

XVII CONGRESSO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RISULTATI DI ESISTENZA PER MODELLI  
DI CAMPO DI FASE QUASISTAZIONARI E  
GRADIENT FLOWS NON CONVESSI

RICCARDA ROSSI

in collaborazione con GIUSEPPE SAVARÉ

Dipartimento di Matematica “F.Casorati”,  
Università di Pavia.

[riccarda@dimat.unipv.it](mailto:riccarda@dimat.unipv.it)

# IL MODELLO DI PHASE FIELD DI CAGINALP

per le transizioni di fase solido-liquide

$$\begin{aligned}\partial_t(\vartheta + \chi) - \Delta\vartheta &= f \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T), \\ \eta\partial_t\chi - \Delta\chi + \mathcal{W}'(\chi) &= \vartheta \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T),\end{aligned}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \leq 3$ , è un dominio limitato,
- $\vartheta$  è la temperatura relativa del sistema,
- $\chi$  è il *parametro d'ordine* (proporzione locale fra le due fasi),
- $\mathcal{W}$  la funzione *potenziale a doppio pozzo*,  $\mathcal{W}(\chi) = \frac{1}{4}(\chi^2 - 1)^2$ .

## IL MODELLO DI PHASE FIELD QUASISTAZIONARIO

- Vasta letteratura per il phase field di Caginalp: risultati di esistenza, unicità, comportamento per tempi lunghi.
- Pochi risultati per il phase field quasistazionario:

$$\begin{aligned}\partial_t(\vartheta + \chi) - \Delta\vartheta &= f \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T), \\ -\Delta\chi + \mathcal{W}'(\chi) &= \vartheta \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T),\end{aligned}$$

- [PLOTNIKOV-STAROVOITOV'93]: Esistenza con condizioni al contorno omogenee di Neumann per  $\chi$ , di Dirichlet per  $\vartheta$ .
- [SCHÄTZLE2000]: Esistenza con condizioni al contorno omogenee di Neumann per  $\chi$  e per  $\vartheta$ .

## DIFFICOLTÀ MATEMATICHE

Il modello di phase-field quasistazionario si deriva *formalmente* dal modello di phase-field standard riscaldando la velocità di fase  $\partial_t \chi$  con un parametro  $\eta$

$$\begin{aligned}\partial_t(\vartheta + \chi) - \Delta \vartheta &= f \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T), \\ \eta \partial_t \chi - \varepsilon \Delta \chi + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{W}'(\chi) &= \vartheta \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T),\end{aligned}$$

e considerando il limite per  $\eta \downarrow 0$ .

L'assenza del termine  $\partial_t \chi \implies$  **scarse** stime di **compattezza** per  $\chi$

- SCHÄTZLE: esistenza con un argomento *ad hoc*, basato su un funzionale di Lyapunov e raffinati risultati di analisi spettrale, **difficilmente adattabile ad altri casi!**

## IL CASO O.D.E.

- Riformuliamo le equazioni in termini dell' **energia interna**  $e$  del sistema

$$e := \vartheta + \chi$$

- Consideriamo l' **equazione differenziale ordinaria** corrispondente al sistema di phase field quasistazionario (con termine di sorgente nullo)

$$\begin{cases} \partial_t e - \Delta(e - \chi) = 0, \\ -\Delta\chi + \mathcal{W}'(\chi) + \chi = e, \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} e'(t) + (e(t) - \chi(t)) = 0 \\ \mathcal{W}'(\chi(t)) + \chi(t) = e(t) \end{cases}$$

## IL CASO O.D.E.

- Consideriamo per esempio

$$\mathcal{W}'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & x < -\frac{1}{2}, \\ -2x & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 2(x-1) & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \mathcal{W}(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < -\frac{1}{2}, \\ -x^2 + \frac{1}{2} & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ (x-1)^2 & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- L'equazione per il parametro d'ordine è

$$\mathcal{W}'(\chi(t)) + \chi(t) = e(t).$$

- **Nota:** la funzione  $x \mapsto \mathcal{W}'(x) + x$  **non è monotona!**

## IL CASO O.D.E.

L'inversa di  $x \mapsto \mathcal{W}'(x) + x$  ( $\varepsilon = 1$ ) è la funzione **multivoca**  $g$

$$\mathcal{W}'(\chi) + \chi = e \quad \Leftrightarrow \quad \chi \in g(e)$$

$$g = (\mathcal{W}' + I)^{-1} \quad e \quad e \mapsto e - g(e).$$

- Sostituendo la relazione  $\chi \in g(e)$  nel sistema di O.D.E., si ottiene l'inclusione differenziale

$$e'(t) + e(t) - g(e(t)) \ni 0$$

che è **mal posta!!**

# UN PRINCIPIO DI SELEZIONE VARIAZIONALE

$$\mathcal{W}'(\chi) + \chi = e$$

è l'equazione di Eulero per il principio di **minimizzazione**

$$\chi \text{ minimizza } \Phi(e, \cdot) := \left( \frac{1}{2} |\cdot - e|^2 + \mathcal{W}(\cdot) \right)$$

Consideriamo allora il sistema

$$\begin{cases} e'(t) + (e(t) - \chi(t)) = 0, \\ \Phi(e(t), \chi(t)) \leq \Phi(e(t), v) \quad \forall v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

## UN PRINCIPIO DI SELEZIONE VARIAZIONALE

- Introduciamo

$$h(e) := \operatorname{argmin}_v \Phi(e, v) = \operatorname{argmin}_v \left( \frac{1}{2}|v - e|^2 + \mathcal{W}(v) \right)$$

- Riformuliamo il sistema come

$$\begin{cases} e'(t) + (e(t) - \chi(t)) = 0, \\ \chi(t) \in h(e(t)), \end{cases}$$

da cui l'inclusione differenziale

$$e'(t) + e(t) - h(e(t)) \ni 0.$$

## UN PRINCIPIO DI SELEZIONE VARIAZIONALE

- Confrontiamo  $g = (\mathcal{W}' + I)^{-1}$

$$e \quad h(e) = \operatorname{argmin}_v \Phi(e, v)$$

- Il principio di **minimizzazione seleziona** le branche di  $g$ ; l'equazione  $\chi \in h(e)$  è **“migliore”** di  $\chi \in g(e)$ !!

## UN PRINCIPIO DI SELEZIONE VARIAZIONALE

- Consideriamo la funzione

$$\phi(e) := \min_v \left( \frac{1}{2}|v - e|^2 + \mathcal{W}(v) \right) = \frac{1}{2}|e|^2 - \sup_v \left( ev - \frac{1}{2}|v|^2 - \mathcal{W}(v) \right)$$

e la sua derivata  $D\phi$ , definita per  $e \neq 0$ :

$\phi$

$e$

$D\phi$ .

## UN'INTERPRETAZIONE COME *gradient flow*

- La mappa  $e \mapsto e - h(e)$  è la **chiusura** nel senso dei grafi  $\overline{D\phi}$  di  $D\phi$  (ma non la convessificazione!!! )

- Quindi l'inclusione differenziale

$$e'(t) + e(t) - h(e(t)) \ni 0,$$

può essere interpretata come l'equazione di **gradient flow**

$$e'(t) + \overline{D\phi}(e(t)) \ni 0.$$

## LA NUOVA STRATEGIA

Sostituendo la relazione **non monotona**

$$\mathcal{W}'(\chi) + \chi = e$$

con il **principio di selezione variazionale**

$$\chi \in h(e) = \operatorname{argmin}_v \left\{ \frac{1}{2} |v - e|^2 + \mathcal{W}(v) \right\},$$

abbiamo ottenuto l'inclusione differenziale

$$e'(t) + e(t) - h(e(t)) \ni 0$$

- che **è migliore** della precedente,
- che ha la **struttura** di **un'equazione di gradient flow** per un funzionale  $\phi$  *non convesso*, neppure perturbazione regolare di un convesso!

## LA NUOVA STRATEGIA

$$\begin{aligned}\partial_t e - \Delta(e - \chi) &= 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T), \\ -\Delta\chi + \mathcal{W}'(\chi) + \chi - e &= 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T).\end{aligned}$$

- La seconda è l'eq. di Eulero per il principio di minimizzazione

$$\chi \text{ minimizza } \Phi(e, v) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2}|v - e|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \mathcal{W}(v) \right) dx$$

al variare di  $v \in H^1(\Omega)$ .

- Come nel caso O.D.E., consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \partial_t e - \Delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e}\right) = 0 & \text{a.e. in } \Omega \times (0, T), \\ \Phi(e, \chi) \leq \Phi(e, v) & \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

## LA NUOVA STRATEGIA

- **Invertiamo** l'operatore di Laplace (per es., con cond. Dir. omog. su  $\frac{\partial \Phi}{\partial e}$ ):

$$\begin{cases} (-\Delta)^{-1} \partial_t e + \frac{\partial \Phi}{\partial e} = 0 \\ \Phi(e, \chi) \leq \Phi(e, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

- **Come nel caso O.D.E., introduciamo** il funzionale

$$\phi(e) := \min_{v \in H^1(\Omega)} \Phi(e, v) = \min_{v \in H^1(\Omega)} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |v - e|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \mathcal{W}(v) \right) dx.$$

- **Interpretiamo** il sistema come **l'equazione di gradient flow generalizzata**

$$e'(t) + \partial \phi(e(t)) \ni 0$$

per il funzionale  $\phi$  nello spazio di Hilbert  $H^{-1}(\Omega)$ .

## UNA NUOVA STRATEGIA

- Notiamo che il funzionale  $\phi$

$$\phi(e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |e|^2 dx - \sup_{v \in H^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \left( ev - \frac{1}{2}|v|^2 - \frac{\varepsilon}{2}|\nabla v|^2 - \mathcal{W}(v) \right) dx \right\}$$

*non è convesso* (è dato dalla differenza di due funzionali convessi)

Che cosa è allora  $\partial\phi$ ?



Necessità di una *generalizzazione* della  
della nozione classica di sottodifferenziale  
per funzionali convessi!

# UNA NOZIONE DI SOTTODIFFERENZIALE PER IL CASO NON CONVESSO

- $\mathcal{H}$  spazio di Hilbert, •  $\phi : D(\phi) \subset \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  è un funzionale **proprio e s.c.i.**
- Consideriamo il sottodifferenziale di Fréchet  $D_F\phi$  di  $\phi$ :

$$\xi \in D_F\phi(e) \Leftrightarrow \liminf_{w \rightarrow e} \frac{\phi(w) - \phi(e) - \langle \xi, w - e \rangle}{\|w - e\|_{\mathcal{H}}} \geq 0$$

- Quando  $\phi$  è convesso,  $D_F\phi$  si riduce al sottodifferenziale dell'analisi convessa : la disuguaglianza **locale** diventa **globale**.
- **Sottodifferenziale Limite**  $\partial\phi$  Introduciamo la **chiusura forte-debole**  $\partial\phi$  di  $D_F\phi$  nel senso dei grafi:

$$\xi \in \partial\phi(v) \Leftrightarrow \exists \xi_n \in D_F\phi(v_n) : v_n \rightarrow v, \xi_n \rightharpoonup \xi.$$

- Considereremo l'equazione di gradient flow per  $\partial\phi$ .

# IL PROBLEMA DI CAUCHY PER UNA EQUAZIONE DI GRADIENT FLOW IN UNO SPAZIO DI HILBERT

- $\mathcal{H}$  spazio di Hilbert,
- $\phi : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  funzionale **semicontinuo inferiormente**, con dominio  $D(\phi)$  e **sottodifferenziale limite**  $\partial\phi$ ,
- $u_0 \in D(\phi)$  dato iniziale

Trova una funzione

$$u : (0, T) \rightarrow \mathcal{H}$$

che soddisfi

$$\begin{cases} u'(t) + \partial\phi(u(t)) \ni 0 & \text{in } (0, T), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

# GRADIENT FLOWS IN SPAZI DI HILBERT: IL CASO CONVESSO

Se  $\phi$  è *convesso*,  $\partial\phi$  è il sottodifferenziale dell'*analisi convessa*

$$\xi \in \partial\phi(u) \quad \text{iff} \quad \phi(w) - \phi(u) \geq \langle \xi, w - u \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}.$$

- $\partial\phi(u)$  è **convesso** e vale la **chain rule**

$$\left. \begin{array}{l} u \in H^1(0, T; \mathcal{H}), \quad \xi \in L^2(0, T; \mathcal{H}) \\ \xi(t) \in \nabla\phi(u(t)) \text{ per q.o. } t \in (0, T) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\phi(u(t)) = \langle \xi(t), u'(t) \rangle$$

e quindi **l'identità dell'energia** per la soluzione  $u$  dell'equazione di gradient flow

$$\phi(u(T)) - \phi(u_0) = - \int_0^T \|u'(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt.$$

- **Risultati di esistenza e approssimazione:** [Kōmura'67, Crandall-Pazy'69, Brézis'73].

## IL CASO CONVESSO: APPROSSIMAZIONE ED ESISTENZA DI SOLUZIONI.

- **Schema di approssimazione di Eulero implicito.** Si fissa un passo temporale  $\tau > 0$  e una partizione  $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_N = T$  di  $(0, T)$ . Si risolve ricorsivamente l'equazione discreta

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} + \nabla\phi(U^n) \ni 0 \quad n = 1, \dots, N, \quad \text{con } U^0 = u_0.$$

Sia  $\hat{U}_\tau(t)$  l'interpolata lineare a tratti delle soluzioni  $\{U^n\}$ .

- **Stime a priori.** Dalla disuguaglianza dell'energia discreta  $\implies$  stime a priori e compattezza per la successione  $\{\hat{U}_\tau(t)\}$ .
  - **Passaggio al limite.** Grazie alla chiusura forte-debole di  $\nabla\phi$ , si passa al limite nell'equazione discreta: il limite uniforme  $u$  di  $\{\hat{U}_\tau(t)\}$  risolve l'equazione di gradient flow.
- Vedi: [Kōmura'67, Crandall-Pazy'69, Brézis'73].

## TEOREMA DI ESISTENZA

Sia  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  proprio, s.c.i. e coercivo .

Supponiamo che  $\partial\phi$  soddisfi la **chain rule** :

$$\left. \begin{array}{l} v \in H^1(0, T; \mathcal{H}), \\ \xi \in L^2(0, T; \mathcal{H}) \\ \xi(t) \in \partial\phi(v(t)) \text{ a.e. in } (0, T) \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(v(t)) - \phi(v(s)) = \int_s^t \langle \xi(r), v'(r) \rangle dr$$

- Allora il problema di Cauchy

$$u'(t) + \partial\phi(u(t)) \ni 0 \quad \text{per q.o. } t \in (0, T), \quad u(0) = u_0$$

ammette una soluzione  $u \in H^1(0, T; \mathcal{H})$  t.c. la funzione  $t \rightarrow \phi(u(t))$  è decrescente e vale **l'identità dell'energia**

$$\phi(u(t)) - \phi(u(s)) = - \int_s^t \|u'(r)\|_{\mathcal{H}}^2 dr \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

## SCHEMA DELLA DIMOSTRAZIONE

- **Approssimazione.** Risolviamo ricorsivamente l'equazione discreta

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} + D_F\phi(U^n) \ni 0 \quad n = 1, \dots, N.$$

Consideriamo l'interpolata lineare a tratti  $\hat{U}_\tau$  delle soluzioni discrete  $U^n$ , e l'interpolata **variazionale**  $\tilde{U}_\tau$

$$\tilde{U}_\tau(t) \in \min_{v \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{\|v - U^{n-1}\|_{\mathcal{H}}^2}{2(t - (n-1)\tau)} + \phi(v) \right\},$$

introdotta da E. DE GIORGI nel quadro della teoria dei ***Movimenti Minimizzanti***.

## SCHEMA DELLA DIMOSTRAZIONE

- **Stime a priori.** Vale una versione della disuguaglianza dell'energia per  $\tilde{U}_\tau$ :

$$\frac{1}{2} \int_0^t \|\hat{U}'_\tau(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\partial\phi(\tilde{U}_\tau(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds + \phi(\tilde{U}_\tau(t)) \leq \phi(u_0).$$

$\Rightarrow$  Si ricavano stime a priori e proprietà di compattezza per le soluzioni approssimate  $\{\hat{U}_\tau\}$  e  $\{\tilde{U}_\tau\}$ , che hanno un limite  $u$  nella topologia debole.

- **Passaggio al limite.** Grazie al noto **risultato di compattezza delle misure di Young**, passiamo al limite nella disuguaglianza dell'energia approssimata. Usando la **chain rule**, deduciamo dalla disuguaglianza dell'energia limite che  $u$  risolve l'equazione di gradient flow e soddisfa l'identità dell'energia.

## APPLICAZIONE AL PHASE FIELD QUASISTAZIONARIO

Sia  $F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale coercivo, debolmente s.c.i..

(per es.,  $F(\chi) := \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathcal{W}(\chi) + \varepsilon |\nabla \chi|^2 dx$ ).

Sia  $\phi : \mathcal{H} = H^{-1}(\Omega) \rightarrow (-\infty, +\infty]$

$$\phi(e) := \min_{\chi} \Phi(e, \chi) = \min_{\chi} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |e - \chi|^2 dx + F(\chi) \right\}, \quad e \in H^{-1}(\Omega).$$

Allora per ogni  $e_0 \in D(\phi)$  esiste una coppia  $(e, \chi)$  t.c.

$e, \chi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $e - \chi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,  $\partial_t e \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ,

che risolve il phase field quasistazionario

$$\begin{cases} \partial_t e - \Delta(e - \chi) = 0 \\ \Phi(e, \chi) \leq \Phi(e, v) \quad \text{for every } v \in H^1(\Omega) \\ e(0) = e_0. \end{cases}$$