

Il metodo della separazione delle variabili per l'equazione delle onde unidimensionale, con termini di ordine inferiore

L'equazione delle onde con una perturbazione di ordine zero e condizioni di Dirichlet omogenee al bordo. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t) = 0 & \forall x \in (0, \ell), \forall t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \forall x \in (0, \ell), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) & \forall x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \forall t > 0. \end{cases}$$

Condizioni di compatibilità sui dati del problema Condizione necessaria perché il problema (1) ammetta una soluzione $u \in C^2([0, \ell] \times [0, +\infty))$ è che

$$f(0) = f(\ell) = 0, \quad g(0) = g(\ell) = 0.$$

In effetti, se $u \in C^2([0, \ell] \times [0, +\infty))$ risolve (1), allora

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, 0) = u(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(0, t) = 0,$$

e analogamente si vede che $f(\ell) = 0$. Inoltre, derivando rispetto al tempo le condizioni di Dirichlet omogenee otteniamo che

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}(\ell, t) \quad \forall t > 0,$$

da cui

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0,$$

e analogamente si dimostra che $g(\ell) = 0$.

Separazione delle variabili Ricercare una soluzione non identicamente nulla

$$u = u(x, t) = X(x)T(t), \quad \text{con } X : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}, \quad T : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Imponendo che u risolva l'equazione ottengo

$$T''(t)X(x) - c^2 X''(x)T(t) + X(x)T(t) = 0 \quad \forall x \in (0, \ell), \forall t > 0.$$

Dividendo per $c^2 X(x)T(t)$ si conclude che

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{c^2} \quad \forall x \in (0, \ell), \forall t > 0.$$

Allora esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = K & \forall t > 0, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{c^2} = K & \forall x \in (0, \ell), \end{cases}$$

da cui

$$(2) \quad \begin{cases} T''(t) - c^2 K T(t) = 0 & \forall t > 0, \\ X''(x) - M X(x) = 0 & \forall x \in (0, \ell), \end{cases} \quad \text{con } M = K + \frac{1}{c^2}$$

Segno di M Imponendo le condizioni di Dirichlet omogenee si ottiene il problema

$$(3) \quad \begin{cases} X''(x) - MX(x) = 0 & \forall x \in (0, \ell), \\ X(0) = X(\ell) = 0, \end{cases}$$

e si vede che esso ammette soluzioni non identicamente nulle SE E SOLO SE $M < 0$ ed è della forma

$$M = -\left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1.$$

Corrispondentemente a tali valori di M , l'integrale generale di (6) è

$$X(x) = C \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) \quad x \in [0, \ell], \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria,}$$

e quindi sostituendo $K + \frac{1}{c^2} = -(n\frac{\pi}{\ell})^2$ nell'equazione per T e risolvendola, si arriva a

$$T(t) = c_1 \cos\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}t\right) + c_2 \sin\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}t\right) \quad t \in [0, +\infty),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.

Quindi per ogni $n \geq 1$ ho infinite soluzioni u_n (del problema ottenuto accoppiando l'equazione alle sole condizioni di Dirichlet omogenee) della forma

$$u_n(x, t) = \left(\alpha_n \cos\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}t\right) + \beta_n \sin\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}t\right)\right) \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) \quad x \in [0, \ell], \quad t \in [0, +\infty).$$

Ricerco una soluzione u della forma

$$(4) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n \cos\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}t\right) + \beta_n \sin\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}t\right)\right) \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right),$$

$$x \in [0, \ell], \quad t \in [0, +\infty).$$

Condizioni iniziali Imponendo le condizioni iniziali trovo che per ogni $n \geq 1$

$$\alpha_n = a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\ell f(x) \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) dx$$

(i coefficienti di Fourier del prolungamento di f a una funzione 2π -periodica su \mathbb{R} , dispari), e

$$\beta_n = \frac{b_n}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}}, \quad \text{con } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\ell f(x) \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) dx$$

(cioè i b_n sono i coefficienti di Fourier del prolungamento di g a una funzione 2π -periodica su \mathbb{R} , dispari).

Convergenza della serie Si vede che la serie di funzioni in (4) converge uniformemente su $[0, \ell] \times [0, +\infty)$ con le sue derivate parziali prime e seconde a una funzione $u \in C^2([0, \ell] \times [0, +\infty))$, soluzione di (1), se f e g soddisfano le seguenti condizioni (oltre alle summenzionate condizioni di compatibilità):

- $f \in C^2([0, \ell])$, f derivabile tre volte su $[0, \ell]$ con f''' (a quadrato) integrabile su $[0, \ell]$ (per esempio, questo è verificato se f è di classe C^3 a tratti su $[0, \ell]$), e infine

$$f''(0) = f''(\ell) = 0;$$

- $g \in C^1([0, \ell])$, g derivabile due volte su $[0, \ell]$ con g'' (a quadrato) integrabile su $[0, \ell]$ (per esempio, questo è verificato se g è di classe C^2 a tratti su $[0, \ell]$).

L'equazione delle onde con una perturbazione di ordine uno e condizioni di Neumann omogenee al bordo. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0 & \forall x \in (0, \pi), \forall t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \forall x \in [0, \pi], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) & \forall x \in [0, \pi], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

Condizioni di compatibilità sui dati del problema Condizione necessaria perché il problema (1) ammetta una soluzione $u \in C^2([0, \pi] \times [0, +\infty))$ è che

$$f'(0) = f'(\pi) = 0, \quad g'(0) = g'(\pi) = 0.$$

Separazione delle variabili Ricercare una soluzione non identicamente nulla

$$u = u(x, t) = X(x)T(t), \quad \text{con } X : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad T : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Imponendo che u risolva l'equazione ottengo

$$T''(t)X(x) - X''(x)T(t) + 2X(x)T'(t) = 0 \quad \forall x \in (0, \pi), \forall t > 0.$$

Dividendo per $X(x)T(t)$ si conclude che

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 2\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \forall x \in (0, \pi), \forall t > 0.$$

Allora esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} + 2\frac{T'(t)}{T(t)} = K & \forall t > 0, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = K & \forall x \in (0, \pi), \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} T''(t) + 2T'(t) - KT(t) = 0 & \forall t > 0, \\ X''(x) - KX(x) = 0 & \forall x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Segno di K Imponendo le condizioni di Neumann omogenee si ottiene il problema

$$(6) \quad \begin{cases} X''(x) - KX(x) = 0 & \forall x \in (0, \pi), \\ X'(0) = X'(\pi) = 0, \end{cases}$$

e si vede che esso ammette soluzioni non identicamente nulle SE E SOLO SE $K \geq 0$ ed è della forma

$$K = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 0.$$

Corrispondentemente a tali valori di M , l'integrale generale di (6) è

$$\begin{cases} X(x) \equiv C & \forall x \in [0, \ell], \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria, per } n = 0, \\ X(x) = C \cos\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) & \forall x \in [0, \ell], \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria, per } n \geq 1, \end{cases}$$

e quindi sostituendo $K = -n^2$, $n \geq 0$, nell'equazione per T e risolvendola, si arriva a

$$\begin{cases} T(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} & t \in [0, +\infty), \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ costanti arbitrarie, per } n = 0 \\ T(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} & t \in [0, +\infty), \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ costanti arbitrarie, per } n = 1 \\ T(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{n^2 - 1}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{n^2 - 1}t) & t \in [0, +\infty), \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ costanti arbitrarie, per } n \geq 2. \end{cases}$$

Quindi per ogni $n \geq 1$ ho infinite soluzioni u_n (del problema ottenuto accoppiando l'equazione alle sole condizioni di Dirichlet omogenee) della forma

$$u_n(x, t) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 e^{-2t} & \text{per } n = 0, \\ (\alpha_1 e^{-t} + \beta_1 t e^{-t}) \cos(x) & \text{per } n = 1, \\ \left(\alpha_n e^{-t} \cos(\sqrt{n^2 - 1}t) + \beta_n e^{-t} \sin(\sqrt{n^2 - 1}t) \right) \cos(nx) & \text{per } n \geq 2, \end{cases}$$

con $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$ costanti arbitrarie. Ricerco una soluzione u della forma

(7)

$$u(x, t) = \alpha_0 + \beta_0 e^{-2t} + (\alpha_1 e^{-t} + \beta_1 t e^{-t}) \cos(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\alpha_n e^{-t} \cos(\sqrt{n^2 - 1}t) + \beta_n e^{-t} \sin(\sqrt{n^2 - 1}t) \right) \cos(nx)$$

Condizioni iniziali Imponendo le condizioni iniziali trovo che

$$u(x, 0) = f(x) = \alpha_0 + \beta_0 + \alpha_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx)$$

e quindi concludo che

$$\begin{cases} \text{per } n = 0 & \alpha_0 + \beta_0 = \frac{a_0}{2}, & \text{con } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx, \\ \text{per } n \geq 1 & \alpha_n = a_n, & \text{con } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx, \end{cases}$$

(cioè gli a_n sono i coefficienti di Fourier del prolungamento di f a una funzione 2π -periodica su \mathbb{R} , pari). Inoltre, essendo

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= -2\beta_0 e^{-2t} + e^{-t}(-\alpha_1 + \beta_1 - t\beta_1) \cos(x) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-t} \cos(nx) \left(-\alpha_n \cos(\sqrt{n^2 - 1}t) - \beta_n \sin(\sqrt{n^2 - 1}t) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_n \sqrt{n^2 - 1} \sin(\sqrt{n^2 - 1}t) + \beta_n \sqrt{n^2 - 1} \cos(\sqrt{n^2 - 1}t) \right) \end{aligned}$$

si ha

$$g(x) = \partial_t u(x, 0) = -2\beta_0 + (-\alpha_1 + \beta_1) \cos(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \cos(nx) \left(-\alpha_n + \beta_n \sqrt{n^2 - 1} \right)$$

da cui concludiamo che

$$\begin{cases} \text{per } n = 0 & -2\beta_0 = \frac{b_0}{2} & \Rightarrow \beta_0 = -\frac{b_0}{4} \\ \text{per } n = 1 & \beta_1 - \alpha_1 = b_1 & \Rightarrow \beta_1 = b_1 + \alpha_1 \\ \text{per } n \geq 2 & \beta_n \sqrt{n^2 - 1} - \alpha_n = b_n & \Rightarrow \beta_n = \frac{b_n + \alpha_n}{\sqrt{n^2 - 1}}, \end{cases}$$

ove b_n sono i coefficienti di Fourier del prolungamento di g a una funzione 2π -periodica su \mathbb{R} , pari, cioè

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \cos(nx) dx.$$

Convergenza della serie Si vede che la serie di funzioni in (7) converge uniformemente su $[0, \pi] \times [0, +\infty)$ con le sue derivate parziali prime e seconde a una funzione $u \in C^2([0, \pi] \times [0, +\infty))$, soluzione di (5), se f e g soddisfano le seguenti condizioni (oltre alle summenzionate condizioni di compatibilità):

- $f \in C^2([0, \pi])$, f derivabile tre volte su $[0, \pi]$ con f''' (a quadrato) integrabile su $[0, \pi]$ (per esempio, questo è verificato se f è di classe C^3 a tratti su $[0, \pi]$);
- $g \in C^1([0, \pi])$, g derivabile due volte su $[0, \pi]$ con g'' (a quadrato) integrabile su $[0, \pi]$ (per esempio, questo è verificato se g è di classe C^2 a tratti su $[0, \pi]$).