Esercizi svolti su serie di Fourier

Esercizio 1. **(Onda quadra).** Determinare i coefficienti di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ (d'ora in poi denoteremo con lo stesso simbolo f l'estensione periodica a tutto $\mathbb{R}$ di una funzione f definita su un intervallo limitato).

Svolgimento. Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ per } n \geq 1.$$

Invece si ha

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{-\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n}$$

da cui

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier associata a f è

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x).$$

Esercizio 2. **(Onda quadra II).**

1. Sia $A > 0$. Determinare i coefficienti di Fourier della funzione

$$g(x) = \begin{cases} A & x \in [0, \pi) \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata per periodicità (di periodo 2π) a $\mathbb{R}$.

2. Sia $A > 0$. Sviluppare in serie di Fourier

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \pi) \\ -A & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata per periodicità (di periodo 2π) a $\mathbb{R}$.

3. Sia $A > 0$. Sviluppare in serie di Fourier

$$j(x) = \begin{cases} A & x \in [0, \pi) \\ -A & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata per periodicità (di periodo 2π) a $\mathbb{R}$.

Svolgimento.

Parte 1. Notiamo che che $g(x) = Af(x)$, dove f è l'onda quadra dell'Esercizio 1. Per la linearità dei coefficienti di Fourier, la serie associata a g è

$$A\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x)\right)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x).$$

Parte 2. Notiamo che $h(x) = g(x) - A$, dove g è l'onda della parte precendente dell'esercizio. Per linearità, la serie di Fourier di h è

$$\sum \text{Fourier}(h) = \sum \text{Fourier}(g) - \sum \text{Fourier}(c)$$

con c funzione costante $c(x) \equiv A$. Poiché c è un particolare polinomio trigonometrico (di ordine 0), la sua serie di Fourier coincide con c stessa: dunque tutti i coefficienti sono nulli tranne

$$a_0 = 2A \;\Rightarrow\; c(x) = \frac{a_0}{2} = A \;\forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Concludiamo che la serie associata a h è

$$\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x)-A=-\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x).$$

Parte 3. La funzione j si ottiene sommando le funzioni g e h dei punti precedenti. Quindi la serie di Fourier associata a j è la somma delle serie di Fourier di g e h, cioè

$$\frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x).$$

Esercizio 3. Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = 2 + \sin x + 3\cos(2x).$$

Svolgimento. Notare che f è un polinomio trigonometrico. Quindi confrontando

$$2+\sin x+3\cos(2x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

ottengo

$$a_n=\begin{cases}4 & \text{se } n=0,\\ 3 & \text{se } n=2,\\ 0 & \text{altrimenti,}\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}1 & \text{se } n=1,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Esercizio 4. Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x)=\begin{cases}3 & \text{se } x\in[0,\pi]\\ 1 & \text{se } x\in(\pi,2\pi),\end{cases}$$

estesa periodicamente a $\mathbb{R}$. Discutere inoltre convergenza puntuale e uniforme sugli intervalli $[0, 2\pi]$ e $[\pi/4, \pi/3]$. Scrivere la serie numerica associata alla convergenza puntuale in $x = \pi/2$.

Svolgimento. Notiamo che

$$f(x) = 2 + g(x)$$

dove g è un'onda quadra di coefficiente $A = 1$, cioè

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{se } x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Dunque la serie di Fourier associata è

$$f \sim 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

1. La serie converge puntualmente per ogni $x \in [0, 2\pi)$ a

$$\begin{cases} 3 & \text{per } x \in (0, \pi) \\ 1 & \text{per } x \in (\pi, 2\pi) \\ 2 & \text{se } x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases}$$

   in effetti

$$2 = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{3+1}{2} \qquad \text{e idem in } x = \pi, 2\pi.$$

   La convergenza non può essere uniforme perché il limite è discontinuo. Sull'intervallo $[\pi/4, \pi/3]$ la convergenza è uniforme essendo f di classe C^1 su tale intervallo.

2. Per $x = \frac{\pi}{2}$, la serie converge a $f(\pi/2) = 3$: dunque si ha

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{2k+1} = 1.$$

   Ma

$$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} = (-1)^k$$

   da cui si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

   cioè

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 5. Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = x^2, \qquad x \in [-1, 1),$$

prolungata a una funzione 2-periodica su $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Si noti che f è pari quindi $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché il periodo non è 2π ma $T = 2$, uso le formule

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x^2\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x.$$

Quindi:

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

e

$$\begin{aligned}
a_n = 2\int_0^1 x^2\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x &= 2\left[x^2\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 - \frac{4}{\pi n}\int_0^1 x\sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{\pi n}\left[x\,\frac{-\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 - \frac{4}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x = \frac{4\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} = (-1)^n\frac{4}{\pi^2 n^2}
\end{aligned}$$

Dunque

$$f \sim \frac{1}{3} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n x).$$

Esercizio 6. Determinare i coefficienti di Fourier della funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad x \in [0, 2\pi[$$

prolungata per periodicità (di periodo 2π) ad $\mathbb{R}$. Dedurre la somma della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

Svolgimento. Poiché la funzione è dispari, si ha $a_n = 0$ per ogni n. Invece si ha

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) + \sin\left(nx - \frac{x}{2}\right)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \frac{2}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n-1}\right] = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}
\end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier associata è

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\sin(nx).$$

Applicando l'identità di Parseval otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

Essendo
$$\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{2} \mathrm{d}x = \pi$$
si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}.$$

Esercizio 7. Sviluppare in serie di Fourier
$$f(x) = |x| - \pi \qquad \text{per } |x| \leq \pi,$$
estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Poichéf è pari, $b_n = 0$ per ogni n. Invece
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|x|-\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x-\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(x-\pi)^2}{2}\right]_0^{\pi} = -\pi$$
Se $n \geq 1$
$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|x|-\pi)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x-\pi)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[(x-\pi)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi)-1\right) \end{aligned}$$
da cui
$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$
Dunque la serie di Fourier di f è
$$-\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}\cos((2k+1)x) = -\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$$
Abbiamo che la serie di Fourier converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ perchéf èC^1 a tratti su $\mathbb{R}$. Ma si può vedere che

1. la serie converge totalmente essendo
$$\frac{4}{\pi(2k+1)^2}|\cos((2k+1)x)| \leq \frac{4}{\pi(2k+1)^2}, \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} < +\infty;$$
2. la serie converge uniformemente ad una funzione g, ed in particolare vi converge in media quadratica;
3. ma la serie di Fourier converge in media quadratica a f: dunque $f = g$, e la serie converge uniformemente a f.

Esercizio 8. Sviluppare in serie di Fourier la funzione
$$f(x) = e^x, \qquad x \in [-\pi, \pi),$$
estesa con periodicità a tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \,\mathrm{d}x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi}\sinh \pi.$$

e per $n \geq 1$ si ha $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx)\,\mathrm{d}x$. Abbiamo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx)\,\mathrm{d}x = [e^x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx)\,\mathrm{d}x = [e^x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n\,[e^x\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} - n^2\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

da cui

$$(n^2+1)\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx)\,\mathrm{d}x = [e^x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} = e^{\pi}\cos(n\pi) - e^{-\pi}\cos(-n\pi) = 2(-1)^n \sinh \pi$$

e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+1)}\sinh\pi.$$

Similmente

$$b_n = \frac{-2(-1)^n n \sinh \pi}{\pi(n^2+1)}.$$

Esercizio 9. Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = (\cos x)^+, \qquad x \in [-\pi, \pi),$$

prolungata a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Siccome f è pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. D'altra parte, si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(x))^+\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(x))^+\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

e per $n \geq 2$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(x))^+\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right) + \frac{1}{n-1}\sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\right)\right] \end{aligned}$$

- Quindi: se n è dispari, si ha $a_n = 0$; se $n = 2k$ è pari, si ha

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right) = (-1)^k \qquad \text{e} \qquad \sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\right) = -(-1)^k$$

per cui

$$a_n = a_{2k} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2k+1}(-1)^k - \frac{1}{2k-1}(-1)^k\right] = -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}.$$

- Dunque la serie di Fourier associata è

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos(2kx).$$

Esercizio 10. Sia f la funzione 2π-periodica definita da

$$f(x) = \sin(5x^2), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. la sua serie di Fourier converge in media quadratica in $[-\pi, \pi]$;
2. la sua serie di Fourier converge uniformemente in $\mathbb{R}$;
3. i coefficienti b_n sono tutti nulli.

Svolgimento.

1. Vero: f è continua su $\mathbb{R}$ ed f è di classe C^1 a tratti su $\mathbb{R}$.
2. Vero: la funzione è infatti pari.
3. Vero: poiché f è a quadrato sommabile.

Esercizio 11. Data

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

si consideri la sua estensione 2π-periodica a $\mathbb{R}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. la sua serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ su $[-\pi, \pi]$;
2. la sua serie di Fourier converge uniformemente su $\mathbb{R}$;
3. la sua serie di Fourier converge uniformemente a f su $[\frac{39}{4}\pi, \frac{41}{4}\pi]$;
4. si ha $b_3 = 2$;
5. si ha $a_1 = \frac{\pi-4}{2\pi}$;
6. si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x;$$

Svolgimento.

1. Falso. La serie converge alla funzione 2π-periodica
$$g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{se } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{cases}$$
Infatti, f è continua a tratti: continua su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, continua su $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ e su $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, e $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ sono punti di salto. In $x = \frac{\pi}{2}$ si ha
$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-\right)}{2} = \frac{1 + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$
e idem in $x = -\frac{\pi}{2}$ (f è pari).
2. Falso. Il limite puntuale g è discontinuo mentre i polinomi trigonometrici approssimanti sono funzioni continue, dunque non si può avere convergenza puntuale.

3. Vero. Per periodicità, l'intervallo $[\frac{39}{4}\pi, \frac{41}{4}\pi]$ è equivalente all'intervallo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ che cade nella zona dove f è C^1. Dunque si ha convergenza uniforme a f.

4. Falso: f è pari, allora $b_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

5. Vero. Si ha
$$\begin{aligned} a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\,[\sin x]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

6. Vero perché si ha convergenza in media quadratica su tutto $[0, 2\pi]$. Anche senza convergenza uniforme su $[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$, passo al limite sotto il segno di integrale.

Esercizio 12. Data
$$f(x) = \begin{cases} -x\pi & -\pi \le x \le 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$
si consideri la sua estensione 2π-periodica a $\mathbb{R}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. la sua serie di Fourier converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$
2. la sua serie di Fourier converge a 0 per $x = 31\pi$
3. il coefficiente a_0 vale $\frac{5}{6}\pi^2$.

---

1. Vero: f è continua su $\mathbb{R}$ ed è C^1 a tratti.

2. Falso: per periodicità si ha
$$f(31\pi) = f(\pi) = \pi^2.$$

3. Vero: si ha
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x\pi)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{5}{6}\pi^2.$$