

Serie di Fourier – Richiami di teoria

Funzioni periodiche

- Ci poniamo il problema dello sviluppo in serie di Fourier per funzioni

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 2\pi\text{-periodiche.}$$

Esempio 1. Consideriamo il prolungamento 2π -periodico $\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} \\ f_1(x) := x \end{array} \right. \longrightarrow \tilde{f}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Esempio 2. Data

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ f_2(x) := x \end{array} \right.$$

la prolunghiamo a una funzione $\tilde{f}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-periodica.

Osservazioni:

- Le funzioni prolungate \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 hanno infiniti punti di discontinuità di tipo salto su \mathbb{R} . In effetti le serie di Fourier si configurano come strumenti di approssimazione di funzioni non necessariamente continue. Si confronti questo con le serie di Taylor per funzioni C^∞ , analitiche..

- La teoria delle serie di Fourier si dà per funzioni

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -periodiche, con $T > 0$ generico, riconducibili a funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodiche ponendo

$$f(x) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \quad \text{infatti}$$

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= g\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right) \\ &= g\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = f(x). \end{aligned}$$

Coefficienti di Fourier

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, quale è la serie trigonometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$$

candidata ad approssimare f ?

$$\text{Ipotesi di base: } \begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 2\pi\text{-periodica} \\ f \text{ integrabile su } [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Conseguenze:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R}, \\ f^2 \text{ integrabile su } [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Problema: Sia

$$\mathcal{S}_n := \{\text{polinomi trigonometrici di ordine } n\}$$

e si consideri il problema di *minimizzare lo scarto quadratico medio*

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx$$

fra f e il generico polinomio trigonometrico di ordine n

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx).$$

Si dimostra che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il polinomio S_n che risolve il problema di minimo, cioè

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx \quad \forall P_n \in \mathcal{S}_n$$

è il *polinomio trigonometrico di Fourier* associato a f

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

con coefficienti (i *coefficienti di Fourier* associati a f)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

che danno luogo alla *serie di Fourier* associata a f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Osservazioni

- Grazie all'ipotesi di integrabilità su f , gli $(a_k)_k$ e $(b_k)_k$ sono ben definiti.
- I coefficienti si possono ottenere integrando su un periodo (=intervallo di lunghezza 2π) qualsiasi di f , ad esempio su $[-\pi, \pi]$.
- il calcolo degli $(a_k)_k$ e $(b_k)_k$ si semplifica in presenza di simmetrie:

$$f \text{ pari} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ \quad = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \forall n \geq 0 \\ b_n = 0 \quad \forall n \geq 1, \\ f \text{ si sviluppa in serie di soli coseni} \end{cases}$$

$$f \text{ dispari} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ \quad = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \forall n \geq 1 \\ f \text{ si sviluppa in serie di soli seni} \end{cases}$$

- Se f è periodica con periodo $T > 0$, le formule diventano

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Convergenza della serie di Fourier

Sia S_n la ridotta n -esima:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

come converge la successione di funzioni S_n a f ?
Tutti i risultati che enunceremo valgono con ovvie modifiche per funzioni T -periodiche.

Teorema 1: convergenza in media quadratica Sotto l'ipotesi di base

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 2\pi\text{-periodica} \\ f \text{ integrabile su } [0, 2\pi] \end{cases}$$

la successione (S_n) converge a f in in media quadratica, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0,$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |S_n(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx,$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} S_n(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Inoltre vale l'identità di Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Osservazioni:

- Corollario (teorema di Riemann-Lebesgue):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0$$

(poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ converge, la successione $a_n^2 + b_n^2$ è infinitesima..)

- Se f è periodica con periodo $T > 0$, l'identità di Parseval è

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

- La convergenza in media quadratica NON implica la convergenza puntuale, cioè non implica lo sviluppo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si migliora il tipo di convergenza (media quadratica \rightarrow puntuale \rightarrow uniforme \rightarrow convergenza delle derivate) aumentando le ipotesi di regolarità su f .

Teorema 2: convergenza puntuale Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica

- è continua a tratti* in $[0, 2\pi]$ (quindi integrabile su $[0, 2\pi]$)
- in $x_0 \in \mathbb{R}$ f è derivabile, oppure

f è continua in x_0 e ed esistono finite

la derivata destra $f'_+(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_-(x_0)$, oppure

f ha un punto di salto in x_0 e ed esistono finite

la pseudoderivata destra $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$

e la pseudoderivata sinistra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$

allora S_n converge in x_0 a $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.

(oppure, Criterio di Dirichlet: f limitata e monotona a tratti).

*cioè f è continua in $[0, 2\pi]$ tranne che in al più un numero finito di punti $\{x_1, \dots, x_m\}$ tali che per ogni $i = 1, \dots, m$ f ha in x_i una discontinuità di tipo salto

Teorema 3: convergenza uniforme Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica. Supponiamo che

1. $f \in C^0((0, 2\pi))$
2. $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ sia C^1 a tratti[†] su $[0, 2\pi]$.

Allora per ogni $[a, b] \subset (0, 2\pi)$

$$S_n \rightarrow f \text{ uniformemente su } [a, b].$$

Se oltre alle condizioni 1 & 2 si ha anche che f è continua in 0 e in 2π (quindi $f \in C^0(\mathbb{R})$) allora

$$S_n \rightarrow f \text{ uniformemente su } [0, 2\pi]$$

(e quindi uniformemente su \mathbb{R}).

Osservazione:

- Si noti che $f \in C^0(\mathbb{R})$ è condizione necessaria per la convergenza uniforme su \mathbb{R} perché le S_n sono funzioni continue e la convergenza uniforme preserva la continuità.
- L'ipotesi f è continua in 0 e in 2π è scritta in modo ridondante: in effetti la continuità in 0 (che significa $f(0^+) = f(0) = f(0^-)$) da sola implica, per periodicità, anche $f(2\pi^+) = f(2\pi) = f(2\pi^-)$.

[†] cioè f è derivabile in $[0, 2\pi]$ tranne che in al più un numero finito di punti $\{x_1, \dots, x_m\}$ tali che per ogni $i = 1, \dots, m$ esistono finite le derivate destre e sinistre $f'_+(x_i)$ e $f'_-(x_i)$ e inoltre f è di classe C^1 sull'intervallo (x_{i-1}, x_i)

- Se la funzione di partenza è solo data sull'intervallo $[0, 2\pi)$, la condizione \tilde{f} è *continua in 0* sulla sua prolungata 2π -periodica \tilde{f} si traduce, a livello di f , nella richiesta che $f(0) = f(0^+) = f(2\pi^-)$.

Teorema 4: convergenza delle derivate Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica. Supponiamo che

- $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $f \in C^1((0, 2\pi))$ e
- $f' \in C^0(\mathbb{R})$ e $f' : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ sia C^1 a tratti su $[0, 2\pi]$

Allora la serie di Fourier si può derivare termine a termine, cioè

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))' \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Osservazione: la condizione $f' \in C^0(\mathbb{R})$ significa che deve valere $f'(0) = f'(0^+) = f'(2\pi^-)$.