Esercizi sulla formula per la derivazione della composizione di campi vettoriali

Richiami di teoria. Siano n, $m \in \mathbb{N}$, n, $m \geq 1$, e sia

$$\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{un campo vettoriale}$$

(con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto), quindi

$$\overrightarrow{F}(x) = F_1(x)\overrightarrow{i}_1 + \ldots + F_m(x)\overrightarrow{i}_m = (F_1(x), \ldots, F_m(x)) \quad \forall\, x \in A \subset \mathbb{R}^n,$$

e chiamiamo *funzioni componenti* i campi scalari $F_k : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $k = 1, \ldots, m$.

Ricordiamo che $\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 \in A$ se e solo se per ogni $k = 1, \ldots, m$ le funzioni F_k sono differenziabili (nel senso dei campi scalari) in x_0. Allora sono ben definiti i vettori gradienti

$$\nabla F_k(x_0) = \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0)\right) \quad \text{per ogni } k = 1, \ldots, m.$$

La matrice $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ di m righe e n colonne

$$\mathrm{J}_{\overrightarrow{F}}(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla F_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

si chiama **matrice jacobiana** di $\overrightarrow{F}$ in x_0 e contiene **tutte** le "informazioni differenziali" su $\overrightarrow{F}$ in x_0.

Derivazione della funzione composta. Siano p, n, $m \geq 1$ e siano dati

$$\overrightarrow{G} : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \qquad A \subset \mathbb{R}^p \text{ aperto}, \quad \overrightarrow{F} : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad B \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto},$$

tali che $\mathrm{im}(\overrightarrow{G}) \subset B$. Quindi è definito il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{G} : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m.$$

Sia $x_0 \in A$ e supponiamo che

- $\overrightarrow{G}$ sia differenziabile in $x_0 \;\Rightarrow\; \mathrm{J}_{\overrightarrow{G}}(x_0)$
- $\overrightarrow{F}$ sia differenziabile in $\overrightarrow{G}(x_0) \;\Rightarrow\; \mathrm{J}_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{G}(x_0))$.

Allora, $\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{G}$ è differenziabile in x_0 e

$$\mathrm{J}_{\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{G}}(x_0) = \mathrm{J}_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{G}(x_0)) \cdot \mathrm{J}_{\overrightarrow{G}}(x_0) \quad \text{ove } \cdot \text{ prodotto di matrici.}$$

Osservazioni:

- è la generalizzazione della formula per la derivazione della composizione di funzioni di variabile reale, a valori in $\mathbb{R}$:
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

- il prodotto matriciale è ben definito perché

$$\mathrm{J}_{\overrightarrow{G}}(x_0) \ \text{ matrice } n \times p$$
$$\mathrm{J}_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{G}(x_0)) \ \text{ matrice } m \times n$$

  quindi ricordando

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$$

  otteniamo che

$$\mathrm{J}_{\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{G}}(x_0) \ \text{ matrice } m \times p$$

  come deve essere perché

$$\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{G} : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m.$$

- ora <u>abbandoniamo</u> la notazione $\overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{F}$ per trattare in modo unificato campi scalari e vettoriali..

Esercizio 1. Date

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ G(x) := \sin(x), \qquad F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ \ F(y) = \begin{pmatrix} y^3 \\ \arctan(y) \end{pmatrix}$$

calcolare

$$\mathrm{J}_{F \circ G}(x) \quad \forall\, x \in \mathrm{dom}(F \circ G) = \mathbb{R}.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\mathrm{J}_{F \circ G}(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché

- G è differenziabile su $\mathbb{R}$ e

$$\mathrm{J}_G(x) = G'(x) = \cos(x) \in \mathbb{R} \ \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

- F (con funz. componenti $F_1(y) = y^3$ e $F_2(y) = \arctan(y)$) è differenziabile su $\mathbb{R}$ e

$$\mathrm{J}_F(y) = \begin{pmatrix} F_1'(y) \\ F_2'(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y^2 \\ \dfrac{1}{1+y^2} \end{pmatrix} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Siccome $F \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, mi aspetto che $\mathrm{J}_{F \circ G}(x)$ sia matrice 2×1, cioè un vettore <u>colonna</u> di $\mathbb{R}^2$.

In effetti per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{J}_{F \circ G}(x) = \mathrm{J}_F(G(x)) \cdot \mathrm{J}_G(x) = G'(x)\mathrm{J}_F(G(x)) = \cos(x) \begin{pmatrix} 3\sin^2(x) \\ \dfrac{1}{1+\sin^2(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin^2(x)\cos(x) \\ \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} \end{pmatrix} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Date

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \ G(x_1, x_2) := \sin(x_1^2\, x_2), \qquad F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ F(y) = y^2 + y^3$$

calcolare

$$\mathrm{J}_{F \circ G}(x_1, x_2) \quad \forall\, (x_1, x_2) \in \mathrm{dom}(F \circ G) = \mathbb{R}^2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\mathrm{J}_{F\circ G}(x_1,x_2)$ è ben definito per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}$ perché

- G è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$
$$\mathrm{J}_G(x_1,x_2)=\nabla G(x_1,x_2)=\big(2x_1x_2\cos(x_1^2x_2),x_1^2\cos(x_1^2x_2)\big)\in\mathbb{R}^2,$$
- F è differenziabile su $\mathbb{R}$ e
$$\mathrm{J}_F(y)=F'(y)=2y+3y^2\quad\forall\, y\in\mathbb{R}.$$

Siccome $F\circ G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, mi aspetto che $\mathrm{J}_{F\circ G}(x)$ sia matrice 1×2, cioè un vettore riga di $\mathbb{R}^2$ (il vettore gradiente!). In effetti per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\nabla(F\circ G)(x_1,x_2)=\mathrm{J}_{F\circ G}(x_1,x_2)&=F'(G(x_1,x_2))\nabla G(x_1,x_2)\\&=(2\sin(x_1^2x_2)+3\sin^2(x_1^2\,x_2))\cdot\big(2x_1x_2\cos(x_1^2x_2),x_1^2\cos(x_1^2x_2)\big)\\&=(2\sin(x_1^2x_2)+3\sin^2(x_1^2\,x_2))(2x_1x_2\cos(x_1^2x_2))\overrightarrow{i}_1\\&\quad+(2\sin(x_1^2x_2)+3\sin^2(x_1^2\,x_2))x_1^2\cos(x_1^2x_2)\overrightarrow{i}_2\end{aligned}$$

Esercizio 3. Date

$$\begin{aligned}G:&\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad G(x_1,x_2):=x_2\overrightarrow{i}_1+x_1\overrightarrow{i}_2+x_2\overrightarrow{i}_3\\F:&\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad F(y_1,y_2,y_3)=y_1y_2\overrightarrow{i}_1+y_3^2\overrightarrow{i}_2\end{aligned}\tag{1}$$

calcolare
$$\mathrm{J}_{F\circ G}(x_1,x_2)\quad\forall\,(x_1,x_2)\in\mathrm{dom}(F\circ G)=\mathbb{R}^2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\mathrm{J}_{F\circ G}(x_1,x_2)$ è ben definito per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ perché

- $G=(G_1,G_2,G_3)$ è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$
$$\mathrm{J}_G(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\nabla G_1(x_1,x_2)\\\nabla G_2(x_1,x_2)\\\nabla G_3(x_1,x_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
- F è differenziabile su $\mathbb{R}^3$ e per ogni $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$
$$\mathrm{J}_F(y_1,y_2,y_3)=\begin{pmatrix}\nabla F_1(y_1,y_2,y_3)\\\nabla F_2(y_1,y_2,y_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2&y_1&0\\0&0&2y_3\end{pmatrix}$$

Siccome $F\circ G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, mi aspetto che $\mathrm{J}_{F\circ G}(x_1,x_2)$ sia una matrice 2×2. In effetti per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{J}_{F\circ G}(x_1,x_2)=\mathrm{J}_F(G(x_1,x_2))\cdot\mathrm{J}_G(x_1,x_2)\qquad(\cdot\text{ prodotto matriciale})$$
$$\begin{pmatrix}x_1&x_2&0\\0&0&2x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2&x_1\\0&2x_2\end{pmatrix}$$

Esercizio assegnato. Date G e F come in (1), calcolare $\mathrm{J}_{G\circ F}(y_1,y_2,y_3)$ per ogni $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ (si noti che sarà una matrice 3×3).
