rispetto alla topologia forte), negli spazi $L^p(0, T; B)$. A partire dagli anni '60, sono state infatti proposte svariate caratterizzazioni della compattezza di una successione in $L^p(0, T; B)$, sempre in relazione al cosiddetto “metodo di compattezza” per i problemi evolutivi. In tali caratterizzazioni, alla classica condizione di “equicontinuit  integrale” del criterio di compattezza L^p in dimensione finita (dovuto Riesz, Fr chet e Kolmogorov), viene tipicamente aggiunta la condizione che la successione assuma valori (in un senso opportuno) in un sottospazio compatto (si veda a questo proposito il criterio dimostrato da J.P. AUBIN [*Un th or me de compacit *, C.R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 5042-5044] e J.L. LIONS [*Equations diff rentielles op rationnelles et probl mes aux limites*, Springer, Berlin, 1961], e poi esteso da J. SIMON [*Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Mat. Pura Appl. 146 (1987), 65-96]). L'approccio sviluppato in [2] muove dalla considerazione che, non appena si assuma una condizione di uniforme L^p -integrabilit , il problema di trovare condizioni necessarie e sufficienti per la compattezza L^p pu  essere ricondotto al problema di caratterizzare la compattezza rispetto alla convergenza in misura. Quindi, in [2]   stato in primo luogo dimostrato un risultato di caratterizzazione della compattezza in misura, per una successione di funzioni misurabili a valori nello spazio di Banach B . In tale criterio, una opportuna generalizzazione della condizione di “equicontinuit ” del teorema di Riesz-Fr chet-Kolmogorov viene affiancata alla condizione, classica nel Calcolo delle Probabilit , di “tightness” della successione. Sostanzialmente, grazie ad una versione del summenzionato teorema di compattezza delle misure di Young, a meno di estrarre sottosuccessioni   possibile associare ad ogni successione tight una misura di Young limite. A partire da tale misura, si definisce opportunamente una funzione misurabile, che fornisce di fatto il limite in misura della successione - si noti che a questo livello gioca un ruolo cruciale l'ipotesi di “equicontinuit ”. Sulla base di questo criterio per la compattezza in misura, abbiamo poi fornito il nostro criterio per la compattezza L^p , di cui abbiamo anche sviluppato alcune applicazioni a problemi di compattezza che generalizzano il problema risolto da S. LUCKHAUS. Inoltre, in [2] sono stati ottenuti risultati di compattezza rispetto a una nozione di convergenza in misura che pu  essere introdotta nell'ambito della topologia debole.

2. ESISTENZA, APPROSSIMAZIONE, UNICIT  PER EQUAZIONI DI EVOLUZIONE ASTRATTE

Durante il dottorato, ho iniziato a occuparmi di risultati di esistenza e approssimazione di soluzioni, per equazioni di evoluzione astratte: in particolare, ho considerato opportune varianti di questa equazione di evoluzione doppiamente nonlineare

$$(1) \quad \partial\psi(u'(t)) + \partial\phi(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B', \quad t \in (0, T),$$

ove B   uno spazio di Banach separabile, e supporremo, in generale, che $\psi : B \rightarrow [0 + \infty)$ sia un funzionale proprio, convesso, e semicontinuo inferiormente, e $\phi : (0, T) \times B \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sia proprio, e semicontinuo inferiormente rispetto alla seconda variabile. I simboli $\partial\psi$, $\partial\phi$ denotano un'opportuna nozione di sottodifferenziale (rispetto alla variabile u) per i funzionali ψ e ϕ . L'inclusione differenziale (1) viene di fatto intesa come

$$\omega(t) + \xi(t) = 0, \quad \omega(t) \in \partial\psi(u'(t)), \quad \xi(t) \in \partial\phi(t, u(t)), \quad t \in (0, T).$$

Lo studio di equazioni del tipo (1) ha attratto l'interesse di molti analisti sin dai primi anni '70. A quest'epoca risalgono infatti i fondamentali lavori di H. BRÉZIS, Y. KOMURA, M. CRANDALL & T. LIGGETT sull'equazione di *gradient flow* (ambientata nel contesto di uno spazio di Hilbert separabile \mathcal{H})

$$(2) \quad u'(t) + \partial\phi(u(t)) \ni 0 \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad t \in (0, T),$$

con ϕ convesso e s.c.i. su \mathcal{H} . Si noti che (2) è un caso particolare di (1), ove si scelga $\psi(u) := \frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{H}}^2$ per ogni $u \in \mathcal{H}$, e come $\partial\phi$ il sottodifferenziale di ϕ nel senso dell'analisi convessa. Risultati di esistenza (e unicità, grazie alla convessità di ϕ), per (2) sono stati ottenuti sia nell'ambito della teoria degli operatori massimali monotoni, sia con tecniche di approssimazione tramite discretizzazione in tempo, le quali rivestono un interesse autonomo dal punto di vista dell'analisi numerica.

Un opportuno schema di discretizzazione in tempo è stato anche impiegato da J.J. MOREAU nella dimostrazione di risultati di esistenza per l'equazione di tipo *sweeping process*

$$(3) \quad u'(t) + \partial I_{C(t)}(u(t)) \ni 0 \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad t \in (0, T),$$

ove $\{C(t)\}_{t \in (0, T)} \subset \mathcal{H}$ è una famiglia di convessi chiusi di \mathcal{H} e $I_{C(t)}$ è la funzione indicatrice del convesso $C(t)$ (corrispondente alla scelta $\phi(t, u) := I_{C(t)}(u)$ per ogni $(t, u) \in (0, T) \times \mathcal{H}$ in (1)). Inoltre, con le suddette tecniche di discretizzazione in tempo P. COLLI & A. VISINTIN (cf. [*On a class of doubly nonlinear evolution equations*. Comm. Partial Differential Equations, 15 (1990), 737–756]), hanno ottenuto risultati di esistenza e unicità di soluzioni nel caso di una ψ convessa, s.c.i., e per il resto generale, e ϕ convessa ma *indipendente* dalla variabile t .

Infine, ricordiamo che equazioni di evoluzione doppiamente nonlineari del tipo

$$(4) \quad \partial\psi(u'(t)) + \partial\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B', \quad t \in (0, T),$$

con $\psi : B \rightarrow [0, +\infty)$ convesso, s.c.i., positivamente omogeneo di grado 1

(ove il simbolo ∂ denota ancora il sottodifferenziale nel senso dell'analisi convessa, rispetto alla variabile u per il funzionale \mathcal{E}), intervengono nella modellizzazione dei cosiddetti fenomeni *rate-independent* con effetti di isteresi, che si presentano in diverse branche della meccanica dei continui (quali, ad esempio, l'elasto-plasticità, le transizioni di fase solido-solido in leghe a memoria di forma, la meccanica delle fratture, il danneggiamento). In tali contesti applicativi, il funzionale ψ ha il significato di un potenziale di dissipazione, mentre \mathcal{E} è un funzionale dell'energia. La condizione di 1-omogeneità su ψ comporta l'invarianza per riscaldamenti temporali dell'equazione (4) e differenzia sostanzialmente l'analisi della (4) dall'analisi della equazione (1), nel caso si consideri ψ con crescita superlineare all'infinito.

I problemi da me affrontati, nel corso di alcune collaborazioni, relativamente a (varianti di) (1) si possono così schematizzare:

- risultati di esistenza e approssimazione di soluzioni per (2) nel caso di ϕ *non convesso*; esistenza (di una opportuna nozione) di attrattore per tali soluzioni: lavori [5], [8], [15];
- risultati di esistenza per (3) nel caso *quasivariazionale*: lavoro [7];
- esistenza, approssimazione, e unicità per (4) nel caso di un funzionale di dissipazione ψ dipendente anche dalla variabile di stato u , e di un funzionale dell'energia \mathcal{E} convesso in u : lavori [11], [12];
- esistenza e approssimazione di soluzioni per (un'opportuna formulazione del) l'equazione (1) (con ψ a crescita superlineare all'infinito), nel contesto di un generico spazio metrico completo: lavoro [16];

- approssimazione per vanishing viscosity dell'equazione (4) nel contesto di un generico spazio metrico completo: lavoro [20].

Esistenza, approssimazione, e studio dell'attrattore per equazioni di tipo *gradient flow* di funzionali non convessi: lavori [5], [8] e [15], in collaborazione con G. Savaré, U. Stefanelli (IMATI-CNR, Pavia), e A. Segatti (WIAS, Berlino).

Nei lavori [5] e [8], mi sono occupata con G. Savaré di risultati di esistenza per equazioni di tipo gradient flow per funzionali non convessi. Tali risultati hanno un intrinseco interesse analitico, in vista dell'estensione della teoria nel caso convesso. Inoltre, lo studio di questi problemi è stato per noi anche motivato dalle applicazioni ad una classe di modelli per le transizioni di fase, i cosiddetti sistemi di phase field quasistazionari, la cui analisi si rivela particolarmente laboriosa. Si osserva infatti (si veda in particolare [5]), che tali sistemi possono essere riformulati come equazione di gradient flow per opportuni funzionali non convessi, e con una opportuna nozione di sottodifferenziale. Si noti peraltro che nel caso di funzionali non convessi non esiste una nozione "naturale" di sottodifferenziale alla quale fare riferimento. Nella fattispecie, in [5] e [8] abbiamo considerato il problema di Cauchy

$$(5) \quad \begin{cases} u'(t) + \partial_\ell \phi(u(t)) \ni 0 & \text{in } \mathcal{H}, \quad t \in (0, T), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

ove si intende per $\partial_\ell \phi$ il "sottodifferenziale limite" di ϕ , definito dalla formula

$$\xi \in \partial_\ell \phi(v) \quad \text{se} \quad \exists u_n, \xi_n \in \mathcal{H} \quad \text{t.c.} \quad \xi_n \in \partial \phi(u_n), \quad u_n \rightarrow v, \quad \xi_n \rightarrow \xi, \quad \sup_n \phi(u_n) < +\infty.$$

In altri termini, $\partial_\ell \phi$ è (una versione della) la chiusura di $\partial \phi$ (sottodifferenziale di ϕ nel senso dell'analisi convessa), nel senso dei grafi, rispetto alla topologia forte-debole di $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. La dimostrazione del nostro risultato di esistenza per (5) in [8] fa uso di tecniche di discretizzazione in tempo, opportunamente adattate all'ambito non convesso tramite idee delle teorie dei *Movimenti Minimizzanti* e delle *Curve di Massima Pendenza* proposte da E. DE GIORGI. Inoltre, in questo caso le tecniche di compattezza della teoria delle misure di Young hanno giocato un ruolo fondamentale nella dimostrazione del passaggio al limite nello schema di discretizzazione, permettendoci di aggirare le difficoltà dovute alla non convessità di ϕ . Abbiamo così ottenuto teoremi di esistenza per (5) sotto diverse ipotesi. Sulla falsariga dell'*approccio gradient flow* (delineato in [5]) ai sistemi di phase field quasistazionari, abbiamo infine ricavato dai summenzionati risultati per l'equazione astratta (5), risultati di esistenza per una famiglia di problemi quasistazionari generali, costituiti da un sistema ellittico-parabolico.

Recentemente, nel lavoro [15] ho esaminato con U. Stefanelli e A. Segatti lo studio del comportamento per tempi lunghi delle soluzioni di (5): in particolare, ci siamo interessati al problema dell'esistenza dell'attrattore. Si noti che, a causa della non convessità di ϕ , il problema di Cauchy (5) non ammette in generale un'unica soluzione. Pertanto, nello studio della dinamica di (5) per tempi lunghi non ci si può appoggiare a tutte quelle costruzioni di attrattore che partano dal semigruppone delle soluzioni. Di fatto, in [15] abbiamo fatto riferimento alla teoria dei *semiflussi generalizzati* e alla nozione di *attrattore globale*, recentemente introdotta da J. BALL (cf. [Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations, J. Nonlinear Sci. (1997), 475-502]). In questo contesto, abbiamo dimostrato che il semiflusso delle soluzioni di (5) ammette l'attrattore globale; in seguito, sulla base dei risultati di [5] e [8] abbiamo ottenuto dei risultati sul comportamento per tempi lunghi delle soluzioni per una famiglia di problemi quasistazionari.

Esistenza e unicità per problemi quasivariazionali di tipo *sweeping process*: lavoro [7], in collaborazione con U. Stefanelli.

In [7] viene analizzato il problema di Cauchy per l'equazione di evoluzione astratta

$$(6) \quad u'(t) + \partial I_{K(t, u(t))}(u(t)) \ni 0 \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad t \in (0, T),$$

ove $K : (0, T) \times \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ è una multifunzione a valori non vuoti, convessi, e chiusi. Si noti che l'equazione (6) si differenzia dallo *sweeping process* (3) per il suo carattere quasivariazionale, che è dovuto alla dipendenza della multifunzione K dalla variabile u e che rende l'analisi del problema di Cauchy per (6) considerevolmente più difficile rispetto al caso di (3). Di fatto, in letteratura esistono alcuni risultati di esistenza per questo problema di Cauchy, basati su opportune ipotesi di regolarità e compattezza per K , che risultano spesso limitative per le applicazioni (per esempio nel campo della meccanica, dell'economia matematica e dell'ottimizzazione convessa). In [7] sono stati ottenuti risultati di esistenza e unicità per il problema di Cauchy per (6), nel quadro di opportune assunzioni di monotonia, anziché di compattezza, su K . In particolare, viene introdotta una struttura d'ordine su \mathcal{H} , e in questo contesto si riesce a stabilire un risultato di *equivalenza* fra il problema quasivariazionale (6) e un associato problema variazionale. Dalla buona positura di quest'ultimo vengono dedotti i nostri risultati di esistenza e unicità per (6).

Esistenza, approssimazione, e unicità per problemi rate-independent: lavoro [11], in collaborazione con A. Mielke (WIAS, Berlino) e lavoro [12].

In [11] ho ottenuto, in collaborazione con A. Mielke, risultati di esistenza, approssimazione di soluzioni, e unicità per il problema di Cauchy astratto

$$(7) \quad \begin{cases} \partial\psi(u(t), u'(t)) + \partial\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 & \text{in } B', \quad t \in (0, T), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

ove B è uno spazio di Banach riflessivo, il funzionale di dissipazione rate-independent ψ è s.c.i., convesso e 1-positivamente omogeneo nella seconda variabile, mentre il funzionale dell'energia $\mathcal{E} : (0, T) \times B \rightarrow (-\infty, +\infty]$ è liscio in t e convesso rispetto alla variabile u . Si noti che, dato che il funzionale ψ dipende anche dalla variabile di stato u , (7) si configura come una generalizzazione dell'equazione doppiamente nonlineare (1).

L'esistenza di soluzioni per (7) è stata ottenuta in [11] passando al limite in un opportuno schema di discretizzazione in tempo; l'argomento per il passaggio al limite si basa anche su tecniche ispirate dalla teoria delle misure di Young. Mentre in [11] è stato considerato uno schema di discretizzazione in tempo con passo di discretizzazione uniforme, in [12] è stata sviluppata un'analisi analoga nel caso di un particolare tipo di discretizzazione a passo variabile.

Il problema dell'unicità delle soluzioni di (7) (più in generale, della loro dipendenza continua dai dati iniziali), è abbastanza arduo e ha un intrinseco interesse analitico, a causa del carattere quasivariazionale dovuto alla dipendenza di ψ dallo stato u . Tale problema è stato affrontato in [11] nel caso di uno spazio ambiente di Hilbert \mathcal{H} , combinando opportune stime di tipo energia con tecniche raffinate di analisi convessa, nell'ipotesi che il funzionale $\mathcal{E} \in C^2([0, T] \times \mathcal{H}; \mathbb{R})$, e che sia uniformemente convesso rispetto alla variabile u , e sotto ipotesi di regolarità per ψ .

Approssimazione per vanishing viscosity e analisi di problemi rate-independent in spazi metrici: lavori [16] e [20], in collaborazione con A. Mielke e G. Savaré.

In gran parte dei contesti applicativi, in meccanica dei continui, in cui intervengono fenomeni rate-independent, i funzionali energia più significativi non sono né lisci, né convessi rispetto alla

variabile u . Inoltre, lo spazio ambiente più naturale per diversi problemi rate-independent non solo può essere non riflessivo e non godere della proprietà di Radon-Nikodým (per esempio L^1 nella modellizzazione delle leghe a memoria di forma), ma può anche mancare di una naturale struttura lineare (come nel caso di alcuni problemi in meccanica delle fratture).

Queste considerazioni hanno motivato la ricerca di formulazioni generalizzate dell'equazione (4), adattabili a funzionali dell'energia non lisci, e non convessi, e a spazi ambiente del tutto generali, formulazioni che, tuttavia, riescano a descrivere la dinamica del fenomeno rate-independent. A questo scopo, è stato recentemente proposto, in specifici contesti applicativi, il cosiddetto approccio per *vanishing viscosity*, basato, cioè, sull'approssimazione dell'equazione rate-independent (4) con l'equazione doppiamente nonlineare

$$(8) \quad \varepsilon J_{B,B'}(u'(t)) + \partial\psi(u'(t)) + \partial\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B', \quad t \in (0, T),$$

(ove $J_{B,B'} : B \rightarrow B'$ è la mappa di dualità), al tendere del parametro di approssimazione ε a zero. Si noti che l'equazione di evoluzione (8) è sempre della forma (1): in essa entra in gioco il funzionale di dissipazione (con crescita superlineare all'infinito) $\psi_\varepsilon(v) = \varepsilon/2\|v\|_B^2 + \psi(v)$, che tiene conto anche di effetti di viscosità.

In collaborazione con A. Mielke e G. Savaré, ho sviluppato l'approccio per *vanishing viscosity* all'equazione rate-independent (4), nel caso in cui lo spazio ambiente è uno spazio metrico completo (X, d) . Il nostro progetto si è articolato in due passi:

- nel lavoro [16], abbiamo proposto una formulazione per la generica equazione di evoluzione doppiamente nonlineare (1) (e quindi in particolare anche per (8)) nell'ambiente (X, d) , generalizzando la formulazione metrica per l'equazione di tipo gradient flow (5) proposta nella monografia [L. Ambrosio, N Gigli, and G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the Wasserstein spaces of probability measures*, Lecture notes, ETH, Birkhäuser, 2005]. Abbiamo quindi dimostrato risultati di esistenza e approssimazione di soluzioni per (il problema di Cauchy relativo a) tale formulazione, e sviluppato applicazioni a equazioni del tipo (1) in spazi di Banach generali (senza la proprietà di Radon-Nikodým).
- nel lavoro [20], abbiamo sviluppato l'analisi asintotica della formulazione metrica di (8) al tendere del parametro di approssimazione ε a zero. Abbiamo quindi ottenuto una nuova nozione di evoluzione rate-independent in spazi metrici, che, da un lato, si può ambientare in contesti del tutto generali e con funzionali dell'energia non convessi e, d'altro canto, cattura le fondamentali caratteristiche dei fenomeni rate-independent, come dimostra l'analisi di alcuni esempi significativi.

3. PROBLEMI ANALITICI PER MODELLI DI TRANSIZIONE DI FASE

Mi sono anche occupata dell'analisi di alcuni problemi alle derivate parziali legati alla modellistica dei fenomeni di transizione di fase. Quest'ambito di ricerca fornisce un ampio spettro di problemi di matematica applicata: transizioni di fase intervengono infatti in numerosi ambiti applicativi, basti pensare alle transizioni di stato associate a una diffusione termica, oppure alle cosiddette transizioni solido-solido, per esempio da una configurazione cristallina austenitica a una configurazione martensitica (fenomeno che interviene nei cosiddetti materiali a memoria di forma). Possiamo infine ricordare il fenomeno della separazione di fase in una lega, o in una miscela, binaria.

I modelli matematici di transizione di fase da me considerati, pur avendo strutture sostanzialmente diverse l'uno dall'altro, sono peraltro tutti caratterizzati dalla presenza di un *parametro d'ordine* χ , o *phase field*, che indica lo stato in cui si trova il sistema, soggetto a transizione,

rispetto alle due fasi; il significato fisico di χ dipende specificamente dalla transizione considerata. Per esempio, nelle transizioni solido-liquido χ rappresenta la proporzione locale di una delle due fasi, nelle transizioni ferro-paramagnetiche χ è la magnetizzazione, nei modelli di separazione di fase χ è la concentrazione di una delle due sostanze. Per semplificare, nel seguito userò per questi modelli matematici il termine *phase field* (che però non viene propriamente impiegato in relazione ai modelli di separazione di fase).

Nei modelli di phase field da me considerati, il relativo sistema di equazioni alle derivate parziali consiste di fatto di un'unica equazione parabolica del quart'ordine nella χ (l'equazione di Cahn-Hilliard per i fenomeni di separazione di fase) o di un sistema di equazioni paraboliche del second'ordine nelle incognite χ e ϑ (ove ϑ è la temperatura, assoluta o relativa, del sistema). Ho anche considerato modelli di contatto con adesione fra due solidi, che di fatto si configurano come modelli di phase field, pur non descrivendo propriamente una transizione di fase.

In relazione a questi modelli, ho esaminato i problemi di esistenza e unicità delle soluzioni, della loro regolarità e dipendenza continua dai dati; in alcuni casi, ho anche studiato limiti singolari dei suddetti problemi, nonché il loro comportamento per tempi lunghi. In questo contesto, ho utilizzato tecniche variazionali, basate sulle *stime dell'energia* naturalmente legate alla derivazione fisica del modello, e combinato metodi di compattezza con tecniche di monotonia (grazie alla presenza di opportuni operatori massimali monotoni nei singoli sistemi).

Risultati di buona positura e analisi asintotica per sistemi di phase field: lavori [3], [4]; lavoro [9], in collaborazione con F. Luterotti (Università di Brescia) e Olaf Klein (WIAS, Berlino).

Nell'articolo [3], ho considerato il modello di "phase field" proposto da G. CAGINALP [*An analysis of a phase field model of a free boundary*, Arch. Rational Mech. Anal. 92 (1986), 205-245],

$$(9) \quad \varepsilon \vartheta_t + \chi_t - \Delta \vartheta = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

$$(10) \quad \delta \chi_t - \Delta \chi + \chi^3 - \chi = \vartheta \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

per la transizione solido-liquida in un dominio spaziale $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (che rappresenta il sistema fisico soggetto alla transizione), durante l'intervallo temporale $(0, T)$. In questo contesto, ϑ è la temperatura relativa del sistema, f rappresenta un termine di sorgente (per esempio una fonte di calore), ε e δ sono due parametri positivi. Questo sistema è stato ampiamente studiato, e sono ormai ben noti risultati di esistenza, regolarità, unicità ed esistenza di attrattori per le soluzioni del sistema. Ponendo $\varepsilon = \delta = 0$ in (9)-(10) (considerando cioè una situazione quasistazionaria a bassa energia calorica), si ottiene formalmente l'equazione di Cahn-Hilliard per la modellizzazione della separazione di fase,

$$(11) \quad \chi_t - \Delta (-\Delta \chi + \chi^3 - \chi) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T).$$

Per $\varepsilon = 0$ (bassa energia calorica), il sistema (9)-(10) si riduce invece alla cosiddetta equazione di Cahn-Hilliard viscosa

$$(12) \quad \chi_t - \Delta (\delta \chi_t - \Delta \chi + \chi^3 - \chi) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T).$$

In [3], ho sviluppato un'analisi asintotica del phase field tendere a zero del solo ε oppure di entrambi i parametri ε e δ , ottenendo risultati di convergenza delle soluzioni del phase field alle soluzioni di (11) e (12) con tecniche di stime a priori-compattezza.

Nel **lavoro** [4], mi sono invece occupata del modello proposto da O. PENROSE e P.C. FIFE (si veda [*Thermodynamically consistent models of phase field type for the kinetics of phase transitions*,

Physica D 43 (1990), 44-62]), in alternativa a (9)-(10), per la descrizione di una più ampia gamma di transizioni di fase oltre a quella solido-liquida. La variante più usuale di tale modello si presenta nella forma

$$(13) \quad \varepsilon \vartheta_t + \chi_t - \Delta \left(-\frac{1}{\vartheta} \right) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

$$(14) \quad \delta \chi_t - \Delta \chi + \chi^3 - \chi = -\frac{1}{\vartheta} \quad \text{in } \Omega \times (0, T).$$

Si noti che, in questo caso, ϑ è la temperatura assoluta, quindi $\vartheta > 0$. La presenza della nonlinearità $-\frac{1}{\vartheta}$ rende l'analisi di questo sistema più difficoltosa, anche se ormai esiste una consolidata letteratura al riguardo. In [4], ho dapprima ottenuto un risultato di buona positura (esistenza e dipendenza continua dai dati), per il seguente sistema di tipo Penrose-Fife generalizzato

$$(15) \quad \varepsilon \vartheta_t + \chi_t - \Delta u = f, \quad u \in \alpha(\vartheta), \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

$$(16) \quad \delta \chi_t - \Delta \chi + \xi + \sigma'(\chi) = u, \quad \xi \in \beta(\chi), \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

accoppiato a opportune condizioni iniziali e a condizioni al bordo di Neumann omogenee per χ e u . Si noti che il termine di accoppiamento $-\frac{1}{\vartheta}$ nel sistema (13)-(14) viene sostituito da $u \in \alpha(\vartheta)$, con α un generale grafo massimale monotono, mentre l'operatore $\beta : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ è il sottodifferenziale di un funzionale convesso che soddisfi opportune condizioni di crescita e σ' è una funzione lipschitziana; il termine $\beta + \sigma'$ in (16) di fatto generalizza il contributo non lineare $\chi^3 - \chi$ nell'equazione (14). Sempre in [4], ho in seguito sviluppato un'analisi asintotica per il sistema (15)-(16) al tendere a zero dei parametri ε e δ , dimostrando che, anche in questo caso, le soluzioni del phase field di Penrose-Fife generalizzato convergono a soluzioni di un problema ai limiti per l'equazione di Cahn-Hilliard viscosa, e per l'equazione di Cahn-Hilliard, rispettivamente.

Infine, in collaborazione con F. Luterotti e O. Klein ho dimostrato in [9] un risultato di esistenza per il sistema

$$(17) \quad \vartheta_t + \chi_t - \Delta \vartheta = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

$$(18) \quad \varepsilon \chi_t - \eta(\vartheta, \nabla \chi)(\chi_t)^- - \Delta \chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) \ni \vartheta \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

accoppiato a opportune condizioni iniziali e al bordo su ϑ e χ . La funzione $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, +\infty)$ gioca il ruolo di un parametro di rilassamento, che permette di introdurre nel modello effetti di *supercooling* della transizione solido-liquida. Abbiamo dimostrato l'esistenza globale di soluzioni per (17)-(18) con un argomento di punto fisso. Nello sviluppare quest'argomento, abbiamo ottenuto un risultato di esistenza per una classe di equazioni doubly nonlinear astratte, che generalizzano per certi versi (1). Infine, il limite singolare di (17)-(18) al tendere di ε a zero è stato studiato con tecniche di misure di Young.

Buona positura e attrattore per equazioni di Cahn-Hilliard viscosse generalizzate: lavori [6] e [10].

Nel lavoro [6] ho considerato l'equazione di Cahn-Hilliard viscosa generalizzata

$$(19) \quad \chi_t - \Delta (\gamma (\chi_t - \Delta \chi + \chi^3 - \chi)) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

ove γ è una funzione reale strettamente crescente, proposta da M.E. GURTIN (si veda [*Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance*, Physica D 92 (1996), 178-192]) per la descrizione di una più vasta classe di fenomeni di separazione di fase. Più precisamente, ho analizzato due diversi problemi ai limiti per (19), in corrispondenza a due diverse classi

di funzionali γ , ottenendo in entrambi i casi risultati di esistenza e di dipendenza continua dai dati, e, in un caso, anche di regolarità.

Successivamente, ho esaminato in [10] il problema dell'esistenza dell'attrattore per soluzioni deboli di (19). Poiché anche in questo contesto non si ha l'unicità della soluzione, ho fatto riferimento alla summenzionata teoria dei *semiflussi generalizzati* di J. BALL.

Esistenza, unicità e comportamento per tempi lunghi per modelli di contatto fra con adesione fra solidi: lavori [13], [14], e [18], in collaborazione con E. Bonetti (Università di Pavia) e G. Bonfanti (Università di Brescia).

Nel lavoro [14] in collaborazione con E. Bonetti e G. Bonfanti, è stato studiato il problema dell'esistenza di soluzioni per questo sistema

$$(20) \quad -\Delta u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(21) \quad u = 0 \quad \text{in } \Gamma_1, \quad \partial_n(u_t + u) = 0 \quad \text{in } \Gamma_2,$$

$$(22) \quad \partial_n(u_t + u) + \chi u + \partial I_{(-\infty, 0]}(u) \ni 0 \quad \text{in } \Gamma_c,$$

$$(23) \quad \chi_t - \Delta \chi + \partial I_{(-\infty, 0]}(\chi_t) + \partial I_{[0, 1]}(\chi) \ni w - \frac{k}{2}|u|^2 \quad \text{in } \Gamma_c,$$

$$(24) \quad \partial_n \chi = 0 \quad \text{in } \partial \Gamma_c.$$

che modella un fenomeno di contatto con adesione fra un solido (che occupa una porzione di spazio Ω) e un supporto rigido. Il contatto avviene su una porzione Γ_c del bordo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_c$ di Ω , sulla quale è spalmata della colla, soggetta a un fenomeno di danneggiamento irreversibile. La variabile u (che per semplicità scriviamo in forma scalare) denota il vettore dei piccoli spostamenti, mentre il parametro χ misura lo stato dell'adesione fra i due solidi, e quindi è solo definito su Γ_c . Le principali difficoltà analitiche di questo problema sono di fatto dovute all'accoppiamento fra l'equazione per la χ e per la u , che per l'appunto avviene "sul bordo", e alla presenza di tre non-linearità massimali monotone (in particolare, il termine $\partial I_{(-\infty, 0]}(\chi_t)$ rende conto dell'irreversibilità del fenomeno). Impiegando opportune tecniche di compattezza e monotonia, è stato ottenuto un risultato di esistenza globale per (20)-(24), ma non di unicità, a causa della natura doppiamente nonlineare dell'equazione (23) per la χ .

Nel lavoro [13] viene considerato il caso in cui il danneggiamento della colla è reversibile (cioè, senza il termine $\partial I_{(-\infty, 0]}(\chi_t)$ nell'equazione (23) per la χ): in queste condizioni, sono stati ottenuti risultati di buona positura (esistenza e dipendenza continua delle soluzioni dai dati del problema) del relativo problema ai limiti, ed è stata sviluppata un'analisi del comportamento per tempi lunghi delle soluzioni. In particolare, è stato dimostrato che l' ω -limite relativo al sistema considerato (cioè, l'insieme dei punti di accumulazione per $t \rightarrow +\infty$, in opportuni spazi funzionali, delle traiettorie delle soluzioni) è non vuoto e connesso. Inoltre, è stato analizzato il sistema di equazioni *stazionarie* risolte dagli elementi dell' ω -limite.

Più recentemente, nel lavoro [18] ho studiato con E. Bonetti e G. Bonfanti la generalizzazione del modello (20)-(24) al caso *non-isotermo*, nel quale, cioè, il solido e il supporto rigido su cui è presente la sostanza adesiva possono avere temperature diverse. Il corrispondente sistema di equazioni alle derivate parziali accoppia, alle equazioni (20)-(24) per lo spostamento u e per il parametro di danneggiamento della colla χ , due equazioni di bilancio dell'entropia, che descrivono l'evoluzione della temperatura ϑ del solido e della temperatura ϑ_s della superficie di adesione. La scelta delle leggi di bilancio dell'entropia, anziché dell'energia interna, comporta la presenza di non-linearità logaritmiche nelle corrispondenti equazioni di evoluzione per ϑ e ϑ_s . Da un lato, tali non-linearità garantiscono la positività di entrambe le temperature ϑ e ϑ_s , e quindi la consistenza termodinamica del modello. D'altro canto, l'analisi del sistema risulta piuttosto laboriosa, per la natura doppia-

mente nonlineare delle equazioni per ϑ e ϑ_s . Tecniche di compattezza e di monotonia, combinati con opportuni risultati tecnici *ad hoc*, ci hanno permesso di provare un risultato di esistenza globale di soluzioni.

Analisi di modelli di transizione di fase in termo-visco-elasticità: lavori [17] e [19], in collaborazione con E. Rocca (Università di Milano).

Il seguente sistema di PDE (completato da opportune condizioni al bordo del dominio Ω) nelle incognite ϑ (temperatura assoluta del sistema), u (vettore dei piccoli spostamenti, che per il momento trattiamo come scalare) e χ (parametro d'ordine)

$$(25) \quad \vartheta_t + \chi_t \vartheta - \Delta \vartheta = c_1 |\chi_t|^2 + c_2 \chi |\nabla u_t|^2 \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

$$(26) \quad \chi_t - \Delta \chi + W'(\chi) = \vartheta - \vartheta_c + \frac{|\nabla u|^2}{2} \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

$$(27) \quad u_{tt} - \operatorname{div} ((1 - \chi) \nabla u + \chi \nabla u_t) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

(con $c_1, c_2 \geq 0$, e ove W' è una nonlinearity con dominio incluso in $[0, 1]$), è stato recentemente proposto da M. FRÉMOND per modellizzare, in materiali visco-elastici, fenomeni di transizione di fase che siano influenzati dalla copresenza di proprietà viscoso ed elastiche nel sistema considerato. Si noti che almeno uno degli operatori ellittici in (27) degenera al prevalere nel materiale delle proprietà viscoso (cioè per $\chi \nearrow 1$), o delle proprietà elastiche (cioè per $\chi \searrow 0$). Questo, unitamente alla carattere fortemente nonlineare delle equazioni (25)–(26), rende tecnicamente impegnativa la dimostrazione di un risultato di esistenza globale di soluzioni per il problema di Cauchy e ai limiti associato al sistema.

- Nel lavoro [17] è stato considerato il caso, più semplice, in cui i coefficienti c_1 e c_2 sono entrambi nulli. Abbiamo quindi dimostrato
 - nel caso tridimensionale $\Omega \subset \mathbb{R}^3$: un risultato di unicità e di esistenza *locale* di soluzioni per il (problema di Cauchy e ai limiti associato al) sistema (25)–(27);
 - nel caso unidimensionale $\Omega = (0, \ell)$: un risultato di buona positura *globale* per il (problema di Cauchy e ai limiti associato al) sistema (25)–(27);
- Nel lavoro [19], sotto ipotesi più restrittive sulla nonlinearity W' , abbiamo ottenuto la buona positura globale del sistema (25)–(27), con $c_1, c_2 \neq 0$, nel caso unidimensionale. Sempre in tale contesto, ancora nell'ipotesi $c_1 = c_2 = 0$ abbiamo analizzato il comportamento per tempi lunghi delle soluzioni in termini del loro ω -limite.

TESI DI DOTTORATO

Nella mia tesi di dottorato

“Existence and compactness results for evolution equations and applications to phase field models” ho inquadrato i risultati ottenuti nei lavori [1]–[6] e [8] nell’ambito della trattazione analitica dei problemi di transizioni di fase.

PUBBLICAZIONI

- [1] R. ROSSI, *Compactness results for evolution equations*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, **135** (2001), 19–30.
- [2] R. ROSSI, G. SAVARÉ, *Tightness, integral equicontinuity and compactness for evolution problems in Banach spaces*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (5), **2** (2003), no. 2, 395–431.
- [3] R. ROSSI, *Asymptotic analysis of the Caginalp phase-field model for two vanishing time relaxation parameters*, Adv. Math. Sci. Appl., **13** (2003), 249–271.
- [4] R. ROSSI, *Well-posedness and asymptotic analysis for a Penrose-Fife type phase field system*, Math. Methods Appl. Sci., **27** (2004), 1411–1445.
- [5] R. ROSSI, G. SAVARÉ, *Existence and approximation results for gradient flows*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., **15** (2004), 183–196.
- [6] R. ROSSI, *On two classes of generalized viscous Cahn-Hilliard equations*, Commun. Pure Appl. Anal., **4** (2005), 405–430.
- [7] R. ROSSI, U. STEFANELLI, *An order approach to a class of quasivariational sweeping processes*, Adv. Differential Equations, **10** (2005), 527–552.
- [8] R. ROSSI, G. SAVARÉ, *Gradient flows of non convex functionals in Hilbert spaces and applications*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **12** (2006), 564–614.
- [9] O. KLEIN, F. LUTEROTTI, R. ROSSI, *Existence and asymptotic analysis of a phase field model for supercooling*, Quart. Appl. Math., **64** (2006), 291–319.
- [10] R. ROSSI, *Global attractor for the weak solutions of a class of viscous Cahn-Hilliard equations*, pp. 247–268, in: “Dissipative Phase Transitions”, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 71, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.
- [11] A. MIELKE, R. ROSSI, *Existence and uniqueness results for a class of rate-independent hysteresis problems*, Math. Models Methods Appl. Sci., **17** (2007), 81–123.
- [12] R. ROSSI, *Existence and approximation results for general rate-independent problems via a variable time-step discretization scheme*, pp. 369–380, in: “Free boundary problems”, Internat. Ser. Numer. Math., 154, Birkhäuser, Basel, 2007.
- [13] E. BONETTI, G. BONFANTI, R. ROSSI, *Well-posedness and long-time behaviour for a model of contact with adhesion*, Indiana Univ. Math. J., **56** (2007), 2787–2820.
- [14] E. BONETTI, G. BONFANTI, R. ROSSI, *Global existence for a contact problem with adhesion*, Math. Methods Appl. Sci., **31** (2008), 1029–1064.
- [15] R. ROSSI, A. SEGATTI, U. STEFANELLI, *Attractors for gradient flows of non convex functionals and applications*, Arch. Ration. Mech. Anal., **187** (2008), 91–135.
- [16] R. ROSSI, A. MIELKE, G. SAVARÉ, *A metric approach to a class of doubly nonlinear evolution equations and applications*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), **7** (2008), 97–169.

- [17] E. ROCCA, R. ROSSI, *Analysis of a nonlinear degenerating PDE system for phase transitions in thermoviscoelastic materials*, J. Differential Equations, **245** (2008), 3327–3375.
- [18] E. BONETTI, G. BONFANTI, R. ROSSI, *Thermal effects in adhesive contact: modelling and analysis*, Nonlinearity, **22** (2009), 2697–2731.
- [19] E. ROCCA, R. ROSSI, *Global existence of strong solutions to the one-dimensional full model for phase transitions in thermoviscoelastic materials*, Appl. Math., **53** (2008), 485–520.
- [20] A. MIELKE, R. ROSSI, G. SAVARÉ, *Modeling solutions with jumps for rate-independent systems on metric spaces*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **25** (2009), 585–615.
- [21] E. BONETTI, G. BONFANTI, R. ROSSI, *Long-time behaviour of a thermomechanical model for adhesive contact*, Quaderno n. 14/2009 del Seminario Matematico di Brescia, 2009, p. 1–37. In corso di stampa su Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.
- [22] R. ROSSI, A. SEGATTI, U. STEFANELLI, *Global attractors for gradient flows in metric spaces*, Quaderno n. 19/2009 del Seminario Matematico di Brescia, 2009, p. 1–48. In corso di stampa su J. Math. Pures Appl. (9).
- [23] A. MIELKE, R. ROSSI, G. SAVARÉ, *BV solutions and viscosity approximations of rate-independent systems*, Quaderno n. 36/2009 del Seminario Matematico di Brescia, 2009, p. 1–38. In corso di stampa su ESAIM Control Optim. Calc. Var.
- [24] M. GRASELLI, A. MIRANVILLE, R. ROSSI, G. SCHIMPERNA, *Analysis of the Cahn-Hilliard equation with a chemical potential dependent mobility*, Quaderno n. 02/2010 del Seminario Matematico di Brescia, 2010, p. 1–32. In corso di stampa su Comm. Partial Differential Equations.
- [25] R. ROSSI, T. ROUBÍČEK, *Thermodynamics and analysis of rate-independent adhesive contact at small strains*, Quaderno n. 07/2010 del Seminario Matematico di Brescia, 2010, p. 1–35.

Data 07/10/2010.

In fede,