

## Esercizi su convergenze forti e deboli in spazi $L^p$

**Esercizio 1.** Si consideri il seguente insieme

$$E = \{f \in L^3(0,1) : \cos(x) \leq f(x) \leq e^x \text{ per q.o. } x \in (0,1)\}.$$

- Dimostrare che  $E$  è chiuso rispetto alla topologia debole di  $L^3(0,1)$ .  
*Suggerimento: dimostrare che  $E$  è convesso e chiuso rispetto alla topologia forte di  $L^3(0,1)$ ;*
- dimostrare che  $E$  è limitato in  $L^3(0,1)$ ;
- dedurre che

$$\forall g \in L^3(0,1) \exists f \in E : \|g - f\|_{L^3(0,1)} = \min_{h \in E} \|g - h\|_{L^3(0,1)}.$$

**Esercizio 2.** Si consideri la successione di funzioni

$$u_n(x) = \chi_{(-1/n, 1/n)}(x) e^{-x^2} \quad x \in (-1, 1),$$

ove si ricordi la notazione  $\chi_A$  per la funzione caratteristica di un insieme  $A \subset \mathbb{R}^N$ :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

1. Dimostrare che, per  $n \rightarrow \infty$ ,

$$u_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{per q.o. } x \in (-1, 1).$$

2. Dimostrare che

$$u_n \rightarrow 0 \quad \text{in } L^p(-1, 1) \text{ per ogni } 1 \leq p < \infty.$$

3. Osservare che  $\{u_n\}$  non converge a 0 in  $L^\infty(-1, 1)$ : calcolare

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |u_n(x)| = \dots$$

**Esercizio 3.** Si consideri la successione di funzioni

$$u_n(x) = \cosh(x) \exp\left(\frac{x}{n}\right) \quad x \in (0, 1).$$

Dimostrare che, per  $n \rightarrow \infty$ ,

$$u_n(x) \rightarrow \cosh(x) \quad \text{in } L^p(0, 1) \text{ per ogni } 1 \leq p \leq \infty.$$

**Esercizio 4.** Si consideri la successione di funzioni

$$u_n(x) = \exp(-x^2 n^3) \quad x \in (1, +\infty).$$

Dimostrare che, per  $n \rightarrow \infty$ ,

$$u_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{in } L^p(1, +\infty) \text{ per ogni } 1 \leq p \leq \infty.$$

**Esercizio 5.** Sia  $\{u_n\}$  una successione in  $L^2(1, +\infty)$  tale che

$$\exists f \in L^2(1, +\infty) : |u_n(x)| \leq f(x) \quad \text{per q.o. } x \in (1, +\infty).$$

Dimostrare che esistono una sottosuccessione  $\{u_{n_k}\}$  di  $\{u_n\}$  e una funzione  $u \in L^2(1, +\infty)$  tali che, per  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(1, +\infty).$$

Dedurre che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} u_{n_k}(x) \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} u(x) \frac{1}{x} dx.$$

*Suggerimento: osservare che la funzione  $\frac{1}{x}$  appartiene a  $L^2(1, +\infty)$ , cioè*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx < +\infty.$$