

QUINTO FOGLIO DI ESERCIZI (soluzioni)

Calcolo di integrali indefiniti e definiti vari.

1. Si ha

$$\int \left((x+2)^5 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{6}(x+2)^6 + \arctan(x) + c$$

quindi l'area compresa fra il grafico di $f(x) = (x+2)^5 + \frac{1}{1+x^2}$, per $x \in [0, 1]$ e l'asse delle x è

$$A = \left[\frac{1}{6}(x+2)^6 + \arctan(x) \right]_0^1 = \frac{1}{6}(3^6 - 2^6) + \frac{\pi}{4}.$$

2. Calcolare

$$\int_{-1}^1 \left[x^5 \cos(\arctan(x^3)) + \frac{1}{1+7x^2} \right] dx;$$

La funzione $f(x) = x^5 \cos(\arctan(x^3))$ è dispari, in quanto

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 \cos(\arctan((-x)^3)) = -x^5 \cos(\arctan(-x^3)) = -x^5 \cos(-\arctan(x^3)) \\ &= -x^5 \cos(\arctan(x^3)) \end{aligned}$$

quindi

$$\int_{-1}^1 x^5 \cos(\arctan(x^3)) dx = 0$$

mentre la funzione $g(x) = \frac{1}{1+7x^2}$ è pari, quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+7x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+7x^2} dx = 2 \left[\frac{1}{\sqrt{7}} \arctan(x\sqrt{7}) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan(\sqrt{7}).$$

3. Calcolare la primitiva $G : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

tale che $G(0) = 0$: si osservi che

$$\int \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx - \int 1 dx = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) - x + c$$

quindi

$$\int \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}) + 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) - x + c.$$

Trovo G imponendo che $G(0) = 0$, da cui

$$0 = G(0) = \frac{1}{4}(1+1) + 2 \tan(0) - 0 + c = \frac{1}{2} + c$$

quindi $c = -\frac{1}{2}$ e

$$G(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}) + 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) - x - \frac{1}{2}.$$

Infine, calcolare l'area compresa fra il grafico di della funzione G' , sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{6}]$, e l'asse delle x : si osservi che $G'(x) = f(x)$, quindi l'area in questione è

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/6} \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x}) + 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) - x \right]_0^{\pi/6} \\ &= \frac{1}{4} (e^{\pi/3} + e^{-\pi/3}) + 2 \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}(1+1) - 0 \\ &= \frac{1}{4} (e^{\pi/3} + e^{-\pi/3}) + 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\cos(x^4)} + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(5x) \right) dx$$

Si ha

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\cos(x^4)} dx = 0$$

in quanto la funzione $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\cos(x^4)}$ è dispari (**verificare!**). Analogamente, per disparità della funzione $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ si ha

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = 0$$

mentre

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(5x) dx = \left[\frac{1}{5} \sin(5x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{5} \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \frac{2}{5}.$$