Serie di funzioni

Richiami di teoria

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ delle funzioni.

Data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

1. la serie converge *puntualmente* in I a $f : I \to \mathbb{R}$ se la successione di funzioni
$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_k(x), \quad x \in I, \quad \text{(somme parziali)}$$
converge puntualmente a f in I.
Condizione necessaria è
$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in I.$$

2. la serie converge *assolutamente* su I se
$$\text{la serie } \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \text{ converge puntualmente in } I$$
(cioè la success. di funz. $g_k(x) = \sum_{n=0}^{k} |f_n(x)|$ converge per ogni $x \in I$);

3. la serie converge *uniformemente* in I a $f : I \to \mathbb{R}$ se la successione di funzioni
$$S_k \quad \text{converge uniformemente a } f \text{ in } I;$$

4. la serie converge *totalmente* se
$$\exists \{a_n\}, \quad a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ con}$$
$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| \leq a_n, \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ è convergente.}$$

Si hanno le seguenti implicazioni

(a) totale $\Rightarrow$ uniforme $\Rightarrow$ puntuale;

(b) totale $\Rightarrow$ assoluta $\Rightarrow$ puntuale.

Per le serie di funzioni valgono i risultati su

- convergenza uniforme & derivazione
- convergenza uniforme & integrazione

visti per le successioni di funzioni.