Equazioni lineari secondo ordine a coefficienti continui

Si tratta di equazioni del tipo

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t), \quad t \in I.$$

La soluzione generale è della forma

(Soluzione generale omogenea associata)
+ (Soluzione particolare).

♣ La soluzione generale dell'omogenea è data dalla combinazione lineare di **due soluzioni linearmente indipendenti** y_1 e y_2, cioè

$$y_{\mathrm{om}}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Si noti che y_1 e y_2 danno luogo alla matrice Wronskiana

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}, \qquad t \in I$$

Poiché y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti,

$$\det(W(t)) \neq 0 \qquad \forall\, t \in I.$$

$\diamondsuit$ Come trovare due soluzioni linearmente indipendenti?

- nel caso in cui $a(t)$ e $b(t)$ sono costanti, si ricercano le radici caratteristiche dell'equaz. algebrica associata all'equaz. differenziale

- nel caso generale in cui $a(t)$ e $b(t)$ NON sono costanti: *metodo di D'Alembert*..

$\clubsuit$ per la ricerca di una soluzione particolare $y_{\mathrm{p}}(t)$

- nel caso generale a coefficienti non costanti: *metodo della variazione delle costanti di Lagrange*

- nel caso a coefficienti costanti, è anche possibile usare il metodo di similarità: ricercare una soluzione particolare "dello stesso tipo" del termine noto $f(t)$..

Equazioni lineari del second'ordine a coefficienti costanti

Nel caso in cui

$$a(t) \equiv a, \;\; b(t) \equiv b \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

per trovare le soluzioni di

$$y'' + ay' + b = 0 \tag{1}$$

si considerano le radici caratteristiche dell'eq.

$$P(z) = z^2 + az + b = 0$$

$\diamondsuit$ Se le radici caratteristiche $z_1 = \lambda_1, z_2 = \lambda_2$ sono reali e distinte, allora

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ linearm. indip.

e la soluz. generale di (1) è

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$\diamondsuit$ Se $z_1 = \lambda_1$ è radice doppia, allora

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ linearm. indip.

e la soluz. generale di (1) è

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t};$$

$\diamondsuit$ Se $\alpha \pm i\beta$ sono radici complesse, allora

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

linearm. indip.

e la soluz. generale di (1) è

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)).$$

Il metodo di D'Alembert

Nel caso generale

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t), \quad t \in I,$$

il metodo di D'Alembert serve per trovare una soluzione dell'equazione omogenea

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

linearmente indipendente rispetto ad una già nota.

Esercizio 17

Sapendo che la funzione $y_1(t) = t$ è soluzione di

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0,$$

trovarne un'altra $y_2(t)$ linearmente indipendente, sull'intervallo $I = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

Cerchiamola della forma

$$y_2(t) = v(t)y_1(t)$$

considerando $v(t)$ incognita. Cercheremo

la funzione $v(t)$ NON costante

(altrimenti y_1 e y_2 linearmente dipendenti!!). Nel nostro caso

$$y_2(t) = tv(t).$$

$\diamondsuit$ Derivando si ha

$$y_2'(t) = v(t) + tv'(t)$$
$$y_2''(t) = v'(t) + v'(t) + tv''(t) = 2v'(t) + tv''(t).$$

Sostituendo si ha

$$(1 - t^2)(2v' + tv'') - 2t(v + tv') + 2tv = 0$$

da cui

$$(1-t^2)tv''+[2(1-t^2)-2t^2]v'+(-2t+2t)v = 0.$$

Dividendo per $t(1 - t^2)$ si ottiene

$$v'' + \left(\frac{2}{t} - \frac{2t}{1-t^2}\right) v' = 0.$$

$\diamondsuit$ C'è una riduzione d'ordine. Pongo $v' = z$, ottenendo

$$z' = \left(\frac{2t}{1-t^2} - \frac{2}{t}\right) z, \quad t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Escludo la soluzione $z \equiv 0$, che darebbe $v \equiv c$ costante!
Quindi si ha $z > 0$ oppure $z < 0$ su $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Cerchiamo ad esempio z positiva (ci basta trovare <u>una</u> soluzione z, da cui v, da cui y_2).
Separando le variabili, ottengo

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{2t}{1-t^2} - \frac{2}{t}, \quad t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

da cui

$$\ln(z(t)) = -\ln(1-t^2) - 2\ln t + c.$$

Scegliendo $c = 0$ (ci basta trovare <u>una</u> soluzione z!), ottengo che

$$z(t)(1-t^2)t^2 = 1 \;\Rightarrow\; v'(t) = \frac{1}{(1-t^2)t^2},\ t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

$\diamondsuit$ Dunque

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2(1-t^2)}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t) \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\end{aligned}$$

(con costante di integrazione uguale a 0), quindi

$$y_2(t) = tv(t) = -1 + \frac{t}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right), \qquad t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Esercizio 18

Sapendo che la funzione $y_1(t) = t$ è soluzione di

$$t^2y'' - (t^2 + 2t)y' + (t + 2)y = 0,$$

trovarne un'altra $y_2(t)$ linearmente indipendente.

Si pone $y_2(t) = tv(t)$ e si ha

$$y_2' = v + tv', \qquad y_2'' = 2v' + tv''$$

da cui

$$t^2(2v' + tv'') - (t^2 + 2t)(v + tv') + (t + 2)tv = 0$$

e quindi

$$t^3v''+(2t^2-t^3-2t^2)v'+(-t^2-2t+t^2+2t)v = 0.$$

Allora

$$t^3v'' - t^3v = 0 \Rightarrow v''(t) = v'(t).$$

Si ha (scegliendo le costanti di integrazioni nulle)

$$v'(t) = e^t \Rightarrow v(t) = e^t.$$

Concludiamo che

$$y_2(t) = te^t.$$

Il metodo della variazione delle costanti di Lagrange

Serve a trovare trovare soluzioni particolari di

$$y''(t) + a(t)y' + b(t)y = f(t)$$

conoscendo due soluzioni linearm. indip. y_1 e y_2 dell'omogenea associata.

♣ Si cerca una soluzione della forma

$$y(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t)$$

con v_1, v_2 funzioni incognite.
Allora si ha

$$y' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'.$$

Chiediamo che

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$

così che

$$\begin{aligned} y' &= v_1 y_1' + v_2 y_2' \\ y''(t) &= v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2''. \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni di y, y', y'' nell'equazione

$$\begin{aligned} v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' & \\ + a(t)[v_1 y_1' + v_2 y_2'] & \\ + b(t)[v_1 y_1 + v_2 y_2] &= f(t). \end{aligned}$$

Raccolgo y_1 e y_2 e trovo

$$v_1[y_1''+a(t)y_1'+b(t)y_1)]+v_2[y_2''+a(t)y_2'+b(t)y_2)] \\ +v_1'y_1'+v_2'y_2'=f(t).$$

da cui (poiché y_1, y_2 **sono soluzioni dell'omogenea**)

$$v_1'y_1'+v_2'y_2'=f(t).$$

Dunque v_1, v_2 soddisfano il sistema

$$\begin{cases} v_1'(t)y_1(t)+v_2'(t)y_2(t)=0 \\ v_1'(t)y_1'(t)+v_2'(t)y_2'(t)=f(t). \end{cases} \qquad (2)$$

che riscriviamo tramite la matrice Wronskiana

$$W(t)\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Risolvendo (2) (nota che $\det(W(t)) \neq 0$ poiché y_1 e y_2 sono linearm. indipend.), ottengo

$$v_1'(t)=\frac{-y_2(t)f(t)}{\det(W(t))} \qquad v_2'(t)=\frac{y_1(t)f(t)}{\det(W(t))}$$

e

$$v_1(t)=\int \frac{-y_2(s)f(s)}{\det(W(s))}\,\mathrm{d}s \qquad v_2(t)=\int \frac{y_1(s)f(s)}{\det(W(s))}\,\mathrm{d}s$$

da cui

$$y(t)=y_1(t)\int \frac{-y_2(s)f(s)}{\det(W(s))}\,\mathrm{d}s+y_2(t)\int \frac{y_1(s)f(s)}{\det(W(s))}\,\mathrm{d}s.$$

Esercizio 19

Trovare una soluzione particolare di

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t}, \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Le soluzioni dell'omogenea associata $y'' + y = 0$ sono le radici del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 1$. Si ha

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$

e dunque due soluzioni linearm. indipend. sono

$$y_1(t) = \cos t \qquad y_2(t) = \sin t.$$

da cui

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Poiché $\det W(t) = 1$ si ha

$$v_1(t) = \int (-\sin(t)) \frac{1}{\cos(t)} \, dt = \ln(|\cos(t)|)$$
$$= \ln(\cos(t)),$$

(per $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ infatti $\cos(t) > 0$) e

$$v_2(t) = \int \cos(t) \frac{1}{\cos(t)} \, dt = t.$$

La corrispondente soluzione particolare è

$$y(t) = (\ln \cos(t)) \cos(t) + t \sin(t).$$

Esercizio 20

Determinare una soluzione particolare di

$$y'' + y = \tan t$$

Si ha $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \sin t$. Dunque $\det(W(t)) = 1$ e

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \int (-\sin(t)) \tan(t)\, \mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\, \mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\cos^2(t) - 1}{\cos(t)}\, \mathrm{d}t \\ &= \int \left(\cos(t) - \frac{1}{\cos(t)}\right) \mathrm{d}t \\ &= \sin(t) - \ln\left(\frac{1 + \tan(t/2)}{1 - \tan(t/2)}\right) \end{aligned}$$

e

$$v_2(t) = \int \cos(t) \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\, \mathrm{d}t = \int \sin(t)\, \mathrm{d}t = -\cos(t).$$

Quindi otteniamo la soluzione particolare

$$y(t) = \cos(t)\left(\sin(t) - \ln\left(\frac{1 + \tan(t/2)}{1 - \tan(t/2)}\right)\right) - \sin(t)\cos(t).$$