Foglio di esercizi sulla trasformata di Fourier[1]

Ricordare la notazione $\exp(y) = e^y$ e inoltre che, dato un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^N$, si denota con il simbolo χ_A la funzione caratteristica di A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

e che $H : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ denota la funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esercizi.

1. Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$u_1(x) = H(-x)e^x, \qquad u_2(x) = e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

2. Dato un numero reale $a > 0$, si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$u_1(x) = \chi_{(-a,a)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

   Verificare il risultato ottenuto partendo dalla trasformata di Fourier della funzione $u_0(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$, ottenendo u_1 da u_0 tramite un opportuno cambiamento di variabile, e infine applicando le formule che legano la trasformata di Fourier e l'operazione di omotetia.

3. A partire dalle trasformate di Fourier delle funzioni $u_0(x) = H(x)e^{-x}$ e $u_1(x) = H(-x)e^x$, applicando opportunamente le formule note calcolare le trasformate di Fourier di

$$u_2(x) = xH(x)e^{-x}, \qquad u_3(x) = (x-2)H(x)e^{-3x},$$
$$u_4(x) = xH(x-2)e^{-3(x-2)}, \qquad u_5(x) = (-2-x)H(-x)e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

4. Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

   è la funzione

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \pi e^{-|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}\,,$$

   e usando le formule che legano la trasformata di Fourier e le operazioni di traslazione/omotetia, calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni

$$u_1(x) = \frac{1}{x^2+4}, \qquad u_2(x) = \frac{1}{1+(x-3)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

[1] Svolgere l'esercizio 10. SOLO dopo l'esercitazione di martedì 16.03.2010.

5. Usando le formule che legano trasformata di Fourier e derivazione, calcolare la trasformata di Fourier di
$$u(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6. Calcolare la trasformata di Fourier di
$$u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Dedurre il valore dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx.$$
Suggerimento: osservare che
$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

7. Usando (per v e w), le formule che legano trasformata di Fourier e derivazione, e usando per z le formule che legano trasformata di Fourier e traslazione, calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni
$$v(x) = x\exp(-\pi x^2), \qquad w(x) = 2x^2\exp(-\pi^2 x^2), \qquad z(x) = e^{-\pi(x-i)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

8. Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni
$$u_1(t) = (2t-4)e^{-4t^2+8t}, \qquad u_2(t) = \sin(t)te^{-t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
Suggerimento: per il calcolo di $\mathcal{F}(u_1)$, "completare il quadrato" all'esponente di $\exp(\cdot)$; per il calcolo di $\mathcal{F}(u_2)$, esprimere sin mediante funzioni esponenziali.

9. Calcolare i seguenti integrali
$$\int_0^{+\infty} \cos(2\pi x)e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\pi x}\,\mathrm{d}x.$$
Suggerimento: per il primo integrale, calcolare $\mathcal{F}(\cos(2\pi x)e^{-\pi x^2})$ e poi il valore $\mathcal{F}(\cos(2\pi x)e^{-\pi x^2})(0)$..; procedere analogamente per il secondo integrale.

10. Usando il teorema di Plancherel, calcolare
$$\left\| \frac{x}{1+x^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$
Verificare il risultato ottenuto sulla base dell'esercizio 5.