

Successioni di funzioni

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ delle funzioni.

1. $\{f_n\}$ converge *puntualmente* in $A \subseteq I$ alla *funzione limite* $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se:

$$\forall x \in A : \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

2. $\{f_n\}$ converge *uniformemente* ad f in A se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right\} = 0.$$

Siano $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Se $f_n \in C^0(I)$, $\forall n$, ed $\{f_n\}$ converge uniformemente ad f in I , allora $f \in C^0(I)$.
2. Se $I = [a, b]$, f_n è integrabile in I , $\forall n$, e $\{f_n\}$ converge uniformemente ad f in I , allora f è integrabile in I e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

3. Se I è un intervallo, f_n è derivabile in I , $\forall n$

- a. $f_n \rightarrow f$ puntualmente in I
- b. $f'_n \rightarrow g$ uniformemente in I

dove $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, allora

- i. $f_n \rightarrow f$ uniformemente in I

- ii. f è derivabile in I
- iii. $f'(x) = g(x), \forall x \in I.$

Data una successione di funzioni $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$

1. **Convergenza puntuale** Per $\underline{x} \in I$ fissato, studio la successione numerica $\{f_n(\underline{x})\}$ Si trovano l'*insieme di convergenza*

$$A = \left\{ x \in I : \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \right\} \subseteq I$$

e la funzione limite

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \quad \forall x \in A.$$

2. **Convergenza uniforme** di $\{f_n\}$ ad f in A (o su un suo sottoinsieme)

2.1. Ad $n \in \mathbb{N}$ fissato (eventualmente $n \geq n_0$) studio

$$a_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$$

2.2.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Rightarrow \text{conv. unif. in } A \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \text{NO conv. unif. in } A \end{cases}$$