

Teorema della divergenza – Richiami di teoria

Operatori divergenza e di Laplace

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$.

Divergenza Consideriamo un campo vettoriale

$\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenziabile in Ω

(cioè $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ e per ogni $i = 1, \dots, n$ le funzioni $F_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili in ogni punto di Ω).

L'operatore *divergenza* di \vec{F} è definito da

$$\operatorname{div} \vec{F}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x), \quad x \in \Omega,$$

cioè è la traccia (cioè la somma degli elementi della diagonale principale) della matrice jacobiana $J\vec{F}(x)$.

Notare che l'operatore divergenza fa passare

da un campo vettoriale $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
a un campo scalare $\operatorname{div} \vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Laplaciano Consideriamo un campo scalare

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2(\Omega)$.

L'operatore *Laplaciano* di f è definito da

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \operatorname{div}(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

cioè è la traccia della matrice hessiana $Hf(x)$.

Data $f = f(x, y) \in C^2(\Omega)$, sia

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\rho, \vartheta) = f(\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta))$$

la funzione corrispondente a f in coordinate polari. L'operatore corrispondente al Laplaciano in coordinate polari è

$$\Delta f \quad \longrightarrow \quad \Delta \tilde{f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \vartheta^2}.$$

Regolarità di insiemi aperti

Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^1 se soddisfa le seguenti condizioni

- Ω è limitato
- $\partial\Omega$ si rappresenta localmente come grafico di una funzione di classe C^1 , cioè

$\forall x \in \partial\Omega \quad \exists B_r(x) \quad \exists f : T \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R},$
 T insieme aperto e $f \in C^1(T)$, tali che

$$\begin{aligned} & B_r(x) \cap \partial\Omega \\ &= \text{graf}(f) \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in T, x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}. \end{aligned}$$

Analogamente si dà la definizione di aperto di classe C^k , $k \geq 1$.

Versore normale esterno

Sia

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto di classe C^1 .

Allora per ogni $x \in \partial\Omega$ è ben definito il versore (di \mathbb{R}^n) normale a $\partial\Omega$ in x , diretto verso l'esterno di Ω , che denotiamo come

$\nu(x)$ versore normale esterno in x .

Chiamiamo *normale esterna* il campo vettoriale $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, che è di classe C^0 su $\partial\Omega$.

Esempi:

- se $n = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, quindi

$\partial\Omega$ è una curva regolare (di classe C^1)
allora $\nu(x)$ è il versore normale alla curva in x ,
diretto verso l'esterno di Ω

- se $n = 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, quindi

$\partial\Omega$ è una superficie regolare di \mathbb{R}^3
e $\nu(x)$ è il versore normale alla superficie in x ,
diretto verso l'esterno di Ω

Superficie e integrali di superficie

Sia \mathcal{S} una superficie regolare di \mathbb{R}^3 data in forma cartesiana, cioè \mathcal{S} è il grafico di una funzione $f : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ classe C^1 :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in T \right\}.$$

Allora

- per ogni $P = (x, y, z) = (x, y, f(x, y)) \in \mathcal{S}$ il versore normale a \mathcal{S} nel punto P è

$$\begin{aligned} \nu(P) &= \nu(x, y, f(x, y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) \end{aligned}$$

- data una funzione

$$\begin{aligned} g : \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{limitata su } \mathcal{S}, \\ g &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

l'integrale di superficie di g su \mathcal{S} è

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{S}} g \, dS \\ &= \iint_T g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2} \, dx dy \end{aligned}$$

ove

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2} \, dx dy$$

è l'*elemento infinitesimo di area della superficie*.

- Sia

$$\vec{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ di classe } C^1.$$

Il flusso di \vec{F} attraverso \mathcal{S} è

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \nu \, dS$$

con \cdot il prodotto scalare. Quindi usando la rappresentazione cartesiana della superficie (e osservando che la quantità $\sqrt{1 + \frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$ si elide) si ha la formula per il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie cartesiana

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_T \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) \, dx dy \end{aligned}$$

Il teorema della divergenza (o teorema di Gauss)

- Sia $n = 2$ o $n = 3$
- sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto di classe C^1
- sia

$$\vec{F} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{un campo vettoriale con}$$
$$\vec{F} \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$$

cioè \vec{F} è continuo sulla chiusura $\overline{\Omega}$ di Ω e di classe C^1 in Ω

- sia $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ la normale esterna al bordo $\partial\Omega$.

Allora

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \nu \, dS.$$

Riduzione dimensionale:

**Si passa da un integrale in \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$)
a un integrale in \mathbb{R}^{n-1} !**

- se $n = 2$, si passa da un integrale doppio a un integrale curvilineo: notare che

ν è il versore normale (esterno) alla curva $\partial\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \nu \, dS \quad \text{è l'integrale curvilineo di prima specie}$$

del campo scalare $\varphi = \vec{F} \cdot \nu$ lungo la curva $\partial\Omega$

- se $n = 3$, si passa da un integrale triplo a un integrale superficiale: notare che

ν è il versore normale (esterno) alla superficie $\partial\Omega$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \nu \, dS \quad \text{è il flusso di } \vec{F} \text{ attraverso la superficie } \partial\Omega}$$

Formula di integrazione per parti

- La riduzione dimensionale è caratteristica di tutte le formule di integrazione per parti: nel caso

$$f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^1 \text{ su } (a, b)$$

si passa da integrali 1-dimensionali a “integrali 0-dimensionali”

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = - \int_a^b f(x)g'(x) dx + [f(x)g(x)]_a^b.$$

- Dal teorema della divergenza si ricava la seguente

Formula di integrazione per parti.

- Sia $n = 2$ o $n = 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto di classe C^1
- siano

$$\begin{aligned} u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} & \text{ un campo scalare con } u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \\ \vec{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n & \text{ un campo vettoriale con } \vec{v} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \end{aligned}$$

Allora

$$\int_{\Omega} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div}(\vec{v}(x)) dx + \int_{\partial\Omega} u \vec{v} \cdot \vec{\nu} dS.$$

... Si dimostra applicando il teorema della divergenza al campo $\vec{F} = u \vec{v}$ e osservando che vale la *formula di Leibniz*

$$\operatorname{div}(u \vec{v}) = \nabla u \cdot \vec{v} + u \operatorname{div}(\vec{v})$$

Altre formule di integrazione per parti

- Da

$$\int_{\Omega} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) \, dx = - \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div}(\vec{v}(x)) \, dx + \int_{\partial\Omega} u \vec{v} \cdot \vec{\nu} \, dS.$$

si ricavano

- formula di integrazione per parti rispetto alla derivata parziale i -esima: dati

$$u, w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{campi scalare con } u, w \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$$

si ha per ogni $i = 1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} w \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u w \nu_i \, dS.$$

... Si dimostra applicando la formula di integrazione per parti al campo scalare u e al campo vettoriale $\vec{v} = w \vec{e}_i$, con \vec{e}_i l' i -esimo versore della base canonica di \mathbb{R}^n

- formula di integrazione per parti per l'operatore di Laplace: dati

$$u, w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{campi scalari con } u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$$

$$w \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$$

si ha

$$\int_{\Omega} u \Delta w \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega} u \nabla w \cdot \nu \, dS.$$

... Si dimostra applicando la formula di integrazione per parti al campo scalare u e al campo vettoriale $\vec{v} = \nabla w$, che ha la regolarità giusta essendo $w \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Si noti che il termine

$\nabla w \cdot \nu$ viene detto derivata normale di w e denotato come $\frac{\partial w}{\partial \nu}$.

Allora la formula diventa

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta w \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial w}{\partial \nu} \, dS.$$