

Esercizio 12

Dimostrare che il dominio massimale $[T_{\min}, T_{\max}]$ della soluzione di

$$\begin{cases} y' = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

non è tutto \mathbb{R} .

Esistenza e unicità locale: si ha che

$$f(t, y) = y^2 + t^2$$

è di classe C^1 in \mathbb{R}^2 . Quindi

esiste ed è unica la soluz. loc. $y : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$.

♠ La funz. $y \mapsto f(t, y)$ ha crescita quadratica: non possiamo applicare il teor. di esist. globale.

Segno della derivata:

$$y'(t) = y^2(t) + t^2 > 0 \quad \forall t \in [T_{\min}, T_{\max}] \setminus 0$$

vediamo che

$$\begin{cases} y \text{ è strettam. crescente su } [T_{\min}, 0] \\ y \text{ è strettam. crescente su } [0, T_{\max}]. \end{cases}$$

Proviamo che

$$T_{\max} < +\infty$$

il che conclude la dimostrazione del fatto che il dominio massimale non è \mathbb{R} .

- Per assurdo sia $T_{\max} = +\infty$. Per monotonia

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = b \in (0, +\infty].$$

Osserviamo

$$y'(t) \geq t^2 \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow y(t) - y(0) = \int_0^t y'(s) ds \geq \int_0^t s^2 ds = \frac{1}{3}t^3 \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

e concludiamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$

- Dall'equazione segue che

$$\frac{y'(t)}{y^2(t) + t^2} = 1$$

quindi integrando sul generico intervallo $[1, M]$

$$\int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t) + t^2} dt = M - 1.$$

D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned} \int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t) + t^2} dt &\leq \int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt \\ &= \left[-\frac{1}{y(t)} \right]_1^M \\ &= -\frac{1}{y(M)} + \frac{1}{y(1)}. \end{aligned}$$

• Si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty \Rightarrow \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{y(M)} = 0$$

quindi

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t) + t^2} dt \leq \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \frac{1}{y(1)}.$$

• Questo è in contraddizione con

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{y'(t)}{y^2(t) + t^2} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} (M - 1) = +\infty.$$

Assurdo! Deve essere $T_{\max} < +\infty$!!