Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 1

Programma

Scopo del corso: studiare le proprietà degli **spazi di funzioni**, che sono degli *spazi vettoriali di dimensione infinita.*

1. Richiami sugli spazi vettoriali;
2. esempi di sp. vett. di dimensione finita & infinita
3. proprietà *topologiche* degli sp. vett., **valide in dimensione finita e NON in dimensione infinita**
4. motivazioni per l'analisi funzionale
5. spazi topologici
6. spazi metrici

Definizione di spazio vettoriale

Sia V un insieme (non vuoto). Diciamo che V è uno spazio vettoriale (sul campo $\mathbb{R}$) se su V sono definite due operazioni:

somma: $+ : V \times V \to V$

$$\forall (v, w) \in V \times V \quad (v, w) \mapsto v + w$$

prodotto per uno scalare: $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$$\forall (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V \quad (\lambda, w) \mapsto \lambda \cdot v$$

che godono delle seguenti proprietà:

1. $\forall\, u, v, w \in V \quad (u + v) + w = u + (v + w)$
2. $\exists!\, 0 \in V\ \forall\, v \in V : \quad 0 + v = v + 0 = v$
3. $\forall\, v \in V\ \exists!\, w \in V : \quad v + w = w + v = 0$
4. $\forall\, u, v \in V \quad u + v = v + u$
5. $\forall\, u, v \in V,\ \forall\, \lambda, k \in \mathbb{R}$
$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \\ (\lambda + k)u = \lambda u + ku$$
6. $\forall\, \lambda, k \in \mathbb{R},\ \forall\, v \in V \quad (\lambda k) \cdot v = \lambda \cdot (kv)$
7. $\forall\, v \in V \quad 1 \cdot v = v$

Applicazioni lineari (I)

Definizione

Siano V, W due sp. vettoriali. Un'applicazione $L : V \to W$ si dice *lineare* se

$$\forall\, v,\, w \in V, \quad \forall\, \lambda,\, k \in \mathbb{R} : \qquad L(\lambda u + kv) = \lambda L(u) + kL(v).$$

- Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora

$$L(0_V) = 0_W$$

Applicazioni lineari (II)

- Sia V uno sp. vettoriale e $L : V \to R$ un'applicazione (lineare): per L useremo il termine *funzionale* (lineare).

- Siano V, W due sp. vettoriali. Un'applicazione lineare $L : V \to W$ si dice *isomorfismo* se L è **invertibile**: allora gli spazi V e W si dicono *isomorfi*.

Dimensione di uno spazio vettoriale (I)

Definizione

Sia V uno sp. vett. Diciamo che V ha *dimensione finita* n (scrivendo $\dim(V) = n$), se

V ha una *base finita* di n elementi $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

cioè

- i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ sono *linearmente indipendenti*
- la n-upla $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ costituisce un *sistema di generatori* per V

Dimensione di uno spazio vettoriale (II)

• La nozione di dimensione finita (uguale a n) è *ben definita*: se V possiede due basi (=sistemi di generatori linearmente indipendenti)

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \quad \text{e} \quad \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

allora $n = m$.

• Sia V uno sp. vett. Diciamo che V ha *dimensione finita* se non ammette alcuna base finita, e scriviamo $\dim(V) = \infty$.

Esempi (I)

Sia V uno sp. vett. di dimensione finita $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\boxed{V \text{ è isomorfo a } \mathbb{R}^n}$$

Esempi (II)

Consideriamo l'insieme

$$\ell^1 := \{ \text{ successioni } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \}.$$

- ℓ^1 è uno sp. vett. con le operazioni:

somma:

$$\forall \{a_n\}_n, \{b_n\}_n \in \ell^1, \quad \{a_n\}_n + \{b_n\}_n := \{a_n + b_n\}_n$$

prodotto per uno scalare:

$$\forall \{a_n\}_n \in \ell^1, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot \{a_n\}_n := \{\lambda a_n\}_n.$$

ℓ^1 ha dimensione infinita

In ℓ^1 esistono *infiniti* vettori *linearmente indipendenti*: sono le successioni

$$
\begin{array}{l}
e_1 = \{1, 0, 0, 0, \ldots\}, \\
e_2 = \{0, 1, 0, 0, \ldots\}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_n = \{0, 0, 0, 0, n, \ldots\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Esempi (III)

Consideriamo l'insieme di *funzioni*

$$\mathrm{C}^0([0,2\pi]) := \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ è continua su } [0,2\pi]\}$$

- $\mathrm{C}^0([0,2\pi])$ è uno sp. vett. con le operazioni:

  somma:

$$\forall\, f,\, g \in \mathrm{C}^0([0,2\pi]), \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x),\ x \in [0,2\pi]$$

prodotto per uno scalare:

$$\forall\, f \in \mathrm{C}^0([0,2\pi]),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x),\ x \in [0,2\pi].$$

- $\mathrm{C}^0([0,2\pi])$ ha *dimensione infinita*: le funzioni

$$1,\ \sin(x),\ \cos(x),\ \sin(2x),\ \cos(2x),\ \ldots,\ \sin(nx),\ \cos(nx),\ \ldots$$

costituiscono un sistema di *infiniti* vettori *linearmente indipendenti* in $\mathrm{C}^0([0,2\pi])$.

Ricapitoliamo

- V con $\dim(V) = \mathbb{R}^n$
- ℓ^1
- $\mathrm{C}^0([0, 2\pi])$

Motivazioni per la topologia e l'analisi funzionale

♣ Alcune proprietà degli sp. vett. di dimensione finita, che *non valgono* in sp. vett. di *dimensione infinita*:

- **continuità di funzionali lineari**
- **proprietà di "compattezza"**

Continuità di funzionali lineari (I)

Siano V uno sp. vett. con $\dim(V) = n$ e $L : V \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare. Allora L è continuo su V.

Continuità di funzionali lineari (II)

Dimostriamo che $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare è continuo in ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

• Se V ha *dimensione infinita* e $L : V \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare, è in generale falso che L sia continuo.

Proprietà di “compattezza”

Siano V uno sp. vett. con $\dim(V) = n$. Allora ogni successione limitata di V ammette una sottosuccessione convergente.

Problemi di fondo (I)

- Che cosa significa che un funzionale (definito su uno spazio di dimensione infinita) è continuo??
- Che cosa significa che una successione (in uno spazio di dimensione infinita) è convergente?

Problemi di fondo (II)

- nozioni di convergenza in spazi funzionali

- la nozione di continuità di applicazioni è strettamente legata alla nozione di convergenza di succcessioni

Discussione euristica sulla nozione di continuità

Panoramica

1. concetto di spazio topologico:

   $$\boxed{\text{insieme dotato di una topologia} = \text{sistema di } \textit{intorni}}$$

2. esempi
3. spazi metrici
4. **spazi normati**

Definizione di spazio topologico

Sia X un insieme (non vuoto).

- Chiamiamo *spazio topologico* una coppia $(X, \mathcal{I})$, con

$$\mathcal{I} : X \rightrightarrows 2^X$$
$$\forall x \in X \quad x \mapsto \mathcal{I}(x) = \text{famiglia di sottoinsiemi } I \text{ di } X$$

in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. $\forall x \in X$, $\forall I \in \mathcal{I}(x)$ si ha $x \in I$
2. $\forall x \in X$, $\forall I \in \mathcal{I}(x)$ e $\forall\, Y \subset X$ con $Y \supset I$, si ha $Y \in \mathcal{I}(x)$
3. $\forall x \in X$, $\forall I, I' \in \mathcal{I}(x)$ si ha $I \cap I' \in \mathcal{I}(x)$
4. $\forall x \in X$, $\forall I \in \mathcal{I}(x)$ $\exists I_0 \in \mathcal{I}(x)$ tale che $I_0 \subset I$ e $I_0 \in \mathcal{I}(y)$ per ogni $y \in I_0$.

Non unicità della topologia

Su X insieme non vuoto è in generale possibile assegnare almeno due diverse topologie.

La topologia banale

La topologia discreta

Topologie su $\mathbb{R}^n$

- La topologia banale
- La topologia discreta
- La topologia *euclidea*

Confronto fra topologie

Sia X un insieme (non vuoto) dotato di due topologie $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}''$. Diciamo che $\mathcal{T}'$ è *meno fine* di $\mathcal{T}''$ (o $\mathcal{T}''$ è *più fine* di $\mathcal{T}'$), se

Spazi metrici

Definizione

Sia X un insieme (non vuoto): chiamiamo *metrica* (o *distanza*) su X una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti condizioni

$$
\begin{aligned}
& d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,\, y \in X \\
& d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y \quad \forall x,\, y \in X \\
& d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,\, y \in X \\
& d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,\, y,\, z \in X
\end{aligned}
$$

Dati $x,\, y \in X$, chiamiamo *distanza* di x da y il numero $d(x,y)$, e *spazio metrico* la coppia (X,d).

Osservazioni

-
-
-

Spazi topologici metrizzabili

• Sia X un insieme non vuoto. In generale su X è possibile definire diverse metriche.

Non sempre *metriche diverse* danno luogo a *topologie diverse*.

Definizione

Sia $X \neq \emptyset$ dotato di due metriche d_1 e d_2. Diciamo che d_1 e d_2 sono *topologicamente equivalenti* se esse inducono su X la stessa topologia.

Metriche topologicamente equivalenti

Teorema

Sia $X \neq \emptyset$ dotato di due metriche d_1 e d_2. Si ha che d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti *se e solo se* per ogni $x \in X$ vale che

$$\begin{aligned} &\forall\, r_1 > 0 \quad \exists\, r_2 > 0 : \quad B_{r_2}^{d_2}(x) \subset B_{r_1}^{d_1}(x), \\ &\forall\, r_2 > 0 \quad \exists\, r_1 > 0 : \quad B_{r_1}^{d_1}(x) \subset B_{r_2}^{d_2}(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Osservazione: condizione sufficiente affinché valga (1) è che

$$\exists\, C_1,\ C_2 > 0\ \forall\, x,\ y \in X \ : \qquad d_1(x,y) \leq C_1 d_2(x,y), \quad d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y)$$

cioè le metriche d_1 e d_2 sono *equivalenti*.

Esempio

Sia $X \neq \emptyset$. Allora la funzione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ data da

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y, \end{cases}$$

- è una distanza su X
- induce la topologia discreta su X

Topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ (I)

- La topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ è indotta dalla *metrica euclidea*

$$d_2(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$$

- Su $\mathbb{R}^n$ sono definite le *infinite* metriche d_p, con $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$

$$d_p(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

$$d_\infty(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) := \max\{|x_i - y_i| \ : \ i = 1, \ldots, n\} \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{se } p = \infty.$$

Topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ (II)

Le metriche d_p sono *tutte topologicamente equivalenti*, e quindi inducono *tutte* la topologia euclidea.