Dispense di
Matematica–Analisi Matematica

Riccarda Rossi

Corso di Laurea in Disegno Industriale

Università degli Studi di Brescia

Anno Accademico 2009/2010

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Capitolo 2

Prime proprietà delle funzioni

Capitolo 3

Limiti

3.1 Introduzione al concetto di limite

Per introdurre la nozione di limite, iniziamo da due semplici esempi.

Esempio 3.1.1.

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

   Ci poniamo il problema di analizzare il comportamento di f "vicino" al punto $x_0 = 1$, ove f non è definita. Ora osserviamo che

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1 \qquad \forall\, x \in D_f\,,$$

   quindi il grafico di f è dato dalla retta $y = x + 1$, privata del punto di coordinate $(1, 2)$ (che corrisponde a $x_0 = 1$, nel quale la f non è definita). Esaminando graf(f), si vede comunque che, **per x "sufficientemente" vicino a $x_0 = 1$, il corrispondente valore $f(x)$ è "arbitrariamente" vicino a 2.** Formalizzeremo questa proprietà dicendo che $f(x)$ **tende al limite** 2 **per** x **tendente a** 1, e scriveremo $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

2. Consideriamo la funzione (pari, in quanto quoziente di due funzioni dispari)

$$g(x) := \frac{\sin(x)}{x} \qquad \forall\, x \in D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

   e indaghiamo il suo comportamento per x "vicino" a $x_0 = 0$. Usando una calcolatrice, si trova la seguente tabella di valori (visto che la funzione è pari, per comodità consideriamo solo dei valori positivi per la variabile indipendente)

x	g(x)
0,1250	0,9974
0,0625	0,9993
0,0312	0,9998
0,0156	1,0000
...	...

ove l'ultimo valore di $g(x)$ non è 1 ma un'approssimazione di 1 operata dalla calcolatrice, che mostra solo quattro cifre decimali. Anche in questo caso si vede che **per x "sufficientemente" vicino a $x_0 = 0$, il corrispondente valore $g(x)$ è "arbitrariamente" vicino a 1,** cioè che $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$.

Prima di introdurre la definizione rigorosa di limite, riprendiamo la funzione f dell'Esempio 3.1.1, e consideriamone le seguenti varianti

$$f_1(x) := x + 1 \qquad \forall\, x \in D_{f_1} = \mathbb{R}\,,$$
$$f_2(x) := \begin{cases} x+1 & x \neq 1, \\ 0 & x = 1 \end{cases} \qquad \forall\, x \in D_{f_2} = \mathbb{R}\,,$$

Esaminando il grafico di f_1 e di f_2, vediamo che **per x "sufficientemente" vicino a $x_0 = 1$, sia $f_1(x)$ sia $f_2(x)$ sono "arbitrariamente" vicini a 2.** In altri termini, f_1 e f_2 hanno lo stesso comportamento di f vicino a $x_0 = 1$, anche se, diversamente da f, sono entrambe definite in $x_0 = 1$, e inoltre $f_1(1) \neq f_2(1)$.

Questo esempio suggerisce che, in una ragionevole nozione di limite di una funzione f per x tendente a un certo valore x_0, nozione che intenda descrivere il comportamento di f "vicino" a x_0, **non ha rilevanza il fatto che f sia definita oppure no nel punto x_0, e neppure il valore che f eventualmente assuma nel punto x_0.** In altri termini, per determinare il limite di f per x tendente a x_0 non conta il comportamento puntuale di f in $x = x_0$.

3.2 Definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, con $L \in \mathbb{R}$

Consideriamo una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Prima di dare la definizione rigorosa di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, evidenziamone gli elementi principali in una

Definizione informale di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Articoliamo la definizione in due punti, che poi commentiamo:

1. *Supponiamo che $f : D_f \to \mathbb{R}$ sia definita per tutti gli x vicini a x_0, tranne che, eventualmente, per $x = x_0$.*

2. *Diciamo che f* tende al limite L quando x tende a x_0 *se f assume valori $f(x)$ arbitrariamente vicini a L pur di prendere x sufficientemente vicino a x_0 (da entrambi i lati), escludendo $x = x_0$.*

Osserviamo che, nel punto 1., viene messo in luce il fatto che la nozione di limite che vogliamo definire non dipende dal fatto che la funzione sia o meno definita nel punto $x = x_0$. Si richiede solo che, comunque ci si avvicini a x_0, sia possibile considerare $f(x)$: preciseremo questo con la nozione di *punto di accumulazione*. Anche nel punto 2. viene ribadito che il comportamento puntuale di f in x_0 non conta ai fini della determinazione del limite. Usando i quantificatori universali e la nozione di intorno, preciseremo le locuzioni "arbitrariamente vicini" e "sufficientemente vicino".

Definizione 3.2.1 (Punto di accumulazione)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Diciamo che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è* un punto di accumulazione per A *se per ogni $r > 0$ l'intorno*[1] *(aperto) di x_0 di raggio r contiene almeno un punto di A diverso da x_0, cioè*

$$\forall\, r > 0 \quad \exists\, x \in A \cap I(x_0, r) \setminus \{x_0\}\,. \tag{3.2.1}$$

Si noti che la condizione (3.2.1) di intersezione non vuota deve valere per ogni $r > 0$: facendo tendere r a 0, si sta cioè richiedendo che esistano punti di A arbitrariamente vicini a x_0, ma comunque diversi da x_0. In altri termini, al tendere di r a 0 i punti di A "si accumulano" in x_0. **Si tenga presente che il fatto che punto x_0 è di accumulazione per un dato insieme A NON IMPLICA che $x_0 \in A$!!**

Esempio 3.2.2. Consideriamo i seguenti insiemi:

1. $$A = \{x \in \mathbb{R}\, :\ x = \frac{1}{2^n}\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$
   Si ha che $0 \notin A$, ma 0 è un punto di accumulazione per A.
2. $A = \mathbb{Z}$: in questo caso, nessun $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per $\mathbb{Z}$.
3. Sia A il dominio (naturale) della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Quindi $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si noti che $0 \notin A$, e che 0 è un punto di accumulazione per A.

Definizione formale di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Formalizziamo quanto richiesto nel punto 1. della definizione informale di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ipotizzando che

$$x_0 \text{ sia un punto di accumulazione per } D_f\,. \tag{3.2.2}$$

Definizione 3.2.3 (Definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ (I))**.** *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f* tende al limite L per x tendente a x_0 *(e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, o $f(x) \to L$ per $x \to x_0$), se per ogni intorno $I(L, \varepsilon)$ di L di raggio $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ di x_0 di raggio $\delta > 0$, tale che*

$$\forall\, x \in \big(I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}\big) \cap D_f \quad \textit{si abbia } f(x) \in I(L, \varepsilon)\,. \tag{3.2.3}$$

Osservazione 3.2.4.
- L'espressione f *assume valori $f(x)$ arbitrariamente vicini a L* è stata formalizzata usando la nozione di intorno del limite L: nella Definizione 3.2.3 si richiede infatti che, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ (e possiamo quindi prendere ε arbitrariamente piccolo) $f(x)$ appartenga all'intorno $I(L, \varepsilon)$, *pur di prendere x sufficientemente vicino a* x_0, cioè pur di prendere x in un opportuno intorno $I(x_0, \delta)$ del punto x_0.
- Osserviamo che, nella (3.2.3), non viene imposto nulla sul comportamento di f nel punto x_0.

[1] Si ricordi la Definizione 1.4.13.

- **L'ordine dei quantificatori universali "per ogni" ed "esiste"** che appaiono nella Definizione 3.2.3 è cruciale: stiamo infatti richiedendo che, comunque si fissi un intorno $I(L,\varepsilon)$, sia possibile determinare corrispondentemente un intorno $I(x_0,\delta)$ per il quale valga la (3.2.3). Di fatto, la costante δ dipenderà dalla costante ε (si veda l'Esempio 3.2.6). In altri termini, si potrebbe dire che c'è un rapporto di "causa-effetto" fra la scelta dell'intorno $I(L,\varepsilon)$ e la conseguente determinazione di $I(x_0,\delta)$. Questo rapporto verrebbe sconvolto se venisse invertito l'ordine dei quantificatori universali.
- Notiamo che la Definizione 3.2.3 sarebbe banalmente verificata se non avessimo richiesto a priori che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Infatti, se ciò non fosse vero, esisterebbe una costante $\bar{\delta} > 0$ tale che per ogni $0 < \delta < \bar{\delta}$ si avrebbe $I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f = \emptyset$, e quindi sarebbe vero che, per $0 < \delta < \bar{\delta}$,
$$\forall\, x \in I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f, \qquad |f(x) - L| < \varepsilon \tag{3.2.4}$$
(in effetti, la negazione di (3.2.4), cioè
$$\exists\, x \in I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f : \qquad |f(x) - L| \geq \varepsilon$$
sarebbe falsa, in quanto, per $0 < \delta < \bar{\delta}$, l'insieme $I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f$ è vuoto).

Osservando che
$$x \in I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ x \neq x_0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |x - x_0| < \delta\,,$$
$$f(x) \in I(L,\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon\,,$$
esplicitiamo la Definizione 3.2.3 usando i simboli matematici.

Definizione 3.2.5 (Definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ (II))**.** *Sia* $f : D_f \to \mathbb{R}$*, e siano* x_0*,* $L \in \mathbb{R}$*. Supponiamo che* x_0 *sia un punto di accumulazione per* D_f*. Diciamo che* f tende al limite L per x tendente a x_0 *(e scriviamo* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$*, o* $f(x) \to L$ *per* $x \to x_0$*), se*
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \; : \; \forall\, x \in D_f \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - L| < \varepsilon\,. \tag{3.2.5}$$

Esempio 3.2.6.

1. Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione costante $f(x) := c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che
$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = c\,. \tag{3.2.6}$$
A questo scopo, fissiamo arbitrariamente $\varepsilon > 0$: vogliamo determinare in corrispondenza una costante $\delta > 0$ tale che (si noti che in questo caso $D_f = \mathbb{R}$)
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - c| < \varepsilon\,. \tag{3.2.7}$$
Ora, $|f(x) - c| = |c - c| = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto la (3.2.7) vale <u>comunque si scelga $\delta > 0$</u>, cioè in questo caso (molto speciale) la determinazione della costante <u>δ è indipendente dalla</u> scelta di $\varepsilon > 0$. Abbiamo quindi verificato la (3.2.6).
2. Consideriamo ora la funzione $f(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che
$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} x = x_0\,. \tag{3.2.8}$$
Fissiamo $\varepsilon > 0$: dobbiamo trovare una costante $\delta > 0$ tale che
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon\,. \tag{3.2.9}$$
Possiamo quindi, evidentemente, scegliere $\delta = \varepsilon$. Di fatto, ogni costante $\delta \in (0,\varepsilon]$ verifica la (3.2.9).

3. Verifichiamo che
$$\lim_{x\to 2}(3x-1)=5\,. \tag{3.2.10}$$
Fissiamo $\varepsilon>0$: dobbiamo trovare una costante $\delta>0$ tale che
$$\forall\, x\in\mathbb{R} \text{ con } 0<|x-2|<\delta \text{ si ha che } |f(x)-5|=|3x-6|=3|x-2|<\varepsilon\,. \tag{3.2.11}$$
È quindi sufficiente scegliere $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, o, in generale, $\delta\in(0,\frac{\varepsilon}{3}]$.

Esempio 3.2.7. Calcoliamo
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}\,.$$
Osserviamo che la funzione razionale fratta $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ è definita su $\mathbb{R}\setminus\{-3,-2\}$ e che
$$\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2\}\quad \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-1}{x+3}\,.$$
Allora
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x+3}=-3\,. \tag{3.2.12}$$
Per verificare l'ultimo limite, procediamo direttamente usando la definizione. In effetti, fissiamo $\varepsilon>0$ e determiniamo $\delta>0$ tale che
$$\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\} \text{ con } 0<|x-(-2)|<\delta \text{ si ha che } |f(x)-(-3)|=\left|\frac{x-1}{x+3}+3\right|=\left|\frac{4x+8}{x+3}\right|=4\left|\frac{x+2}{x+3}\right|<\varepsilon\,.$$
Per trovare δ dobbiamo quindi risolvere la disequazione $|\frac{x+2}{x+3}|<\frac{\varepsilon}{4}$, che è equivalente al sistema
$$\begin{cases}\frac{x+2}{x+3}<\frac{\varepsilon}{4}\\ \frac{x+2}{x+3}>-\frac{\varepsilon}{4}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\frac{(1-\frac{\varepsilon}{4})x+2-\frac{3}{4}\varepsilon}{x+3}<0\\ \frac{(1+\frac{\varepsilon}{4})x+2+\frac{3}{4}\varepsilon}{x+3}>0\end{cases}\quad,$$
.....

Come già mostrano questi semplici esempi, la definizione non è lo strumento più indicato per il calcolo dei limiti. Per svilupparlo, introdurremo diverse tecniche svincolate dalla Definizione 3.2.5, che invece sarà alla base della dimostrazione rigorosa dei risultati sui limiti che presenteremo. Il primo di essi asserisce che, quando una funzione ammette un certo limite per $x\to x_0$, tale limite è univocamente determinato.

Il teorema di unicità del limite.

Teorema 3.2.8. *Sia $f:D_f\to\mathbb{R}$, e sia $x_0\in\mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D_f. Siano L, $M\in\mathbb{R}$. Se*
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L \quad e \quad \lim_{x\to x_0}f(x)=M, \tag{3.2.13}$$
allora $L=M$.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che valga la (3.2.13) e che $L\neq M$. Allora $|L-M|>0$. Poniamo $\varepsilon:=|L-M|/3$. Usando la definizione di limite, in corrispondenza a ε determiniamo due costanti $\delta_1>0$ e $\delta_2>0$ tali che
$$\forall\, x\in D_f \text{ tale che } 0<|x-x_0|<\delta_1 \text{ si ha che } |f(x)-L|<\varepsilon\,,$$
$$\forall\, x\in D_f \text{ tale che } 0<|x-x_0|<\delta_2 \text{ si ha che } |f(x)-M|<\varepsilon\,,$$

Sia $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Allora

$$\forall\, x \in D_f \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - M| < \varepsilon\,,\; |f(x) - L| < \varepsilon\,,$$

quindi, ricordando la disuguaglianza (1.4.2d),

$$\forall\, x \in D_f \text{ tale che } \; 0 < |x - x_0| < \delta \; \text{ si ha che}$$
$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|L - M|\,,$$

da cui si deduce che

$$|L - M| - 2/3|L - M| = 1/3|L - M| < 0,$$

e questo è **un assurdo**, perché il modulo di un qualsiasi numero reale è sempre un numero maggiore o uguale a zero. □

Limiti unilateri. Nella definizione di limite che abbiamo dato, non si distingue il caso in cui x tende a x_0 da destra da quello in cui x tende a x_0 da sinistra: si richiede cioè che $f(x)$ tenda a L quando x si avvicina a x_0, ma senza specificare da quale verso.

Introduciamo ora una nozione più precisa di limite, che permetta di distinguere il comportamento della funzione per x tendente a x_0 da destra o da sinistra: parleremo quindi di *limiti unilateri* (limite destro/sinistro). Per esempio, è opportuno considerare limiti unilateri quando f è definita su un intervallo (a, b) e si vuole considerare il limite di f per x tendente a uno degli estremi dell'intervallo. Inoltre, a volte i limiti unilateri possono descrivere in modo più preciso il comportamento della funzione nell'intorno di un punto x_0, come mostrerà l'Esempio 3.2.11.

Definizione informale di limite destro/sinistro. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f ha limite destro (rispettivamente, sinistro) L in x_0 se $f(x)$ è arbitrariamente vicino a L per x sufficientemente vicino a x_0, x maggiore di x_0 (x minore di x_0) di x_0, escludendo x_0.*

Traduciamo questo nella seguente

Definizione 3.2.9 (Limite destro/sinistro)**.** *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f* ha limite destro L in x_0 *(e scriviamo $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, o $f(x) \to L$ per $x \to x_0^+$), se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \; : \;\; \forall\, x \in D_f \textit{ tale che } 0 < x - x_0 < \delta \textit{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Diciamo che f ha limite sinistro L in x_0 *(e scriviamo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$, o $f(x) \to L$ per $x \to x_0^-$), se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \; : \;\; \forall\, x \in D_f \textit{ tale che } -\delta < x - x_0 < 0 \textit{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Esempio 3.2.10. Consideriamo la funzione $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$, definita per $x \in [-1, 1]$. Verifichiamo che $\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e determiniamo $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in [-1, 1] \;\text{ con }\; 0 < x - (-1) = x + 1 < \delta \;\text{ si ha}$$
$$|\sqrt{1 - x^2}| = \sqrt{1 - x^2} < \varepsilon \;\; \Leftrightarrow \;\; 1 - x^2 < \varepsilon^2 \;\; \Leftrightarrow \;\; x^2 > 1 - \varepsilon^2 \;\; \Leftrightarrow \;\; |x| > \sqrt{1 - \varepsilon^2}\,.$$

Possiamo quindi scegliere $\delta > 0$ tale che $x < \delta - 1 \;\Rightarrow\; x < -\sqrt{1 - \varepsilon^2}$: cioè, $\delta \leq 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.
Esercizio!: provare che $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0$.

Esempio 3.2.11. Consideriamo la funzione *segno*

$$\operatorname{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad \operatorname{sign}(x) := \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0 \end{cases} .$$

Si vede immediatamente[2] che $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign}(x) = 1$, mentre $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) = -1$. D'altra parte, non esiste il limite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sign}(x)$: intuitivamente, ciò è proprio dovuto al fatto che $f(x)$ tende a 1 per $x \to 0^+$, e $f(x)$ tende a -1 per $x \to 0^-$.

Quello che accade per la funzione sign è il prototipo di una situazione più generale: **il limite per $x \to x_0$ esiste se e solo se il limite destro e il limite sinistro esistono e sono uguali**. In tal caso, il valore comune dei limiti unilateri fornisce il valore del limite.

Teorema 3.2.12. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Allora*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L .$$

3.3 Alcuni risultati sui limiti

L'algebra dei limiti. Introduciamo un importante risultato sul legame fra l'operazione di limite e le operazioni algebriche sulle funzioni.

Teorema 3.3.1. *Siano f, $g : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, c, L, $M \in \mathbb{R}$, e $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Supponiamo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L , \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = M .$$

Allora, si ha che

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L + M ,$$
$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big) \cdot \big(\lim_{x \to x_0} g(x)\big) = L \cdot M ,$$
$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x) = cL ,$$
$$\textit{se } M \neq 0, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M} ,$$
$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{m/n} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{m/n} = L^{m/n} \quad \textit{se} \quad \begin{cases} L \geq 0 & \textit{nel caso } m \geq 0 \textit{ e } n \textit{ pari,} \\ \forall\, L \in \mathbb{R} & \textit{nel caso } m \geq 0 \textit{ e } n \textit{ dispari,} \\ L > 0 & \textit{nel caso } m < 0 \textit{ e } n \textit{ pari,} \\ \forall\, L \neq 0 & \textit{nel caso } m < 0 \textit{ e } n \textit{ dispari.} \end{cases}$$

Infine, vale il seguente risultato di confronto:

$$f(x) \leq g(x) \ \ \forall\, x \in D \quad \Rightarrow \quad L \leq M . \tag{3.3.1}$$

[2] Esercizio: verificarlo usando la Definizione 3.2.9.

Non vale invece un risultato di confronto stretto, cioè la relazione $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in D$ non implica $L < M$: per esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad : \quad \text{si ha che } \; f(x) > 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \; \text{ma } \lim_{x \to 0} f(x) = 0\,.$$

Osserviamo che i risultati enunciati nel Teorema 3.3.1 si adattano con ovvie modifiche al caso in cui a $\lim_{x \to x_0}$ si sostituisca sistematicamente $\lim_{x \to x_0^+}$, oppure, sistematicamente, $\lim_{x \to x_0^-}$.

Limiti delle funzioni elementari. Diamo, senza dimostrazione, i seguenti limiti:

Sia $f(x) := x^r$, con $r \in \mathbb{R}$: $\forall\, x_0 \in D_f \quad \lim_{x \to x_0} x^r = x_0^r\,,$

Sia $f(x) := a^x$, con $a > 0$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}\,,$

Sia $f(x) := \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$: $\forall\, x_0 \in (0, +\infty) \quad \lim_{x \to x_0} \log_a(x) = \log_a(x_0)\,,$

Siano $f(x) := \sin(x)$ e $g(x) := \cos(x)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)\,,$

Sia $f(x) := \tan(x)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \lim_{x \to x_0} \tan(x) = \tan(x_0)\,,$

Siano $f(x) := \arcsin(x)$ e $g(x) := \arccos(x)$:
$\forall\, x_0 \in (-1, 1) \quad \lim_{x \to x_0} \arcsin(x) = \arcsin(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} \arccos(x) = \arccos(x_0)\,,$
Inoltre, $\lim_{x \to -1^+} \arcsin(x) = \arcsin(-1), \qquad \lim_{x \to -1^+} \arccos(x) = \arccos(-1),$
e $\lim_{x \to 1^-} \arcsin(x) = \arcsin(1), \qquad \lim_{x \to 1^-} \arccos(x) = \arccos(1).$
Sia $f(x) := \arctan(x)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} \arctan(x) = \arctan(x_0)\,.$

Esempio 3.3.2. Ricordando i limiti (3.2.6)–(3.2.8) e applicando il Teorema 3.3.1, possiamo calcolare

$$\lim_{x \to 2} \left(3x^2 + 5x + \frac{x^2}{x+2} \right) = 3 \left(\lim_{x \to 2} x \right)^2 + 5 \lim_{x \to 2} x + \frac{(\lim_{x \to 2} x)^2}{\lim_{x \to 2} x + 2} = 23\,,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x-1} - 2\sqrt{4-x} \right) = \frac{1}{\lim_{x \to 0^+} x - 1} - 2\sqrt{4 - \lim_{x \to 0^+} x} = -5\,.$$

In generale, abbiamo che

- Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale, della forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Allora
$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0\,. \tag{3.3.2}$$

- Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione razionale fratta, della forma $f = P/Q$, con P, $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni polinomiali. Allora
$$\forall\, x_0 \in D_f = \{x \in \mathbb{R} \;:\; Q(x) \neq 0\} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\,. \tag{3.3.3}$$

Abbiamo pertanto

$$\lim_{x\to 2}(x^4 - 2x + \pi) = 12 + \pi\,,$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3}{x-5} = -\frac{9}{2}\,.$$

Il Teorema dei due carabinieri e le sue conseguenze.

Teorema 3.3.3. *Siano f, g, $h : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, $L \in \mathbb{R}$, e sia I un intorno di x_0. Supponiamo che*

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall\, x \in I \setminus \{x_0\}\,, \tag{3.3.4}$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L\,. \tag{3.3.5}$$

Allora

$$\textit{esiste il } \lim_{x\to x_0} g(x), \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Questo teorema ha un'immediata interpretazione grafica: grazie alla (3.3.4), il grafico di g è compreso fra i grafici di f e di h (i "due carabinieri"): si vede subito, allora, che se per $x \to x_0$ f e h tendono a L, anche g è forzata a tendere a L. Si noti che, nell'ipotesi (3.3.4), si richiede che valga $f \le g \le h$ solo su un intorno del punto x_0 (cioè "vicino" a x_0), **tranne che nel punto** x_0, e non su tutto il dominio D; inoltre, nella tesi viene in particolare affermato che <u>esiste</u> $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

Anche in questo caso, sostituendo sistematicamente $\lim_{x\to x_0}$ con $\lim_{x\to x_0^+}$ (con $\lim_{x\to x_0^-}$, risp.), si ottiene la versione del Teorema 3.3.3 per il limite destro/sinistro. Vediamo alcune applicazioni di questo risultato.

Esempio 3.3.4.

1. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $-|x| \le g(x) \le x^4$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora, notando che $\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0} x^4 = 0$, concludiamo che esiste $\lim_{x\to 0} g(x)$ e che tale limite è uguale a 0[3].

2. Si ha che
$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,. \tag{3.3.6}$$
Innanzitutto osserviamo che, a priori, non è neppure chiaro che tale limite esista: infatti, esiste il limite $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, ma
$$\nexists \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,. \tag{3.3.7}$$
Per vedere ciò, osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{Z}$
$$\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1\,, \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1\,.$$

[3]Quando una funzione tende a 0 (per $x \to 0$ o per $x \to \pm\infty$, si veda la Sezione 3.4.1), si dice che essa è *infinitesima*.

Prendendo valori sempre più grandi (in modulo) di $k \in \mathbb{Z}$, vediamo che la funzione $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscilla sempre più velocemente fra i valori 1 e -1. Quindi non è possibile applicare la regola sul limite del prodotto fra due funzioni (si veda il punto 2. del Teorema 3.3.1) alla funzione prodotto $g(x) := x^2 \sin(1/x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D'altra parte, osserviamo che $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ per ogni $x \neq 0$: allora

$$-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2 \quad \forall\, x \neq 0\,,$$

quindi, applicando il Teorema dei due carabinieri concludiamo la (3.3.6).

Infine, enunciamo un corollario del Teorema dei due carabinieri che generalizza quanto visto nell'Esempio 3.3.4(2).

Corollario 3.3.5. *Siano f, $g : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, e sia I un intorno di x_0. Supponiamo che:*

- *f sia limitata in $I \setminus \{x_0\}$, cioè esista $K > 0$ tale che*

$$|f(x)| \leq K \qquad \forall\, x \in I \setminus \{x_0\} \cap D\,,$$

- $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Allora esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

In altri termini, questo risultato afferma che il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima è una funzione infinitesima.

3.4 Definizione di $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

3.4.1 Limiti finiti all'infinito

Introduciamo ora una nozione di limite che descriva il comportamento di una funzione f, definita su una semiretta $(a, +\infty)$ o $(-\infty, a)$, o su $\mathbb{R}$, tale che f assume valori $f(x)$ *arbitrariamente vicini* a $L \in \mathbb{R}$ (cioè f tende al limite finito L), quando x assume valori sufficientemente grandi in valore assoluto, positivi (useremo la locuzione *al tendere di x a $+\infty$*), o negativi (cioè *al tendere di x a $-\infty$*). In questo contesto, useremo le notazioni

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L\,. \tag{3.4.1}$$

Nel seguito, useremo la notazione $x \to \pm\infty$ per indicare che x tende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Per esempio, esaminando il grafico delle funzioni elementari si vede subito che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$$

e, in generale, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^m} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^m} = 0\,,$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\forall\, a > 1 \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0\,,$$

$$\forall\, a \in (0,1) \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,.$$

Diamo ora le definizioni rigorose dei limiti (3.4.1).

Definizione 3.4.1. *Sia* $a \in \mathbb{R}$ *e* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$*. Diciamo che* f tende al limite L per x tendente a $+\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *o* $f(x) \to L$ *per* $x \to +\infty$*) se*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, R \in \mathbb{R} : \;\; \forall\, x \in D_f \text{ con } x > R \text{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,. \tag{3.4.2}$$

Analogamente, diciamo che f tende al limite L per x tendente a $-\infty$ *se*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, R \in \mathbb{R} : \;\; \forall\, x \in D_f \text{ con } x < R \text{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,. \tag{3.4.3}$$

Osservazione 3.4.2. Osserviamo che, nella definizione (3.4.2), avremmo potuto richiedere, equivalentemente, che

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, R > 0 : \;\; \forall\, x \in D_f \text{ con } x > R \text{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

visto che, in effetti, stiamo considerando il caso in cui $x \to +\infty$, e quindi x assumerà valori definitivamente positivi. Inoltre, pur di prendere $R > a$ si può omettere di specificare "$\forall\, x \in D_f$". Analogamente, in (3.4.3) avremmo potuto equivalentemente richiedere che esista $R < 0$, e che $R < a$.

Esempio 3.4.3. Usando la definizione, verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$[4]. Fissiamo allora $\varepsilon > 0$: dobbiamo determinare $R > 0$ tale che

$$\forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \;\; \text{con} \;\; x > R \;\; \text{si ha}$$
$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| = \frac{2}{|x-1|} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x-1| > \frac{2}{\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; x > 1 + \frac{2}{\varepsilon} \text{ o} x < 1 - \frac{2}{\varepsilon}\,.$$

Scegliamo allora $R \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

Limiti all'infinito di funzioni razionali fratte (I). Quanto visto nell'Esempio 3.4.3 è tipico del comportamento all'infinito delle funzioni razionali fratte. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione razionale fratta, della forma $f = P/Q$, con $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni polinomiali, con $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \end{cases}\,. \tag{3.4.4}$$

Il caso in cui $n > m$ sarà considerato nella Sezione 3.4.3, alla quale rimandiamo per la dimostrazione di (3.4.4).

Asintoti orizzontali. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, il grafico di f si avvicina arbitrariamente alla retta di equazione $y = L$ per $x \to +\infty$: in questo caso, si dice che *la retta di equazione* $y = L$ *è un asintoto orizzontale per* $\mathrm{graf}(f)$ *a* $+\infty$. Analogamente, se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, *la retta di equazione* $y = L$ *è un asintoto orizzontale per* $\mathrm{graf}(f)$ *a* $-\infty$.

[4]**Esercizio!**: ragionando allo stesso modo, verificare che $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$.

Estensione dei risultati sui limiti. Il Teorema 3.3.1 si estende al caso di limiti finiti all'infinito sostituendo sistematicamente, nell'enunciato, al limite $\lim_{x\to x_0}$ il limite $\lim_{x\to+\infty}$ (oppure $\lim_{x\to-\infty}$). Si estendono anche in modo opportuno il Teorema dei due carabinieri e il Corollario 3.3.5, che rienunciamo, per esempio, nel caso $x \to +\infty$:

Corollario 3.4.4. *Siano f, $g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, e supponiamo che*

$$
\begin{aligned}
\exists\, K > 0 \ : \quad |f(x)| \le K \qquad \forall\, x \in (a, +\infty)\,,\\
\exists \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Allora esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$.

Per esempio, da questo risultato segue che

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0\,,\\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^3} = 0,\\
&\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)\sin(x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x)\sin(x)\left(\frac{1}{e}\right)^x = 0\,.
\end{aligned}
$$

3.4.2 Limiti infiniti per $x \to x_0$

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, punto di accumulazione per D_f. Vogliamo formalizzare il caso in cui f *assume valori $f(x)$ arbitrariamente grandi in valore assoluto (positivi o negativi) per x sufficientemente vicino a x_0, escludendo il punto x_0.* Scriveremo, rispettivamente,

$$
\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\,. \tag{3.4.5}
$$

Nel seguito, useremo anche la notazione $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ per indicare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Daremo anche le definizioni di limiti destri/sinistri uguali a $\pm\infty$. Ad esempio, si ha che

$$
\begin{aligned}
&\forall\, k \in \mathbb{N},\ k \ge 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty\,,\\
&\forall\, k \in \mathbb{N},\ k \ge 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2k+1}} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2k+1}} = -\infty\,,\\
&\forall\, a > 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty\,,\\
&\forall\, a \in (0,1) \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty\,.
\end{aligned}
$$

Definizione 3.4.5. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f tende a $+\infty$ per x tendente a x_0 (e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, o $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$), se*

$$
\forall\, M > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ : \ \ \forall\, x \in D_f \ \textit{con}\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \textit{si ha}\ f(x) > M\,. \tag{3.4.6}
$$

Diciamo che f tende a $-\infty$ per x tendente a x_0 (e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, o $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$), se

$$
\forall\, M > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ : \ \ \forall\, x \in D_f \ \textit{con}\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \textit{si ha}\ f(x) < -M\,. \tag{3.4.7}
$$

Esempio 3.4.6. Verifichiamo che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty$. Fissiamo $M>0$: dobbiamo determinare $\delta>0$ tale che

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \text{ con }\ 0<|x|<\delta\ \text{ si ha }\ \frac{1}{x^4}>M\ \Leftrightarrow\ x^4<\frac{1}{M}\ \Leftrightarrow\ |x|<\frac{1}{M^{1/4}}\,.$$

Allora, è sufficiente scegliere $\delta\leq\frac{1}{M^{1/4}}$.

Limiti unilateri infiniti. In modo analogo alla 3.4.5, si danno le definizioni dei limiti unilateri $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$: per esempio[5], diciamo che f ha limite sinistro $+\infty$ in x_0 se

$$\forall\, M>0\ \ \exists\,\delta>0\,:\ \ \forall\, x\in D_f\ \text{con}\ -\delta<x-x_0<0\ \text{si ha}\ f(x)>M\,.$$

Il Teorema 3.2.12 si estende al caso di limiti infiniti per $x\to x_0$: per semplicità, lo enunciamo solo nel caso in cui il limite sia $+\infty$.

Teorema 3.4.7. *Sia $f:D_f\to\mathbb{R}$, e siano $x_0,\,L\in\mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f.*

1. *Allora*
$$\exists\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty\,.$$

2. *Allora*
$$\exists\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty\,.$$

In particolare, se si ha che

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty\quad\text{e}\quad\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$$

(oppure che $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$), allora **non esiste** il limite $\lim_{x\to x_0}f(x)$.

Esempio 3.4.8. La funzione $f(x)=\frac{1}{x}$, di dominio $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, **non ammette limite** per $x\to 0$: in effetti, in questo caso $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$. Allo stesso modo,

$$\begin{aligned}\forall\, m\in\mathbb{N},\ m\text{ dispari}\quad &\nexists\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^m},\\ &\nexists\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x),\quad\nexists\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan(x).\end{aligned}$$

Asintoti verticali. Se $\lim_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$, il grafico di f si avvicina arbitrariamente alla retta di equazione $x=x_0$ per x sufficientemente vicino a x_0: in questo caso, si dice che *la retta di equazione $x=x_0$ è un asintoto (eventualmente destro/sinistro, a seconda che si consideri un limite unilatero) verticale per* graf(f).

[5] **Esercizio!**: dare le altre definizioni!

3.4.3 Limiti infiniti all'infinito

Infine, formalizziamo il caso in cui f *assume valori* $f(x)$ *arbitrariamente grandi in valore assoluto (positivi o negativi) quando* x *assume valori sufficientemente grandi in valore assoluto (positivi o negativi).* Daremo cioè le definizioni dei limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Per esempio, si ha che

$$\begin{aligned}
&\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \text{ pari} \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty\,,\\
&\forall\, m \in \mathbb{N},\ m \text{ dispari} \quad \lim_{x\to+\infty} x^m = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} x^m = -\infty\,,\\
&\forall\, a > 1 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\,,\\
&\forall\, a \in (0,1) \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty\,,\\
&\forall\, a > 1 \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty\,,\\
&\forall\, a \in (0,1) \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty\,.
\end{aligned}$$

Osserviamo d'altra parte che

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \sin(x)\,, \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)\,, \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \tan(x)\,.$$

Definizione 3.4.9. *Sia* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Diciamo che* f tende a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, *o* $f(x) \to +\infty$ *per* $x \to +\infty$*), se*

$$\forall\, M > 0 \ \ \exists\, R \in \mathbb{R} : \ \ \forall\, x \in D_f \ \textit{con}\ x > R \ \textit{si ha}\ f(x) > M\,. \tag{3.4.8}$$

Diciamo che f tende a $-\infty$ per x tendente a $+\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, *o* $f(x) \to -\infty$ *per* $x \to +\infty$*), se*

$$\forall\, M > 0 \ \ \exists\, R \in \mathbb{R} : \ \ \forall\, x \in D_f \ \textit{con}\ x > R \ \textit{si ha}\ f(x) < -M\,. \tag{3.4.9}$$

Diciamo che f tende a $+\infty$ per x tendente a $-\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, *o* $f(x) \to +\infty$ *per* $x \to -\infty$*), se*

$$\forall\, M > 0 \ \ \exists\, R \in \mathbb{R} : \ \ \forall\, x \in D_f \ \textit{con}\ x < R \ \textit{si ha}\ f(x) > M\,. \tag{3.4.10}$$

Diciamo che f tende a $-\infty$ per x tendente a $-\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, *o* $f(x) \to -\infty$ *per* $x \to -\infty$*), se*

$$\forall\, M > 0 \ \ \exists\, R \in \mathbb{R} : \ \ \forall\, x \in D_f \ \textit{con}\ x < R \ \textit{si ha}\ f(x) < -M\,. \tag{3.4.11}$$

Sulla scelta di R nelle formule (3.4.8)–(3.4.9) valgono le stesse considerazioni sviluppate dopo la Definizione 3.4.1.

Asintoti obliqui. Introdurremo la nozione di asintoto obliquo (che fornisce delle informazioni più precise sul comportamento di funzioni che, all'infinito, tendono a $+\infty$ o a $-\infty$) solo nel caso di limiti a $+\infty$; le definizioni e i risultati che daremo si estendono in modo immediato al caso di limiti a $-\infty$.

Definizione 3.4.10. *Sia* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *e supponiamo che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*, o che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$*. Diciamo che la retta di equazione* $y = mx + q$*, con* $m, q \in \mathbb{R}$ *e* $m \neq 0$*, è un* asintoto obliquo *per* graf(f) *per* $x \to +\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0\,.$$

Graficamente, questo significa che il grafico di f si avvicina arbitrariamente retta $y = mx + q$ per x sufficientemente grande. Chiaramente, si avrà $m > 0$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $m < 0$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Osserviamo che non sempre una funzione che tende a $\pm\infty$ per $x \to +\infty$ ammette un asintoto obliquo. Per esempio, per ogni $a > 1$ la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ non ammette alcun asintoto obliquo per $x \to +\infty$: intuitivamente, questo accade perché per $x \to +\infty$ la funzione esponenziale tende a $+\infty$ più velocemente di qualsiasi funzione potenza.

Diamo ora delle condizioni <u>necessarie e sufficienti</u> per l'esistenza di un asintoto obliquo.

Teorema 3.4.11. *Sia* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *e supponiamo che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*, oppure che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$*. Allora, la retta* $y = mx + q$ *(*$m \neq 0$*) è un asintoto obliquo per* graf(f) *per* $x \to +\infty$ *se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0\,,$$
$$\exists \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = q\,.$$

Operativamente, data una funzione $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, per la ricerca di un eventuale asintoto obliquo si procede in questo modo:

- si calcola $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$: se tale limite esiste, finito, ed è uguale a una costante m non nulla, allora m sarà il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo;
- si calcola $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$: se tale limite esiste ed è finito, allora il suo valore individua l'ordinata all'origine dell'asintoto obliquo.

Esempio 3.4.12. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{3}{4}x - \frac{\cos^2(x)}{e^x} + \arctan(x) - \frac{\sin(x)}{x} \qquad \forall\, x \neq 0\,.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \cos^2(x) \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad (3.4.12)$$
$$\frac{\sin(x)}{x} = 0\,,$$

ove il calcolo del primo limite è giustificato dal Corollario 3.4.4, in quanto la funzione $f_1(x) = \cos^2(x)$ è limitata su $\mathbb{R}$, mentre $f_2(x) = (1/e)^x$ è infinitesima per $x \to +\infty$. Combinando i limiti in (3.4.12) con il fatto che $\frac{3}{4}x \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e usando i risultati sull'estensione dell'algebra dei limiti del Teorema 3.5.1, concludiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Per verificare l'esistenza di un eventuale asintoto obliquo, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{xe^x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{3}{4}\,,$$

in quanto gli ultimi tre limiti sono uguali a 0 ancora grazie al Corollario 3.4.4 . Infine, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{3}{4}x\right) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos^2(x)}{e^x} + \lim_{x\to+\infty}\arctan(x) - \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Allora, grazie al Teorema 3.4.11 concludiamo che la retta $y = \frac{3}{4}x + \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per $\mathrm{graf}(f)$ per $x \to +\infty$. **Esercizio!**: dimostrare che la retta $y = \frac{3}{4}x - \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per $\mathrm{graf}(f)$ per $x \to -\infty$.

3.5 L'estensione dell'algebra dei limiti e la nozione di forma indeterminata

Come già anticipato nell'Esempio 3.4.12, vogliamo ora estendere alcuni dei risultati contenuti nel Teorema 3.3.1 al caso in cui almeno una delle funzioni f e g (che sommiamo/moltiplichiamo/dividiamo) tenda a un limite infinito. Per comodità, enunceremo il Teorema 3.5.1 nel caso di limiti per $x \to x_0$, ma anticipiamo che i risultati che daremo valgono anche nel caso in cui al limite $\lim_{x\to x_0}$ venga sistematicamente sostituito $\lim_{x\to x_0^+}$, oppure $\lim_{x\to x_0^-}$, oppure $\lim_{x\to+\infty}$, oppure $\lim_{x\to-\infty}$.

Teorema 3.5.1. *Siano $f,\, g : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, e $L \in \mathbb{R}$. Si ha che:*

[Estensione del limite della somma:]

$$\begin{aligned}
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \pm\infty\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = +\infty\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = -\infty\,;
\end{aligned}$$

[Estensione del limite del prodotto:]

$$\begin{aligned}
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0 \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \textit{ allora } \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \pm\infty\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (+\infty \textit{ o } -\infty \textit{ a seconda del segno di } f\cdot g)\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = +\infty\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = -\infty\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = +\infty\,;
\end{aligned}$$

[Estensione del limite del quoziente:]

$$\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0\,;$$

$$\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0 \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \textit{ allora } \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$$

$$\textit{(}+\infty \textit{ o } -\infty \textit{ a seconda del segno di } \frac{f}{g}\textit{)};$$

$$\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$$

$$\textit{(a seconda del segno di } \frac{f}{g}\textit{)}.$$

$$\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0.$$

Questo risultato si può riassumere con il seguente schema:

$$\begin{gathered} L \pm \infty = \pm\infty\,, \\ +\infty + \infty = +\infty\,, \\ -\infty - \infty = -\infty \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} L \neq 0: \quad L \cdot (\pm\infty) = \pm\infty\,, \\ (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,, \\ (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty\,, \\ (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \frac{L}{\pm\infty} = 0\,, \\ L \neq 0: \quad \frac{L}{0} = \pm\infty\,, \\ \frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty\,, \\ \frac{0}{\pm\infty} = 0\,, \end{gathered}$$

La nozione di forma indeterminata. I casi di mancata estensione dell'algebra dei limiti possono essere così schematizzati:

$$\begin{gathered} +\infty - \infty \\ 0 \cdot (\pm\infty) \\ \frac{0}{0} \\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \end{gathered} \tag{3.5.1}$$

Per ognuno di questi casi useremo la locuzione *forma indeterminata*: questa espressione non significa che, nei casi presentati nella (3.5.1), il limite non esista, o non sia possibile calcolarlo, ma semplicemente che non vi sono regole generali per dedurre il limite della somma/prodotto/quoziente delle funzioni f e g a partire dai limiti di f e g. Di fatto, tratteremo i diversi tipi di forme indeterminate con tecniche *ad hoc*. Ne presentiamo alcune.

Limiti all'infinito di funzioni polinomiali. Consideriamo la generica funzione polinomiale $P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il limite $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ può dare luogo a una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$, che trattiamo **raccogliendo il monomio in** x **di grado massimo** (cioè x^n):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \big(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\big) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \cdot \big(a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n}\big) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + 0 + \ldots + 0\,.
\end{aligned}$$

Allora concludiamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\big) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n = \pm\infty\,,$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del fatto che x tenda a $+\infty$ o a $-\infty$, che n sia pari o dispari, e del segno di a_n). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il termine di grado massimo**.

Esempio 3.5.2. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \big(-4x^3 + 5x^6 - 2x^7 + 3\big) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^7) = -\infty, \\
&\lim_{x\to-\infty} \big(3x^2 - 4x^4 - 6x^5 + 9x\big) = \lim_{x\to-\infty} (-6x^5) = +\infty.
\end{aligned}$$

Limiti all'infinito di funzioni razionali fratte. Consideriamo la generica funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \quad \forall\, x \in D_f\,.$$

Il limite $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)/Q(x)$ dà luogo a una forma indeterminata del tipo $(\pm\infty)/(\pm\infty)$, che trattiamo **raccogliendo, sia al numeratore sia al denominatore, il monomio in** x **di grado massimo** (cioè x^n e x^m, rispettivamente):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n \cdot \big(a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n}\big)}{x^m \cdot (b_m + b_{m-1}x^{-1} + \ldots + b_1 x^{-m+1} + b_0 x^{-m})} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + 0 + \ldots + 0}{b_m x^m + 0 + \ldots + 0}
\end{aligned}$$

Allora concludiamo che

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}\\&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}0 & m>n,\\ \frac{a_n}{b_m} & m=n,\\ \pm\infty & m<n\end{cases},\end{aligned}$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente $\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$ per $x\to\pm\infty$). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il rapporto fra il termine di grado massimo al numeratore e il termine di grado massimo al denominatore**.

Esempio 3.5.3. Si hanno i seguenti limiti

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-3x^3-4x^7-5x}{5x^5-2x+3x^6-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^7}{3x^6}=-\frac{4}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7}{x^6}=-\infty,\\&\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^4+5x-3}{x^5-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^4}{x^5}=0,\\&\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^4-5x^5+2x-3x^2}{3x^3-6x^5+4x^4-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^5}{-6x^5}=\frac{5}{6},\\&\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x^3+1-\sin(x)}{4x^2+x^3-\arctan(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(3x^{-1}-2+x^{-3}-\frac{\sin(x)}{x^3})}{x^3(4x^{-1}+1-\frac{\arctan(x)}{x^3})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{x^3}=-2\,,\end{aligned}$$

ove la prima uguaguaglianza nel secondo limite segue dal fatto che $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin(x)}{x^3}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan(x)}{x^3}$.

Limiti per $x\to 0$ di funzioni razionali fratte. Consideriamo una funzione razionale fratta data dal quoziente di due polinomi omogenei (cioè con termine noto nullo):

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x}\quad\forall\,x\in D_f\,.$$

Il limite $\lim_{x\to0}P(x)/Q(x)$ dà luogo a una forma indeterminata del tipo $0/0$, che trattiamo **raccogliendo, sia al numeratore sia al denominatore, il monomio in x di grado minimo.**

Per esempio, supponiamo che $a_1\neq0$ e che $b_1=0$, ma $b_2\neq0$. Allora il termine di grado minimo al numeratore è x, mentre al denominatore è x^2: in questo modo abbiamo

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0^+}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\left(a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1\right)}{x^2\cdot(b_mx^{m-2}+b_{m-1}x^{m-3}+\ldots+b_2)}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{a_1x+0+\ldots+0}{b_2x^2+0+\ldots+0}=\lim_{x\to0^+}\frac{a_1}{b_2}\frac{1}{x}=\pm\infty\,,\end{aligned}$$

ove avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente a_1/b_2. Allo stesso modo si ha

$$\lim_{x\to0^-}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{a_1}{b_2}\frac{1}{x}=\pm\infty\quad\text{a seconda del segno di }\frac{a_1}{b_2},$$

mentre
$$\lim_{x\to 0}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{a_1}{b_2}\frac{1}{x} = \pm\infty \quad \text{NON esiste.}$$
In generale, possiamo dare la seguente regola: siano

$$\bar{i} \text{ l'indice corrispondente al monomio di grado minimo in } P(x),$$
$$\bar{j} \text{ l'indice corrispondente al monomio di grado minimo in } Q(x).$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^\pm}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x} \\
&= \lim_{x\to 0^\pm}\frac{a_{\bar{i}}x^{\bar{i}}}{b_{\bar{j}}x^{\bar{j}}} = \begin{cases} 0 & \text{nel caso } \bar{i} > \bar{j}, \\ \frac{a_{\bar{i}}}{b_{\bar{j}}} & \text{nel caso } \bar{i} = \bar{j}, \\ \pm\infty, \text{ oppure non esiste se si ha } \lim_{x\to 0} & \text{nel caso } \bar{i} < \bar{j} \end{cases}
\end{aligned}$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente P/Q). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il rapporto fra il termine di grado minimo al numeratore e il termine di grado minimo al denominatore.**

Esempio 3.5.4. Si ha quindi che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{4x^5 - 3x^4 + 3x^3}{-6x^7 + 7x^8 - 2x^2} = 0, \\
&\lim_{x\to 0}\frac{5x^5 - 3x^2 + 3x}{x^6 - 2x + 3x^2} = -\frac{3}{2}, \\
&\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3 - 6x^6 + 2x}{5x^5 - 3x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{-3x^3} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = -\infty\,.
\end{aligned}$$

Limiti notevoli. Tratteremo una vasta classe di forme indeterminate di tipo $0/0$ non associate a funzioni razionali fratte facendo uso dei seguenti *limiti notevoli:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,, \tag{3.5.2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\,, \tag{3.5.3}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1\,, \tag{3.5.4}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,, \tag{3.5.5}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = 1\,, \tag{3.5.6}$$

che possono essere dimostrati usando il *Teorema di De l'Hôpital*, si veda il Capitolo 5 sulle derivate.

Capitolo 4

Continuità

4.1 La nozione di continuità

Definizione 4.1.1. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per D_f, tale che $x_0 \in D_f$. Diciamo che f* è continua in x_0 *se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) . \tag{4.1.1}$$

Se f non è continua in x_0, diciamo che f è discontinua in x_0 *(o che f* ha un punto di discontinuità in x_0*).*

Osservazione 4.1.2.

- Notiamo che, per dar senso alla (4.1.1), è necessario sia che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f (in modo che abbia senso considerare il limite di f per $x \to x_0$), sia che $x_0 \in D_f$ (cosicché si possa calcolare f in x_0). **Ci si pone dunque il problema della continuità di una funzione in un punto solo se tale punto è di accumulazione per il dominio della funzione e vi appartiene**.

  Ricordiamo che non esistono legami fra il fatto che un punto x_0 sia di accumulazione per D_f e il fatto che $x_0 \in D_f$. Ad esempio,

  – se $D_f = \{4\} \cup [5, 7]$, il punto $4 \in D_f$ non è di accumulazione per D_f;
  – se $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (come nel caso di $f(x) = \frac{1}{x}$), allora $0 \notin D_f$, ma 0 è un punto di accumulazione per D_f;
  – se $D_f = I$ è un intervallo (limitato/illimitato, chiuso o semiaperto o aperto), si vede subito che per ogni $x \in I$, x è di accumulazione per I.

- Con la (4.1.1) stiamo richiedendo che

  1. il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esista,
  2. il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ sia finito,

3. il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ coincida con il valore della funzione in x_0.

Come vedremo nella Sezione 4.3, la continuità di f in un punto x_0 (di accumulazione e appartenente a D_f) cade non appena cade una delle tre condizioni summenzionate. In tal caso, si dice che x_0 è un *punto di discontinuità* per f.

- Ribadiamo che, nella (4.1.1), stiamo imponendo anche una condizione su f nel punto x_0, a differenza di quanto visto nella definizione di limite, ove il comportamento di f in x_0 è ininfluente.

Motivati dalle stesse considerazioni che ci hanno portato a introdurre i limiti unilateri, possiamo definire una nozione di continuità a destra/a sinistra di f in x_0, in termini dei limiti destro/sinistro.

Definizione 4.1.3. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per D_f, tale che $x_0 \in D_f$. Diciamo che f* è continua a destra in x_0 *se*

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)\,. \tag{4.1.2}$$

Diciamo che f è continua a sinistra in x_0 *se*

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\,. \tag{4.1.3}$$

Definizione 4.1.4. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia $A \neq \emptyset$ un insieme costituito da punti di accumulazione per D_f, tale che $A \subset D_f$. Diciamo che f* è continua in A *se f è continua (continua a destra/a sinistra, nei punti dove sia possibile calcolare solo limiti unilateri) in tutti i punti di A, e scriviamo $f \in \mathrm{C}^0(A)$.*

Esempio 4.1.5. Consideriamo le seguenti funzioni[1]:

$$f_1(x) := x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

$$f_2(x) := \begin{cases} x & x \neq 2\,, \\ 3 & x = 2 \end{cases}\,,$$

$$f_3(x) := \begin{cases} x & x \leq 2\,, \\ 3 & x > 2\,, \end{cases}$$

$$f_4(x) := \begin{cases} x & x < 2\,, \\ 3 & x \geq 2\,. \end{cases}$$

Si ha che $f_1 \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$; invece, f_2 è continua in $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e 2 è un punto di discontinuità: poiché $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$, f non è né continua a destra, né continua a sinistra in 2; inoltre, f_3 è continua in $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e 2 è un punto di discontinuità: poiché $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 = f(2)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$, f non è continua a destra, ma è continua a sinistra in 2; infine, f_4 è continua in $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e 2 è un punto di discontinuità: poiché $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 = f(2)$, f non è continua a sinistra, ma è continua a destra in 2.

Enunciamo ora un risultato sul legame fra la nozione di continuità e la continuità a destra/sinistra, che è analogo al Teorema 3.2.13 sul rapporto fra limite e limiti unilateri.

[1] Esercizio!: disegnarne il grafico.

Teorema 4.1.6. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per D_f, tale che $x_0 \in D_f$. Supponiamo che esista $r > 0$ tale che l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r) \subset D_f$*[2]*. Allora*

f è continua in x_0 se e solo se f è sia continua a destra, sia continua a sinistra in x_0.

La dimostrazione di questo risultato discende direttamente dalle Definizioni 4.1.1 e 4.1.3, e dal Teorema 3.2.13. In effetti,

$$\begin{gathered} f \text{ è continua in } x_0 \\ \Updownarrow \\ \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \\ \Updownarrow \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \\ \Updownarrow \\ f \text{ è continua a destra in } x_0 \quad \text{e} \quad f \text{ è continua a sinistra in } x_0. \end{gathered}$$

Esempio 4.1.7.

1. La funzione $f(x) := |x|$, con $D_f = \mathbb{R}$, è continua in $\mathbb{R}$: in effetti, per $x > 0$ essa coincide con la funzione continua $g(x) = x$, e analogamente per $x < 0$ essa coincide con la funzione continua $h(x) = -x$. Infine, $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$.

2. Consideriamo $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$, con $D_f = [-1, 1]$. Allora si verifica subito che f è continua in $(-1, 1)$. Agli estremi dell'intervallo si può solo considerare la continuità a destra/sinistra: ricordando l'Esempio 3.2.11, si conclude subito che f è sia continua a destra in -1, sia continua a sinistra in 1. Quindi $f \in C^0([-1, 1])$.

3. Consideriamo la *funzione di Heaviside*

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0\,, \\ 1 & x \geq 0\,. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Si vede subito che $H \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, mentre H è continua a destra, ma non a sinistra in $x_0 = 0$: allora, per il Teorema 4.1.6, H è discontinua in 0. Siccome

$$\nexists \lim_{x \to 0} H(x),$$

comunque si ridefinisca la funzione H in $x = 0$, non vi è modo di ottenere una funzione continua.

4. Consideriamo le funzioni

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0\,, \\ -1 & x < 0\,, \end{cases} \qquad \operatorname{sign}_0(x) := \begin{cases} 1 & x > 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \\ -1 & x < 0\,. \end{cases}$$

[2] stiamo cioè richiedendo che x_0 sia *interno* a D_f, si veda il Capitolo 5. Intuitivamente, ciò significa che f è definita sia a destra sia a sinistra di x_0: questo ovviamente ci permette di parlare sia di continuità a destra, sia di continuità a sinistra.

Si ha che sign è continua in dom(sign)$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ =: poiché $0 \notin$ dom(sign), non ha senso porsi il problema della continuità di sign in 0.
D'altra parte, sign_0 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ha in 0 un punto di discontinuità: in effetti, poiché $\lim_{x \to 0^+} \mathrm{sign}_0(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} \mathrm{sign}_0(x) = -1$, sign_0 non è né continua a destra, né continua a sinistra in 0. *Osserviamo che, comunque si ridefinisca la funzione* sign_0 *in* $x = 0$*, non vi è modo di ottenere una funzione continua: infatti, non esiste* $\lim_{x \to 0} \mathrm{sign}_0(x)$.

5. Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \qquad\qquad f_0(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0\,, \\ 57 & x = 0\,. \end{cases}$$

Si ha che f è continua nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Siccome $0 \notin \mathrm{dom}(f)$, non ha senso porsi il problema della continuità di f in 0.
D'altra parte, f_0 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ha in 0 un punto di discontinuità: in effetti, poiché $\lim_{x \to 0^+} f_0(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f_0(x) = -\infty$, f_0 non è né continua a destra, né continua a sinistra in 0. *Osserviamo che, comunque si ridefinisca la funzione* f_0 *in* $x = 0$*, non vi è modo di ottenere una funzione continua.* In effetti, $\nexists \lim_{x \to 0} f_0(x)$.

4.2 Proprietà della classe delle funzioni continue

Continuità delle funzioni elementari. Ricordando l'Esempio 3.2.7, concludiamo che **tutte le funzioni elementari** (cioè le funzioni potenza a esponente reale, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni trigonometriche e le trigonometriche inverse) **sono continue in ogni punto del loro dominio.**

Continuità e operazioni su funzioni. Il seguente risultato discende dall'analogo teorema su limiti e operazioni su funzioni (il Teorema 3.3.1).

Teorema 4.2.1. *Siano* f, $g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ *un punto di accumulazione per* D, $c \in \mathbb{R}$, *e* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. *Supponiamo che*

$$f \text{ e } g \text{ siano continue in } x_0.$$

Allora,

- *la funzione somma* $f + g$ *è continua in* x_0*;*
- *la funzione prodotto* $f \cdot g$ *è continua in* x_0*;*
- *la funzione* cf *è continua in* x_0*;*
- *se* $g(x_0) \neq 0$*, la funzione quoziente* $\frac{f}{g}$ *è continua in* x_0*.*
- *la funzione potenza* $(f)^{m/n}$ *è continua in* x_0 *se*

$$\begin{cases} f(x_0) \geq 0 & \text{nel caso } m \geq 0 \text{ e } n \text{ pari,} \\ \text{per qualsiasi valore } f(x_0) \in \mathbb{R} & \text{nel caso } m \geq 0 \text{ e } n \text{ dispari,} \\ f(x_0) > 0 & \text{nel caso } m < 0 \text{ e } n \text{ pari,} \\ f(x_0) \neq 0 & \text{nel caso } m < 0 \text{ e } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

In particolare, concludiamo che ogni funzione polinomiale è continua in $\mathbb{R}$, e che ogni funzione razionale fratta è continua sul suo dominio di definizione.

Continuità e composizione di funzioni.

Teorema 4.2.2. *Siano* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *e* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *tali che* $\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset$*, e sia* $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto di accumulazione per* $D_{f\circ g}$[3]*. Abbiamo i tre seguenti risultati:*

1. *Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L \in \mathbb{R}\,, \quad L \in D_f\,, \quad L \text{ sia un punto di accumulazione per } D_f\,, \tag{4.2.1}$$

$$f \text{ sia continua in } L. \tag{4.2.2}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right). \tag{4.2.3}$$

2. *Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L \in \mathbb{R}\,, \quad L \text{ sia un punto di accumulazione per } D_f\,, \tag{4.2.4}$$

$$\exists \lim_{y\to L} f(y) = M \in [-\infty, +\infty]\,, \tag{4.2.5}$$

$$\exists\, r > 0\ :\ \forall\, x \in D_g \cap \Big((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}\Big)\quad g(x) \neq L\,. \tag{4.2.6}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right). \tag{4.2.7}$$

3. *Supponiamo che*[4]

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\,, \tag{4.2.8}$$

$$\exists \lim_{y\to +\infty} f(y) = M \in [-\infty, +\infty]\,. \tag{4.2.9}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = M\,. \tag{4.2.10}$$

Osservazione 4.2.3.

- Si osservi che la (4.2.6) è verificata se, per esempio, g è iniettiva in un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0.
- Questo risultato si estende anche al caso in cui nella (4.2.1), o nella (4.2.4), o nella (4.2.8) si sostituisca a $\lim_{x\to x_0}$ un limite unilatero, oppure un limite per $x \to \pm\infty$.
- Questo risultato si estende anche alla composizione di un numero finito funzioni.
- Le formule (4.2.3), (4.2.7), (4.2.10) ci permettono, nel caso in cui le rispettive ipotesi siano verificate, di calcolare il limite per $x \to x_0$ della funzione composta $f \circ g$ in due passi: prima di tutto, calcoliamo il $\lim_{x\to x_0}$ della funzione interna g, e poi calcoliamo $f(\lim_{x\to x_0} g(x))$. Siamo cioè autorizzati (sotto le summenzionate ipotesi) a calcolare il limite $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ effettuando la sostituzione $y = g(x)$ e riducendo il problema al calcolo del limite $\lim f(y)$, per y tendente a L nei casi 1. e 2., e a $+\infty$ o $-\infty$ nel caso 3. Si veda l'Esempio 4.2.5.

[3] poiché $D_{f\circ g} \subset D_g$, questo implica che $x_0 \in \mathbb{R}$ è anche un punto di accumulazione per D_g.
[4] Vale un enunciato analogo nel caso in cui $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

- Osserviamo che tutte le ipotesi di entrambi i punti del teorema sono necessarie: in particolare, il prossimo esempio mostra che, se vale la (4.2.1) ma non la (4.2.2), la tesi (4.2.3) può essere falsa.

Esempio 4.2.4. Siano $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da

$$g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0\,, \\ 0 & x < 0\,, \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0\,, \\ 1 & y = 0\,. \end{cases}$$

Allora $\mathrm{im}(g) = [0, +\infty) \subset \mathrm{dom}(f)$ e la composizione è ben definita, con $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$. Prendiamo $x_0 = 0$: chiaramente $0 \in \mathrm{dom}(f \circ g)$ ed è un punto di accumulazione per $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$. Si ha che $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Ma ora f non è continua in $y = 0$ e infatti, calcolando

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0 & x > 0\,, \\ 1 & x \leq 0\,, \end{cases}$$

vediamo che $\nexists \lim_{x\to 0} f(g(x))$.

Vediamo ora qualche applicazione del Teorema 4.2.2 al calcolo dei limiti.

Esempio 4.2.5. Si ha:

1.
$$\lim_{x\to 0} \big(\arctan(x^4) + 2\ln(1 + \sin(x^2))\big) = 0\,.$$

   Infatti, $x^4 \to 0$ per $x \to 0$ ed, essendo la funzione arctan continua in 0, concludiamo che $\lim_{x\to 0} \arctan(x^4) = 0$. Allo stesso modo $x^2 \to 0$ per $x \to 0$, quindi grazie alla continuità di sin abbiamo che $\sin(x^2) \to 0$ e quindi per la continuità di ln concludiamo che $\lim_{x\to 0} \ln(1 + \sin(x^2)) = \ln(1) = 0$.

2.
$$\lim_{x\to 0^+} \left[\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\tan^4\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) + e^{-3/x^2}\right] = \frac{1}{2}\,.$$

   In effetti, sfruttando la continuità delle funzioni elementari osserviamo che

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{\pi}{2} \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \\ &\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \tan^4\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = 1 \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\tan^4\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) = \frac{1}{2}\,, \\ &\lim_{x\to 0^+} \left(-3/x^2\right) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} e^{-3/x^2} = 0\,. \end{aligned}$$

3.
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\sin(x)) = -\infty\,.$$

È conseguenza del punto 2. del Teorema 4.2.2: in effetti[5], $\sin(x) \to 0$ per $x \to 0^+$, e $\sin(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$, quindi la (4.2.6) è verificata. Allora,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\sin(x)) = \lim_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty.$$

4.
$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^3 \arctan(\ln(3x))} = +\infty\,.$$

Infatti $\ln(3x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, quindi $\arctan(\ln(3x)) \to \pi/2$ per $x \to +\infty$, e $x^3 \arctan(\ln(3x)) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Applicando la (4.2.10), concludiamo.

Il seguente risultato è un corollario diretto (della prima parte) del Teorema 4.2.2.

Corollario 4.2.6 (Continuità della funzione composta)**.** *Siano* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *e* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *tali che* $\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset$*, e sia* $x_0 \in D_{f\circ g}$ *un punto di accumulazione per* $D_{f\circ g}$*. Supponiamo che*

$$g \text{ sia continua in } x_0, \tag{4.2.11}$$
$$f \text{ sia continua in } g(x_0). \tag{4.2.12}$$

Allora $f \circ g$ *è continua in* x_0*, cioè* $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$*.*

In particolare, da questo risultato (che si estende alla composizione di un numero finito di funzioni) deduciamo che **tutte le funzioni date dalla composizione di funzioni elementari sono continue sul loro dominio di definizione**. Sono per esempio continue sul loro dominio

$$\begin{aligned}
&f_1(x) := \frac{e^{x^4}}{x^2+3x+2} + 3\sin(\ln(1+x^2)) \qquad \forall\, x \in D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}\,,\\
&f_2(x) := |x| \cdot \frac{x+3}{x-1} \qquad \forall\, x \in D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,,\\
&f_3(x) := x \cdot 2^x + \ln(\arctan(x)) + 4\tan(x) \qquad \forall\, x \in D_{f_3} = (0,+\infty) \cap \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}.
\end{aligned}$$

4.3 Classificazione dei punti di discontinuità

Osservazione 4.3.1. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$ un punto di accumulazione per D_f. Supponiamo che $x_0 \in D_f$ sia un punto di discontinuità per f. Possono allora presentarsi le seguenti situazioni:

- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ e $L \neq f(x_0)$;
- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \notin \mathbb{R}$;
- $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Diamo ora una classificazione più precisa dei punti di discontinuità.

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f$ (x_0 punto di accumulazione per D_f), un punto di discontinuità per f. Allora possono presentarsi questi casi:

[5] si noti che, per $x \to 0^+$, $\sin(x)$ assume valori positivi!

♣ *f ha una discontinuità eliminabile in x_0* se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad L \neq f(x_0)\,. \tag{4.3.1}$$

Per esempio, le funzioni

$$f_1(x) = \begin{cases} x & x \neq 0\,, \\ 1 & x = 0\,, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1\,, \\ 57 & x = 1\,, \end{cases}$$

hanno, rispettivamente, un punto di discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$ e in $x_0 = 1$. Questo tipo di discontinuità viene detto "eliminabile" perché, ridefinendo la funzione f in questo modo:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq x_0\,, \\ \lim_{x\to x_0} f(x) & x = x_0\,, \end{cases}$$

si ottiene una funzione $\tilde{f}$ continua in x_0. Si può cioè *eliminare* la discontinuità nel punto x_0.

♣ *f ha una discontinuità di prima specie (o di tipo salto) in x_0* se

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L^+ \in \mathbb{R}\,, \qquad \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L^- \in \mathbb{R}\,, \quad \text{e} \quad L^+ \neq L^-\,. \tag{4.3.2}$$

(quindi $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$). Per esempio, la funzione H di Heavidside definita dalla (4.1.4) ha in $x_0 = 0$ un punto di salto. Un altro esempio è dato da

$$f_3(x) := \begin{cases} -x & x \leq 0\,, \\ x-2 & x > 0\,. \end{cases}$$

In questo caso $x_0 = 0$ è un punto di salto per f_3, in quanto $\lim_{x\to 0^-} f_3(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f_3(x) = -2$.

♣ *f ha un punto di infinito in x_0* se

$$\begin{gathered} \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L^+\,, \qquad \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L^-\,, \\ \text{e almeno uno fra } L^+ \text{ e } L^- \text{ è infinito.} \end{gathered} \tag{4.3.3}$$

Per esempio,

$$f_4(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \end{cases} \qquad f_5(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \end{cases} \qquad f_6(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0\,, \\ 0 & x \leq 0\,. \end{cases}$$

Per tutte queste funzioni $x_0 = 0$ è un punto di infinito. Si noti che $\exists \lim_{x\to 0} f_4(x) = \lim_{x\to 0^+} f_4(x) = \lim_{x\to 0^-} f_4(x) = +\infty$, mentre $\nexists \lim_{x\to 0} f_5(x)$ (si riveda l'Esempio 3.4.7) e $\nexists \lim_{x\to 0} f_6(x)$: in quest'ultimo caso, $\lim_{x\to 0^+} f_6(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x\to 0^-} f_6(x) = 0$.

♣ *f ha un punto di discontinuità di seconda specie in x_0* se

$$\text{non esiste almeno uno fra } \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x\to x_0^-} f(x). \tag{4.3.4}$$

Per esempio,

$$f_7(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0\,, \\ 0 & x \le 0\,, \end{cases} \qquad f_8(x) := \begin{cases} 0 & x \ge 0\,, \\ \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0\,. \end{cases}$$

Si noti in entrambi i casi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie: infatti $\nexists \lim_{x\to 0^+} f_7(x)$ (cf. con L'Esempio 3.3.4) e neppure $\nexists \lim_{x\to 0^-} f_8(x)$; d'altra parte, la funzione f_7 è limitata su $\mathbb{R}$ ($-1 \le f_7(x) \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$), mentre f_8 non è limitata su $(-\infty, 0)$: per $x < 0$ il suo grafico è infatti compreso fra i grafici delle funzioni $g(x) = -\frac{1}{x}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$.

4.4 Funzioni continue su intervalli

Nel seguito, considereremo funzioni definite su intervalli e ivi continue. La continuità e l'ipotesi che il dominio sia un intervallo sono alla base dei seguenti risultati, che precisano alcune importanti proprietà delle funzioni in questione e del loro grafico.

Il teorema di Weierstrass.

Definizione 4.4.1. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$. Un punto $x_m \in D_f$ viene detto* punto di minimo assoluto *per f se*

$$f(x_m) \le f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,, \tag{4.4.1}$$

e il corrispondente valore $f(x_m)$ viene detto valore di minimo assoluto *per f.*

Un punto $x_M \in D_f$ viene detto punto di massimo assoluto *per f se*

$$f(x_M) \ge f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,, \tag{4.4.2}$$

e il corrispondente valore $f(x_M)$ viene detto valore di massimo assoluto *per f.*

Osserviamo che, di fatto,

$$f(x_m) = \min\{f(x) \,:\, x \in D_f\} = \min \operatorname{im}(f)\,, \qquad f(x_M) = \max\{f(x) \,:\, x \in D_f\} = \max \operatorname{im}(f)\,,$$

quindi sia il valore di massimo assoluto sia il valore di minimo assoluto, se esistono, sono univocamente determinati, mentre a priori una funzione potrebbe avere più punti di minimo (massimo) assoluto. Per esempio, la funzione $W : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ data da[6]

$$W(x) := \begin{cases} |x| & x \in [-1, 1]\,, \\ |x - 2| & x \in (1, 3]\,, \end{cases}$$

ha in $[-1, 3]$ due punti di minimo assoluto (sono i punti $x_m^1 = 0$ e $x_m^2 = 2$, corrispondenti al valore di minimo assoluto $m = 0$) e tre punti di massimo assoluto (sono $x_M^1 = -1$, $x_M^2 = 1$, e $x_M^3 = 3$, corrispondenti al valore di massimo assoluto $M = 1$).

Ci chiediamo se, data una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$, essa ammette almeno un punto di minimo, e almeno un punto di massimo assoluto. Questo è in generale FALSO, come mostra il seguente

[6] **Esercizio!**: disegnarne il grafico!

Esempio 4.4.2. Consideriamo le funzioni:

1. $f(x) := e^x$, ristretta all'intervallo $I = [0, +\infty)$. In questo caso si ha che $f(x) \geq f(0) = 1$ per ogni $x \geq 0$, quindi $x_m = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto per f su $[0, +\infty)$. Poiché $\mathrm{im}(f) = [1, +\infty)$, $\sup \mathrm{im}(f) = +\infty$ e quindi $\mathrm{im}(f)$ non ammette massimo. Pertanto f non ha alcun punto di massimo assoluto su I.

2. $f(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi $\inf(\mathrm{im}(f)) = 0 \notin \mathrm{im}(f)$. Pertanto $\mathrm{im}(f)$ non ammette minimo, quindi f non ha né massimo, né minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = \tan(x)$, ristretta all'intervallo $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Poiché $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, tan non ammette né un punto di minimo, né un punto di massimo assoluto.

Osserviamo tutte le funzioni in questione sono continue, e che nel primo e nel secondo esempio l'intervallo di definizione è illimitato, mentre nel terzo l'intervallo è aperto. Diamo ora l'esempio di una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato, che però non ammette né minimo né massimo assoluto.

Esempio 4.4.3. Consideriamo la funzione $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 2 & x = 0\,, \\ x & x \in (0, 3)\,, \\ 1 & x = 3\,. \end{cases}$$

Disegnandone il grafico, osserviamo che f non ammette né un punto di minimo, né un punto di massimo assoluto. Notiamo che f non è continua in $[0, 3]$: in effetti, f è continua su $(0, 3)$, ma non è continua a sinistra in $x = 0$, e non è continua a destra in $x = 3$.

Tenendo conto degli esempi precedenti, congetturiamo che l'esistenza o meno di un punto di minimo/massimo assoluto dipenda sia da proprietà dell'intervallo di definizione (che dovrà essere chiuso e limitato, e denoteremo il generico intervallo chiuso e limitato con $[a, b]$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$), sia da proprietà della funzione (che dovrà essere continua). Questo è quanto asserito dal

Teorema 4.4.4 (Weierstrass)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, f ha almeno un punto di minimo assoluto e almeno un punto di massimo assoluto in $[a, b]$, cioè*

$$\exists\, x_m \in [a, b]\,, \ \ \exists\, x_M \in [a, b]\ : \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \ \ \forall\, x \in [a, b]\,. \tag{4.4.3}$$

Vediamo subito un'immediata conseguenza di questo risultato.

Corollario 4.4.5. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è limitata su $[a, b]$, cioè*

$$\exists\, K > 0\ : \quad -K \leq f(x) \leq K \ \ \forall\, x \in [a, b]\,. \tag{4.4.4}$$

Dimostrazione. Dalla (4.4.3) segue che, essendo $m := f(x_m)$ e $M := f(x_M)$, $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora la (4.4.4) segue ponendo $K := \max\{|m|, |M|\}$. □

Per esempio, il Teorema 4.4.4 e il Corollario 4.4.5 garantiscono che la funzione[7]

$$f(x) := x^4 + \arctan\big(\sin(3x^2)\big) + \frac{x\cos(x)}{x^2 + 2} \quad \forall\, x \in D_f = \mathbb{R}\,,$$

[7] lo studio del suo grafico qualitativo potrebbe essere complesso.

è limitata ed ammette almeno un punto di minimo e almeno un punto di massimo assoluto su ogni intervallo del tipo $[a, b]$, con a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. In effetti, essa è continua (sul suo dominio, che è $\mathbb{R}$, quindi in particolare su $[a, b]$) in quanto data da somme/prodotti/quozienti/composizioni di funzioni continue. Allo stesso modo, la funzione

$$f(x) = \exp\left(x^3 + 1\right) \arctan(x) + \arcsin(\tan(x)),$$

definita su

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z},\, |\tan(x)| \leq 1\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] = \ldots \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right] \cup \ldots$$

è continua su D_f, in quanto data dalla somma/prodotto/composizione di funzioni continue. Quindi f ammette almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo assoluto su ogni intervallo (chiuso e limitato) della forma $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 4.4.6.
- Osserviamo che il Teorema di Weierstrass garantisce **solo l'esistenza, e non l'unicità** dei punti di minimo/massimo assoluto. Per esempio, la funzione

  $$f(x) := |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

  ha sull'intervallo $[-1, 1]$ un (unico) punto di minimo assoluto: $x_m = 0$, e due punti di massimo assoluto: $x_M^1 = 1$ e $x_M^2 = -1$. D'altra parte, la funzione $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

  $$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0], \\ x & \text{se } x \in (0, 1], \\ 1 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

  ha infiniti punti di minimo assoluto (tutti i punti dell'intervallo $[-1, 0]$) e infiniti punti di massimo assoluto (tutti i punti dell'intervallo $[1, 2]$).

- Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie: in altri termini, tralasciandone anche solo una, la tesi non vale.
  - La funzione $f_1(x) = \frac{1}{x}$, che consideriamo sull'intervallo $I_1 = (0, 1]$, è continua su I_1, ha in $x_m = 1$ un punto di minimo assoluto, ma non ammette alcun punto di massimo assoluto. Si noti però che I_1, pur essendo limitato, non è chiuso.
  - La funzione $f_2(x) = x^2$ è continua su $I_2 = \mathbb{R}$, ha in $x_m = 0$ l'unico punto di minimo assoluto, ma non ammette punti di massimo assoluto. In effetti, I_2 non è limitato.
  - La funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$

    $$f(x) := \begin{cases} x + 1 & x \in [0, 1)\,, \\ 1 & x = 1\,, \\ x - 1 & x \in (1, 2]\,, \end{cases}$$

    non ha né un punto di minimo né un punto di massimo assoluto su $[0, 2]$. Si noti però che f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, mentre ha in 1 un punto di discontinuità di tipo salto. Quindi è sufficiente far cadere la continuità anche in un solo punto dell'intervallo di definizione, per rendere falsa la (4.4.3).

Il teorema di Bolzano (o degli zeri).

Teorema 4.4.7 (Bolzano)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che*[8]

$$f(a) \cdot f(b) < 0\,. \tag{4.4.5}$$

Allora

$$\exists\, x_0 \in (a, b)\; : \quad f(x_0) = 0\,. \tag{4.4.6}$$

Il punto x_0 di annullamento di f viene anche detto zero di f.

Osservazione 4.4.8.

- Dalla (4.4.5) segue in particolare che $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$: quindi lo zero x_0 di f "deve trovarsi" in (a, b).
- Il teorema di Bolzano garantisce **solo l'esistenza, e non l'unicità** dei punti di annullamento di f: in effetti
  - la funzione $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := x - 2$ per ogni $x \in [1, 3]$ ha in $x_0 = 2$ il suo unico zero.
  - La funzione $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) := x^3 - x = x(x^2 - 1)$ per ogni $x \in [-2, 2]$ ha tre zeri: $x_0^1 = -1$, $x_0^2 = 0$, e $x_0^3 = 1$.
  - La funzione $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definita da[9]
  $$h(x) = \begin{cases} x - 1 & x \in [0, 1]\,, \\ 0 & x \in (1, 2]\,, \\ x - 2 & x \in (2, 3]\,, \end{cases}$$
  ha infiniti zeri (tutti i punti dell'intervallo $[1, 2]$).

Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie, come mostrano i seguenti controesempi:

Esempio 4.4.9.

1. La funzione $f_1 : [-2, 1] \to \mathbb{R}$
$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x < 0\,, \\ 1 & 0 \leq x \leq 1\,, \end{cases}$$
verifica la (4.4.5), ma non ammette alcun punto di annullamento. Si noti che f è continua su $[-2, 1] \setminus \{0\}$. Quindi l'esistenza di un solo punto di discontinuità è sufficiente a far cadere la (4.4.6).
2. Consideriamo la funzione $f_2(x) = e^{-x}$, con $x \in [-1, 1]$. Si ha che $f_2 \in C^0([-1, 1])$, ma f_2 non si annulla in nessun punto di $[-1, 1]$. Notiamo che $f_2(-1) = e > 0$ e $f_2(1) = 1/e > 0$, quindi la (4.4.5) è violata.

Mostriamo ora un'applicazione del teorema di Bolzano alla localizzazione degli zeri di una funzione f continua. Come vedremo, l'idea è che il Teorema 4.4.7 non viene applicato sull'intero dominio di definizione di f, ma alla restrizione di f a un sottointervallo (chiuso e limitato), agli estremi del quale è verificata la condizione (4.4.5).

Esempio 4.4.10 (Localizzazione degli zeri di un polinomio)**.** Dimostriamo che esiste una radice x_0 dell'equazione $x^4 - x - 2 = 0$ verificante $x_0 \in [1, 2]$. A questo scopo, consideriamo la funzione polinomiale $P(x) := x^4 - x - 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: P è continua su $\mathbb{R}$ e $P(1) = -2$, mentre $P(2) = 12$. Quindi, grazie al Teorema 4.4.7 concludiamo che, di fatto, l'equazione ammette almeno una radice $x_0 \in (1, 2)$.

[8] questo significa che, agli estremi dell'intervallo di definizione, f deve assumere valori discordi!

[9] **Esercizio!**: disegnarne il grafico!

Il teorema dei valori intermedi. È il corollario più significativo del Teorema di Bolzano.

Teorema 4.4.11 (Valori intermedi (I))**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora,* f *assume almeno una volta ogni valore* y *compreso fra il suo valore* m *di minimo assoluto su* $[a,b]$ *e il suo valore* M *di massimo assoluto su* $[a,b]$ *.*

Facciamo qualche commento su questo enunciato: ricordiamo che, grazie al Teorema di Weierstrass, poiché $f \in C^0([a,b])$ esistono $x_m \in [a,b]$ e $x_M \in [a,b]$ tali che $m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M$ per ogni $x \in [a,b]$. In altri termini,

$$\mathrm{im}(f) \subset [m, M]\,. \tag{4.4.7}$$

Ora, il Teorema 4.4.11 afferma che, se $f \in C^0([a,b])$, per ogni $y \in [m,M]$ esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = y$. In altri termini, per ogni $y \in [m,M]$ si ha che $y \in \mathrm{im}(f)$, cioè vale

$$[m, M] \subset \mathrm{im}(f)\,. \tag{4.4.8}$$

Combinando la (4.4.7) e la (4.4.8), si conclude che $\mathrm{im}(f) = [m,M]$, cioè che **l'insieme immagine di f è un intervallo** (più precisamente, l'intervallo $[m,M]$).

In effetti, il Teorema dei valori intermedi si potrebbe anche enunciare in questa forma:

Teorema 4.4.12 (Valori intermedi (II))**.** *Sia* I *un intervallo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora,* $\mathrm{im}(f)$ *è un intervallo.*

L'interpretazione grafica di questo risultato è immediata: il grafico di una funzione continua su un intervallo non presenta interruzioni e può essere tracciato senza staccare la matita dal foglio.

Dimostrazione del Teorema 4.4.11. Siano $x_m \in [a,b]$ e $x_M \in [a,b]$ un punto di minimo e, rispettivamente, di massimo assoluto per f su $[a,b]$. Per fissare le idee, supponiamo che $x_m < x_M$. Dimostriamo che vale la (4.4.8), cioè che

$$\forall\, y \in (m, M) \;\; \exists\, x \in [a,b] : \;\; y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y - f(x) = 0. \tag{4.4.9}$$

(chiaramente, essendo $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$, si ha che $m,\, M \in \mathrm{im}(f)$.) Per fare ciò, fissato $y \in (m,M)$ introduciamo la funzione $g_y(x) := y - f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Osserviamo che g_y è continua, in quanto è data dalla differenza di una costante e di una funzione continua. Applichiamo il Teorema degli zeri alla restrizione di g_y all'intervallo $[x_m, x_M]$. Usando la (4.4.3), si vede subito che $g_y(x_m) = y - f(x_m) > 0$ e $g_y(x_M) = y - f(x_M) < 0$. Allora, grazie al Teorema 4.4.7 concludiamo che esiste $x \in (x_m, x_M)$ tale che $y = f(x)$. Ripetendo il ragionamento per ogni $y \in (m,M)$, concludiamo la (4.4.9). □